再定式化の過程を重視した空間図形教材の開発
―牛乳パックの膨らみの近似に焦点をあてて―

Development of Spatial Graphic Teaching Materials Emphasizing the Process of Reformulation
:Focusing on Approximating the Bulge of the Milk Carton

田中　義久*・吉川　和宏*・早川　博文**・中野　博之***
Yoshihisa TANAKA*，Kazuhiro YOSHIKAWA*，Hirofumi HAYAKAWA**，Hiroshi NAKANO***

天坂　文隆***・澤原　雅知*・山本　　稔*・伊藤　成治*
Fumitaka TENSAKA***，Masatomo SAMAHARA*，Minoru YAMAMOTO*，Shigeharu，ITOH*

要　旨

本研究の目的は，牛乳パックの膨らみの近似に焦点をあて，再定式化の過程を味わうことができる空間図形教材を開発することである．このために，校種毎に異なる定式化の過程を示し，学習者が再定式化の過程を経験することの価値に関する考察を行った．

この結果，「牛乳パックの幾何学化」教材と「牛乳パックの幾何学化の発展」教材が開発された．前者の教材では，牛乳パック全体を直方体で捉えて得た結論を現実に照らして解釈・評価する過程，牛乳パックの膨らみを既習の立体で捉えて新たな結論を得る過程を味わうことができる．後者の教材では，牛乳パックの膨らみを関数で近似し，積分を利用して結論を得る過程を味わうことができる．

キーワード：再定式化，空間図形，近似，牛乳パック

１．研究の目的と方法

これまでに，数学的モデル化教材が多く開発されてきている（例えば，大澤，1996；西村，2001，2012；清野，2005，2015；中村，2011，福嶋，2021）[1]．三輪（1983）によれば，数学的モデル化過程には，「それまでの経験・観察をもとにして，ある事象が探求を要するという認識があるという前提」（三輪，1983，p.120）の下で，現実の世界の事象から数学的モデルをつくる定式化の過程，数学的作業によって数学的結論を見出す過程，これらの過程や結論を現実の事象に照らして解釈・評価し，比較する過程がある[2]（図１）．さらに，これらに加えて「(4) 問題のより進んだ定式化をはかる（より良いモデル化）」（三輪，1983，p.120）ことが意図され，より洗練されたモデルを求めて問題解決の過程を繰り返すことも想定されている[2]．

定式化の過程では，事象を数理的に捉え定式化するために単純化・理想化が行われ，仮定を設定して数量化・記号化がなされる．数学的作業の過程では数学的理論や手法を用いて数学的結論を導く．評価・解釈・比較の過程では得られた数学的結論を現実の事象に照

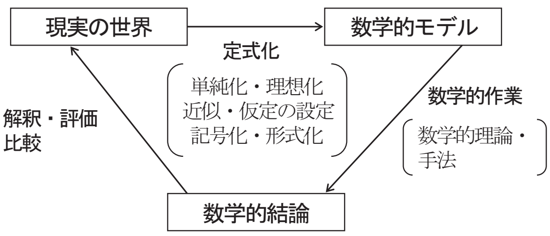


図１．数学的モデル化過程（三輪，1983，p. 120）

＊　　弘前大学教育学部　Faculty of Education, Hirosaki University
＊＊　弘前大学理工学部　Faculty of Science and Engineering, Hirosaki University
＊＊＊弘前大学大学院教育学研究科　Graduate School of Education, Hirosaki University

らして解釈・評価する．そして，よりよいモデルを求めてこれらの過程を繰り返すことになる．

数学的モデル化の教材の開発を考えたとき，子どもが既習の知識を活用する経験を得ることができるとともに，新たな問題解決の必要性が促されることで数学的モデルの修正がなされ数学的モデル化の過程を繰り返す経験を得られることが重要である．しかし，「数学的モデル化過程が繰り返される教材は多い訳ではない」（中村，2011，p.2）ことが指摘されている[3]．このため，本稿では，問題のより進んだ定式化が可能であり，数学的モデル化過程を繰り返すことが比較的容易な場面として幾何学的な場面を考える．島田(1990)には，「現実世界についての専門的な知識はあまりいらない場面を選ぶ必要がある．そのような場面は，後述のように幾何学的な場面に多いであろう．」（島田，1990，p.45）とあるからである[4]．

数学的モデル化教材の開発において，幾何学化に着目した教材の開発が行われてきている（飯島，1986，1987；太田，1995；本田・西村，2005，杉元，2007；伊藤，2008；西村，2003a，2003b，2008；上村，2017；佐藤，2017；尾川，2018；本田，2019，清野，2021）[5]．幾何学化教材の多くは３次元の事象を２次元で捉えた問題解決が想定されている．容積や体積に焦点をあてることで，３次元の事象を考察の対象とした幾何学化教材（西村，2003a；中村，2011）も開発されてきている．

伊藤（2008）には，「モデルを洗練させていく「再定式化」の経験を生徒たちに豊富に与えることができ，「数学の有用性」や「数学と日常とのつながり」を意識させることができる」（伊藤，2008，p.255）として，幾何学化教材を開発する価値の一つとして再定式化が取り上げられている．しかし，こうした再定式化が可能な幾何学化教材の開発（伊藤，2008；中村，2011；尾川，2018）は多くはない．そこで，本稿では，再定式化が可能な題材として，牛乳パックに着目し，牛乳パックの膨らみの近似に焦点をあてる．

これまでにも，1000ml の牛乳パックを直方体とみて計算すると1000ml に満たない結論になることから，牛乳パックの膨らみに気づいていくという面白さが着目されている（新井，2007；佐藤，2017；芳沢，2020）[6]．新井（2007）には，牛乳パックの膨らみを捉えた上で，底面が正方形である牛乳パックを等周図形の観点から見直し，牛乳パック全体を正六角柱と仮定した考察がなされている．佐藤（2017）には，牛乳パックの膨らみを四角錐や円柱の一部で近似した考察が行われている．本稿においても，牛乳パックの膨らみの近似に焦点をあてる．

本研究の目的は，牛乳パックの膨らみの近似に焦点をあて，再定式化の過程を味わうことができる空間図形教材を開発することである．このために，まず，数学的活動の側面から再定式化の過程を重視することの意義を明らかにする（第２章）．次に，小学校および中学校における教材，高等学校および大学における発展的な教材によって想定される数学的活動を示す（第３章，第４章）．最後に，この教材が持つ教育的価値に関する考察を行う（第５章）．

２．再定式化の過程を重視することについて

(1) 数学的活動の模式図における定式化の過程

教材を開発する際，どのような数学的活動が実現され得るかを検討することが必要となる．また，問題の解決において，児童・生徒の思考過程を想定し，どのような数学的な見方や考え方が必要となるのか，換言すれば，どのような数学的な見方や考え方を養うことができるのかを検討することも必要となる．

そこで，島田（1977）の数学的活動の模式図（図２）[7]を用いて，教材を分析する．この模式図には，現実の世界と数学の世界との関わりが考慮され，定式化の過程が「a. 現実の世界」から「b. 数学の世界」への移行として捉えられている．

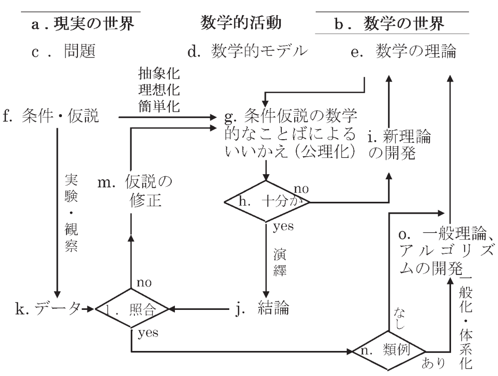


図２．数学的活動の模式図（島田，1977，p. 15）

こうした定式化の過程を重視するとともに，得られた結論を現実に照らして解釈・評価し，モデルの妥当性を検証する過程を重視する．この過程は，上記の数学的活動の模式図に照らすと，「j. 結論」を得てから，「k. データ」と「l. 照合」し，必要に応じて「m. 仮説の修正」を行う過程に該当する．

(2) 再定式化の過程の重視

現実の世界を数学的なモデルで表現していく際，単純化の一つとして近似の考えが用いられる（島田，1990）．近似は二つの段階で生じるという．一つ目は，「数学化する過程の中で，影響の少ないと思われる要因を捨てて，大局的に考える」（島田，1990，p.52）段階である．二つ目は，「一応数学化した後で考える」（島田，1990，p.52）段階である[8]．一つ目の段階においては，「そこからの結果が現実とのズレが大きい場合には，影響が少ないと考えた要因を考えに入れてモデルを修正しなければならない.」（島田，1990，p.52）のである．このため，どのような近似を行うかによって結論が変わり，この結論と現実とを比較して，新たな定式化，すなわち，再定式化を行う必要が生じる．

この近似の考えに関わって，幾何学化に関する研究の一つを振り返ってみる．飯島（1987）には，数学的モデル化過程において，幾何学的な表現方法に関する3つの局面が考察されている．具体的には，「視覚化」，「事象の geometrization」，「数式の geometrization」である．このうちの「事象の geometrization」とは，「物理的現象について，その位置，大きさ，形などだけを抽象し，他の要因を無視して幾何の問題として扱い解決を図る過程」（飯島，1987，p.28）である．この過程は，単純化の一つとしての近似の考えと類似しているとみることができる．本稿では，この「近似の考え」と「事象の geometrization」に着目する．

数学的モデルの表現に注目してみると，「数値的表現」，「図的表現」「グラフ表現」，「代数的表現」がある．事象を数学的モデルとして定式化する際，問題解決の手段が豊富であれば，これらの表現を柔軟に活用して数学的結論を得ることができる．学校数学の重点の一つに，問題解決の手段としての表現のレパートリを豊かにすることが挙げられている．具体的には，「新しいモデル化を考えるときには，既知のモデル化の実例がレパートリとして利用される．数学教育で応用問題を取り上げるねらいの一つは，このレパートリを豊かにすることにあるといってよい.」（島田，1990，p.44）と言われているのである．

特に，中学校や高等学校においては，「代数的表現」が重視されており，現実の世界の問題解決においては関数が重要となる．学校数学において習得される関数は，中学校数学において，中学校１年で比例と反比例，中学校２年で一次関数，中学校３年で二乗に比例する関数であり，各学年に分かれて位置付けられている．また，高等学校においては，「数学Ⅰ」に二次関数，「数学Ⅱ」に指数・対数関数，三角関数が位置付けられている．このように，指導内容としての関数の位置付けが，各学年や科目に分かれているため，問題解決の手段としての関数のレパートリが豊かになるまでには一定の時間を要するのである．換言すれば，ある関数を用いた問題解決の後に，新たな関数を設定してよりよい問題解決を進めようとする際に関数のレパートリの豊かさが問題となるのである．

一方，「図的表現」としての基本的な平面図形や空間図形は，中学校1年までに習得できるように位置付けられている．このため，関数に関するレパートリが増えるよりも前に，「数値的表現」や「図的表現」を現実の世界の問題解決の手段として用いることもできれば，学習者は，問題解決の手段としてのレパートリを豊かに持てたことを実感できるはずである．こうした観点から，教材を開発する際，「代数的表現」による問題解決だけでなく，「数値表現」や「図的表現」による問題解決も想定し，各校種における教材の開発を志向するとともに，中・長期的な期間を通じて再定式化を経験することができる教材の開発を志向する．

３．再定式化の過程を重視した教材：「牛乳パックの幾何学化」

(1) 教材としての牛乳パック

1000ml と表示された牛乳パックは，その形状を観察することにより，直方体と捉えて体積を計算できる（f → g → j）．実際に牛乳パックの直方体（A）とみなせる部分を測定し計算すると，底面は１辺が７cm の正方形であり，高さが19.5cm であるため，容積は，７×７×19.5＝955.5（cm^3）となる．この結論は，牛乳パックの表記とズレがあり（j → l），牛乳パックに1000ml 入っていないのではないかという疑問が生じやすく，児童・生徒の興味・関心を持たせることができる．なお，実際に開封して牛乳の量を測定すると，1000ml よりも少し多い量の牛乳が入っている（f → k）[9]．

長さの測定にミスがあったかもしれないと考えて，もう一度，縦，横，高さを計り直すかもしれないが，測定値に誤りはないことがわかる．そこで，再度，牛乳パックを観察すると，牛乳パックの側面が若干膨らんでいることに気づく．はじめの観察では気づきにくい部分であり，直方体と捉えやすいために暗黙裡に捨象して考えていた部分である．この若干の膨らみを数学的に捉えられれば，開封して牛乳の量を測定しなく

とも計算によって牛乳の量を推定できる（m → g）.

そこで,「1000ml と表記されている牛乳パックの牛乳の量を求める方法を考えよう」という問題の解決に向かう．解決の焦点は，若干の膨らみをどのように近似して捉え数学的に体積を求めるかということである．このとき,「開封して牛乳の量を計ればよいのでは？」というアイデアが児童・生徒から出れば，それを肯定的に受け止めつつ，改めて，問題を「1000ml と表記されている牛乳パックの体積を，開封せずに求める方法を考えよう」と改善することとする.

以下では，学校種毎に既習事項を活用した問題解決を具体的に示す.

(2) 算数の既習事項による定式化と求積

①直方体による膨らみの幾何学化

小学校においては，膨らんだ部分を既習の図形を用いて近似的に捉えることが考えられる．具体的には，膨らんだ部分の体積も直方体で捉える（f → g）.

注ぎ口が上部になるように牛乳パックを置いたとき，各側面に，側面積よりも一回り小さい長方形を底面とする高さ h の直方体が付いているとみて（図３），この直方体が４面分あるとして計算する（g → j）.

図3．膨らみを直方体とみる

最も膨らんでいる部分を観察から特定し，牛乳パックの側面からの高さ h を含む膨らみの幅を測定する（f → k）．測定の結果，賞味期限の７日前のもので75.90mm，４日前のもので77.79mm であった（図４）.

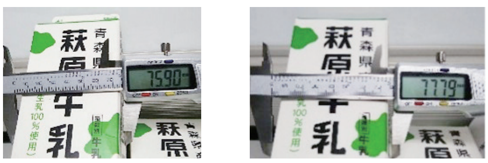


図４．膨らみの幅の測定

そこで，高さ h を0.3cm とし横18cm，縦６cm とすると，膨らみ部分の体積の近似値は，18×6×0.3×4＝129.6（cm^3），牛乳パックの体積の近似値は1085.1cm^3となる.

②三角柱による膨らみの幾何学化

膨らんだ部分の体積を直方体の代わりに三角柱で捉えることも考えられる（f → g）．図５のように膨らんだ部分の体積を，底辺７cm，高さ0.3cm の三角形を底面とする高さ19.5cm の三角柱とみる．7×0.3×0.5×19.5×4＝81.9（cm^3）と求められる（g → j）．この結論と，直方体（A）を合わせると，牛乳パックの体積の近似値は1037.4cm^3となる.

図５．膨らみを三角柱とみる

③直方体の組み合わせによる膨らみの幾何学化

図６のように，膨らみをいくつかの直方体の和と捉えることも考えられる（f → g）．例えば，膨らみ部分を，直方体（大）：18×6×0.1，直方体（中）：12×4×0.1，直方体（小）：6×2×0.1の和と近似すると，膨らみ部分の体積の近似値は16.8cm^3となり，この４つ分と直方体（A）の体積の和から，1022.7cm^3と求められる（g → j）．このように，膨らみの部分は曲面であるが，複数の直方体を重ねて近似を考えることができる.

図６．膨らみを複数の直方体で捉える

(3) 中学校数学の既習事項による定式化と求積

①四角錐による膨らみの幾何学化

中学校においては，既習の図形として錐体を用いて膨らんだ部分を近似的に捉えられる（f → g）．牛乳パックの側面上に，高さ0.3cm の四角錐が載っていると捉える（図７）．このとき，４つの四角錐の体積は，７×19.5×0.3×1/3×4＝54.6（cm^3）と計算できる（g → j）．したがって，牛乳パックの体積の近似値は1010.1cm^3となる.

図７．膨らみを四角錐で捉える

②円柱の一部による膨らみの幾何学化

牛乳パックの側面上に，円柱の一部が付いていると捉え（図８），近似することもできる（f → g）.

図８．膨らみ部分を円柱の一部とみる

このため，次の図のように，７cm の線分 AB をかき，その垂直二等分線を作図する（図９）．この線上にコンパスの針を置き，点 A と点 B を通る円をいくつか書いてみる．すると，円の半径が約20cm のとき

に，線分と円弧との間が0.3cm となることがわかる．このときの扇形の面積（20×20×3.14×20/360≒70（cm^2））から二等辺三角形の面積（7×19.7×1/2＝68.95（cm^2））を引くことで，線分と円弧で囲まれた部分の面積が1.05cm^{2}とわかる．よって，膨らみ部分の体積は，1.05×19.5×4=81.9（cm^3）となり，牛乳パックの体積の近似値は1037.4cm^{3}と求まる（g → j）．

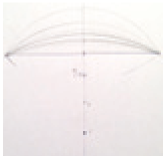


図９．半径の特定

近似に用いる図形が異なることによって，結論が変わることを経験できるのである．

４．再定式化の過程を重視した教材：「牛乳パックの幾何学化の発展」

（1）高等学校数学の既習事項による定式化と求積

以下では，高等学校の２，３年生が，牛乳パックの膨らんだ部分の体積を，高等学校の既習事項を利用して求めるための考察を行う．中学校の四角錐による膨らみの幾何学化を発展させ，滑らかな曲面による定式化を試みる（m → g）．

ここでは扱いやすい二次関数を利用した曲面の近似を考える．牛乳パックの一つの側面について，図10のように，直方体部分から膨らんだ部分の立体Ｍの体積をV_0とする．以下のように単純化を行い，立体Ｍの断面に現れる曲線が二次関数のグラフで近似できると仮定することで，高等学校数学の既習事項を用いて解くことができる問題に帰着する（f → g）．

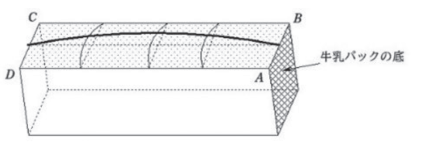


図10．牛乳パックの単純化

①仮定の設定

線分 AB の中点と線分 CD の中点を通り，かつ平面 ABCD に垂直な平面を平面αとする（図11）．

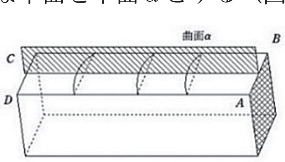


図11．平面αの設定

平面αで切った立体Ｍの断面上部の曲線をmとする（図12）．この曲線mが二次関数のグラフで近似できると仮定する．その二次関数のグラフについて，両端は同じ高さに固定されているので，頂点は両端を結ぶ線分の中点の真上にある．

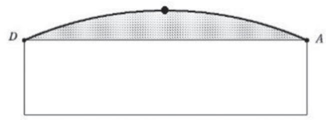


図12．牛乳パックを平面αで切った断面

一方，立体Ｍを牛乳パックの底に平行となるどの面で切っても，その断面上部の曲線は，二次関数のグラフで近似できると仮定する（図13）．それらの二次関数のグラフの頂点は，すべて曲線m上にある．

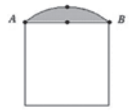
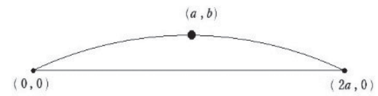


図13．曲面部分を牛乳パックの底方向から見た図

②定式化の過程

以上の仮定の下，立体Ｍの断面に現れる曲線の近似式を求める（g → j）．以下，牛乳パックの高さを$2a$，正方形の底面の１辺の長さを$2c$とおく．

まず曲線mの式を求める．仮定より，xy平面上の３点（0,0），(a,b)，$(2a,0)$を通る二次関数を求めればよい．ただし，$a>0$，$b>0$とする．



この二次関数を$y=px^2+qx+r$とおくと，３点をとることから，p,q,rの連立方程式

$$\begin{cases} r=0 \\ pa^2+qa+r=b \\ 4pa^2+2qa+r=0 \end{cases}$$

が成り立つ．$a\neq 0$に注意して，連立方程式を解くと，

$$p=-\frac{b}{a^2},\qquad q=\frac{2b}{a},\qquad r=0.$$

したがって，曲線mの式は

$$y=-\frac{b}{a^2}x^2+\frac{2b}{a}x$$

である．

次に牛乳パックの底からt(cm) 離れた点で底に平行な面で切った立体Ｍの断面上部に現れる曲線uの式を求める．仮定より，xy平面上の３点$(-c,0),(c,0),(0,\frac{-b}{a^2}t^2+\frac{2b}{a}t)$を通る二次関数を求めればよい．求める二次関数を$y=px^2+qx+r$とおくと，曲線$m$の場合と同様にして，$p,q,r$の連立方程式

$$\begin{cases} pc^2 - qc + r = 0 \\ pc^2 + qc + r = 0 \\ r = \dfrac{-b}{a^2}t^2 + \dfrac{2b}{a}t \end{cases}$$

から

$$p = \frac{-r}{c^2} = \frac{b}{a^2c^2}(t^2 - 2at), \quad q = 0,$$

$$r = -\frac{b}{a^2}(t^2 - 2at)$$

を得る．したがって求める曲線 u の式は，

$$y = \frac{b}{a^2c^2}(t^2 - 2at)x^2 - \frac{b}{a^2}(t^2 - 2at)$$

である．

③近似式の利用による求積

図14のように牛乳パックの底から t(cm) 離れた点で底に平行な面で切った立体 M の断面積 $S(t)$ を求め，t について $S(t)$ を積分すれば体積 V_0 が求まる（g→j）．

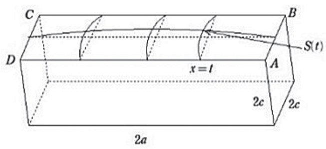


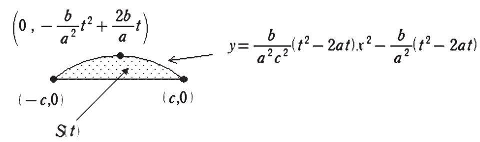
図14．膨らんだ部分の切断面 $S(t)$

断面 $S(t)$ は，曲線 u の積分から求められる．

$$S(t) = \int_{-c}^{c}\left\{\frac{b}{a^2c^2}(t^2 - 2at)x^2 - \frac{b}{a^2}(t^2 - 2at)\right\}dx$$

$$= 2\left[\frac{b}{3a^2c^2}(t^2 - 2at)x^3 - \frac{b}{a^2}(t^2 - 2at)x\right]_0^c$$

$$= \frac{-4bc}{3a^2}(t^2 - 2at)$$



よって，膨らんだ部分の体積 V_0 は

$$V_0 = \int_0^{2a} S(t)dt = \frac{-4bc}{3a^2}\left[\frac{t^3}{3} - at^2\right]_0^{2a} = \frac{16abc}{9}$$

である．

以上の式から，$2a=19.5$, $b=0.3$, $2c=7$（単位 cm）として，牛乳パックの体積 V を求める（j→l）．ただし，$2a$ は牛乳パックの高さ，b は牛乳パックの側面で膨らみが1番高くなっている場所の高さ，c は牛乳パックの底面の１辺の長さの半分とする（図15）．牛乳パックの体積 V は，直方体の部分の体積と膨らんだ部分の体積 V_0 を４倍したものの和である．したがって，

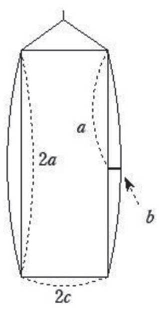


図15．記号の整理

$$V = 8ac^2 + \frac{64abc}{9} = \frac{8}{9}ac(8b + 9c).$$

これに a から c の値を代入すると，牛乳パックの体積 V は，およそ1028cm^{3}である．

曲面の近似について，上記では二次関数を利用したが，高等学校の３年生であれば，三次関数や指数関数なども利用できる．様々な関数を利用することによって，再定式化を経験することもできる（m→g）．

（2）大学数学の既習事項による定式化と求積

高等学校数学の既習事項による定式化では，二次関数を利用して曲面を捉えている．その場合，牛乳パックの側面で膨らみが最も高くなる点 P は，長方形 ABCD の重心となる．しかし，実際の牛乳パックには，注ぎ口が上部になるように置いたとき，点 P の位置が重心より２cm ほど下方へずれているものがあることが実測からわかる（f→k）．その現象を踏まえて仮定を修正する場合，二次関数以外を利用することが考えられる（m→g）．しかし，二次関数から三次関数へ拡張するように，より高度な関数を扱うほど，定式化の過程における計算が煩雑になる．そこで，大学数学の行列，多変数関数における偏微分・重積分といった理論を用いる（h→e）．

①仮定の設定

牛乳パックの一つの側面の長方形 ABCD に対して，横と縦の長さをそれぞれ d_1, d_2 ($d_1, d_2 > 0$) とする．また，図16のように長方形 ABCD の頂点の一つを原点とし，横と縦の直交する２辺に沿って x 軸と y 軸をとる．

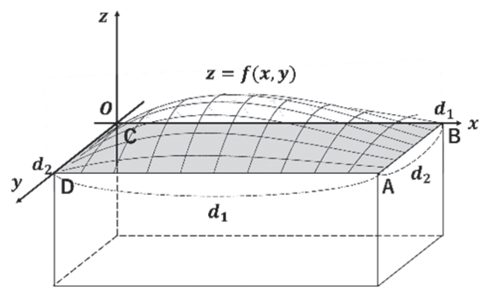


図16．牛乳パックの膨らみの３次元表示

一方， 点 (x,y) における牛乳パックの膨らみの高さを $f(x, y)$ とする．また，以下のように単純化して，仮定を設定する（f→g）．

（仮定１） 牛乳パックの辺上の膨らみはない．つまり，

$$f(0, y) = 0, \quad f(x, 0) = 0,$$
$$f(d_1, y) = 0, \quad f(x, d_2) = 0,$$
$$0 \le x \le d_1, \quad 0 \le y \le d_2.$$

（仮定２）牛乳パックの側面は外側に膨らんでいる．つまり，

$$f(x,y) \geq 0,\quad 0 \leq x \leq d_1,\quad 0 \leq y \leq d_2.$$

（仮定３）点(x_0, y_0)における膨らみの高さは，（局所的に）最大である．つまり$f(x,y)$ は，点（x_0, y_0）で極大値z_0をとる．ただし，$0<x_0<d_1, 0<y_0<d_2, 0<z_0$とする．

（仮定４）$f(x,y)$は，xとyに関する次数５以下の多項式関数で近似できる．

（仮定４）について，高等学校数学の既習事項による定式化では，$f(x, y)$が次数４の多項式関数で近似できると仮定していたことになる．また，$f(x, y)$が次数５以下の多項式関数であると仮定することにより，大学数学の既習事項である行列や偏微分・重積分の理論を用いて解くことができる問題に帰着する（e→g）．

②定式化の過程

以上の仮定のもと，$f(x,y)$を求める(g→j)．まず（仮定１）と（仮定４）より，$f(x,y)$は

$$f(x,y) = xy(x-d_1)(y-d_2)(px+qy+r),$$
$$0 \leq x \leq d_1,\quad 0 \leq y \leq d_2$$

と表すことができる．ただし，p, q, rは定数である．次に（仮定３）より，$z_0 = f(x_0, y_0)$．すなわち

$$px_0 + qy_0 + r = \widehat{z_0} \quad ・・・ \quad (1.1)$$

$$\widehat{z_0} = \frac{z_0}{x_0 y_0 (d_1 - x_0)(d_2 - y_0)}$$

が成り立つ．さらに$f(x, y)$は点(x_0, y_0)で極値をとることから，x, yに関する$f(x, y)$の偏導関数$f_x(x, y), f_y(x, y)$において，

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

が成り立つ．これより，p,q,rの方程式

$$x_0(3x_0 - 2d_1)p + y_0(2x_0 - d_1)q + (2x_0 - d_1)r$$
$$= 0 \quad ・・・ \quad (1.2)$$
$$x_0(2y_0 - d_2)p + y_0(3y_0 - 2d_2)q + (2y_0 - d_2)r$$
$$= 0 \quad ・・・ \quad (1.3)$$

が成り立つ．ここで行列Aを

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_0(3x_0 - 2d_1) & y_0(2x_0 - d_1) & 2x_0 - d_1 \\ x_0(2y_0 - d_2) & y_0(3y_0 - 2d_2) & 2y_0 - d_2 \end{bmatrix}$$

と定めると，(1.1), (1.2), (1.3)を満たすp, q, rの連立一次方程式は，

$$A \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{z_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と表すことができる．Aの行列式$\det A$は，

$$\det A = x_0 y_0 (d_1 - x_0)(d_2 - y_0)$$

であり，特に$\det A \neq 0$．Aの逆行列A^{-1}が存在し，

$$A^{-1} =$$
$$\begin{bmatrix} \frac{2x_0 - d_1}{x_0(d_1 - x_0)} & -\frac{1}{x_0(d_1 - x_0)} & 0 \\ \frac{2y_0 - d_2}{y_0(d_2 - y_0)} & 0 & -\frac{1}{y_0(d_2 - y_0)} \\ \frac{5x_0y_0 - 4d_2x_0 - 4d_1y_0 + 3d_1d_2}{(d_1 - x_0)(d_2 - y_0)} & \frac{1}{d_1 - x_0} & \frac{1}{d_2 - y_0} \end{bmatrix}$$

したがって

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{z_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2x_0 - d_1}{x_0(d_1 - x_0)} \widehat{z_0} \\ \frac{2y_0 - d_2}{y_0(d_2 - y_0)} \widehat{z_0} \\ \frac{5x_0y_0 - 4d_2x_0 - 4d_1y_0 + 3d_1d_2}{(d_1 - x_0)(d_2 - y_0)} \widehat{z_0} \end{bmatrix}$$

$$・・・ \quad (1.4)$$

式(1.4)で定めたp, q, rについて，$f(x, y)$が点(x_0, y_0)で極大値をとる（極小値をとらない，峠にならない）ことを確かめる必要がある．$f(x, y)$の第２次偏導関数を

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\quad f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

とおくと，

$$f_{xx}(x_0, y_0) = 2y_0(y_0 - d_2)\left(\frac{d_1^2}{x_0(d_1 - x_0)} - 3\right)\widehat{z_0},$$

$$f_{yy}(x_0, y_0) = 2x_0(x_0 - d_1)\left(\frac{d_2^2}{y_0(d_2 - y_0)} - 3\right)\widehat{z_0},$$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = -(2x_0 - d_1)(2y_0 - d_2)\widehat{z_0}.$$

$f(x, y)$はC^2級関数であるから，

$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0,$$

$$\left(f_{xy}(x_0, y_0)\right)^2 - f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) < 0$$

を満たすとき，$f(x, y)$は点(x_0, y_0)で極大値をとる．実際，

$$0 < y_0 < d_2,\quad \widehat{z_0} > 0,\quad \frac{d_1^2}{x_0(d_1 - x_0)} - 3 \geq 1$$

であることに注意すると$f_{xx}(x_0, y_0) < 0$を得る．一方，$0 \leq x \leq d_1, 0 \leq y \leq d_2$において，関数

$$g(x,y) = (2x - d_1)^2(2y - d_2)^2$$
$$-4\left(d_1^2 - 3x(d_1 - x)\right)\left(d_2^2 - 3y(d_2 - y)\right)$$

は，$x = \frac{d_1}{2}, y = \frac{d_2}{2}$のとき，最大値$-\frac{d_1^2 d_2^2}{4}$をとることから，

$$\left(f_{xy}(x_0,y_0)\right)^2 - f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)$$
$$= g(x_0,y_0)\widehat{z_0}^{\,2} \le -\frac{d_1^2 d_2^2}{4}\widehat{z_0}^{\,2} < 0$$

を得る．以上の考察より $f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で極大値をとることがわかる．

また式(1.4)で定めた p, q, r について，（仮定２）を満たすか否かについて確かめる．今，原点をとりかえることで，$\frac{1}{2}d_1 \le x < d_1$，$\frac{1}{2}d_2 \le y < d_2$ と考えてよい．このとき $p \ge 0, q \ge 0$ であるから，（仮定２）を満たすには，$r \ge 0$，すなわち

$$5x_0y_0 - 4d_2x_0 - 4d_1y_0 + 3d_1d_2 \ge 0 \quad \cdots \quad (1.5)$$

であればよい．例えば，$\frac{1}{2}d_1 \le x_0 \le \frac{2}{3}d_1$，$y_0 = \frac{1}{2}d_2$ のとき，不等式(1.5)は成り立つ．しかし，$x_0 = \frac{4}{5}d_1$，$y_0 = \frac{1}{2}d_2$ のとき，不等式(1.5)は成り立たない．つまり，（仮定１）から（仮定３）をすべて満たす牛乳パックの膨らみについて，長方形 ABCD の重心から遠く離れた位置で最も高くなるようなものは，次数５以下の多項式で表すことが一般にできない．その場合，仮定の修正が必要である(l→m)．

③近似式の利用による求積

以下，$f(x, y)$ は（仮定１）から（仮定４）を満たすとする．このとき，牛乳パックの一つの側面の膨らみ部分の体積 V_0は，反復積分で求められる(g→j)．

$$V_0 = \int_0^{d_2}\left(\int_0^{d_1} f(x,y)dx\right)dy$$
$$= \frac{d_1^3 d_2^3}{72}(pd_1 + qd_2 + 2r)$$
$$= \frac{10x_0y_0(d_1-x_0)(d_2-y_0) - d_2^2x_0(d_1-x_0) - d_1^2y_0(d_2-y_0)}{72x_0^2y_0^2(d_1-x_0)^2(d_2-y_0)^2} d_1^3d_2^3z_0$$

$d_1 = 19.5,\ d_2 = 7,\ x_0 = 12,\ y_0 = 3.5,\ z_0 = 0.3$（単位 cm）のときの牛乳パックの体積の近似値 $V = 19.5\times 7^2 + 4V_0$ は，およそ1023.7cm^{3}である(j→l)．

上記と同様にして，（仮定４）で $f(x, y)$ が次数６以上の多項式関数で近似できると修正した場合でも，(x_0, y_0) 以外の点での高さなどがいくつかわかれば，求めることができる(m→g)．また，上述の理論が適用できる関数は多項式関数だけはないことから，$f(x, y)$ を様々な関数に置き換えて求めることもできる(n→o)．ただし，その関数が描く曲面がどのようなものになるのかについては，凸性を調べたり，グラフを作成したりして確認する必要がある(l→m)．

５．考察

(1) 単純化の過程の重要性と困難性

上記では２つの教材が開発され，数学的活動の模式図に照らした問題解決の過程が示された．いずれの問題解決においても，自己の解決手段としてのレパートリに対して，解決可能な数学的モデルに単純化することが重要であった．

「牛乳パックの幾何学化」教材においては，「図的表現」が中心的に用いられた．まず，牛乳パック全体を直方体で捉えた問題解決が行われた．この考察では，1000ml に満たない量の牛乳しか入っていないという結論となるため，直方体を数学的モデルとすることが妥当ではないという判断を下しやすかった．次に，牛乳パック全体を直方体と捉えることに加えて，牛乳パックの膨らみを直方体や三角柱，四角錐，円柱の一部といった図形で捉えた問題解決が行われた．この結果，1000ml よりも少し多い量の牛乳が入っているという結論が得られた．牛乳パックの膨らみの存在を認め，それを既習の図形に置き換えるという単純化が問題解決における重要な部分であった．

「牛乳パックの幾何学化の発展」教材においては，「代数的表現」が中心的に用いられ，「図的表現」は「代数的表現」を用いるための手段として用いられていた．まず，高等学校数学の範囲内で単純化することを考え，牛乳パックの膨らみを関数で近似し，積分を用いた問題解決が行われた．曲面を牛乳パックの側面方向からみた曲線と捉え，この曲線を既習の範囲内において比較的扱いやすい二次関数で近似し，さらに，牛乳パックの底面方向からみた断面積を表現し，この断面積の総和を考えて膨らみの体積を求めた．次に，大学数学の範囲内で単純化することを考え，より高次の関数で近似し，偏微分および重積分に関する理論を用いた問題解決が行われた．曲面を次数5以下の多項式関数で近似できると仮定することにより，大学数学の既習事項を用いて解く問題に帰着することができた．

一方，牛乳パックの膨らみという平面と曲面で囲まれた事象を考察の対象としたとき，児童・生徒にとって，例えば，平面で囲まれた図形に置き換えて考えることに困難性を感じることも考えられる．また，生徒は，例えば，二次関数や積分が既習であったとしても，これらとともに「図的表現」も用いて問題解決を進めることに困難を感じることも考えられる．実際，事象を理想化・単純化して図に表し，それを用いて現

実世界の問題を解決することに課題があることが調査研究（国立教育政策研究所研究課程研究センター，2010，2014）[10] や実践研究（西村，2003b；本田・西村，2005；裕元，2007）から明らかにされてきている．

こうした子どもの実態に対し，少なくとも学校数学の図形領域や関数領域において，「数学化する過程の中で，影響の少ないと思われる要因を捨てて，大局的に考える」（島田，1990，p.52）という「近似の考え」を用いられる問題解決場面を充実させていくことが考えられる．特に，これまでにも図形領域の充実[11] が検討されているものの，今日の数学教育においても問題解決を中心とした図形領域の改革という点に課題がある．本教材の実践を志向することに留まらず，「事象の geometrization」が必要となる場面が生じるような様々な数学的問題解決過程の中で，「近似の考え」の育成の必要性が示唆される．

(2) 再定式化の過程を経験することの価値

本稿では，定式化の過程を重視するとともに，得られた結論を現実に照らして解釈・評価し，モデルの妥当性を検証する過程を重視し，これらの過程を経験することのできる教材の開発を志向した．それは，例えば，太田（1995）の実践において，「現実の問題を扱う場合には，このように理想化・単純化する過程をたどらせることと，それによって得られた数学的な解を現実に戻しながら検討し，モデルの妥当性を確認したり，必要に応じてモデルを修正したりする活動が必要になる．このような活動なしには，（中略）現実の問題のモデルとなっていたのかどうかがわからないからである」（太田，1995，p.39，中略は引用者）という知見があったからである．

本稿の「牛乳パックの幾何学化」と「牛乳パックの幾何学化の発展」教材は，数学的結論は1つに定まるものの，単純化の仕方によって結論が異なることを経験できるとともに，数学的モデルの妥当性を確認し，よりよい数学的モデルを用いて問題解決することを経験できる教材であった．これらの教材には，「答えが出てから考えること」（杉山，2012，pp.163-166）[12] が含まれ，問題解決における仮定や方法を振り返って検証し，改善を図る活動がある（図17，18）．長期的には，「①直方体による牛乳パック全体の幾何学化」，「②四角錐などによる牛乳パックの膨らみの幾何学化」，「③二次関数による牛乳パックの膨らみの近似」，「④多項式関数による牛乳パックの膨らみの近似」と

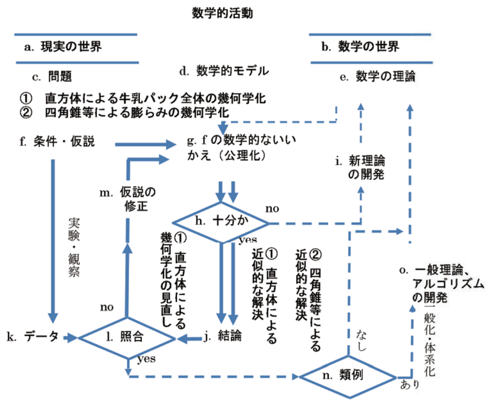


図17.「牛乳パックの幾何学化」による活動

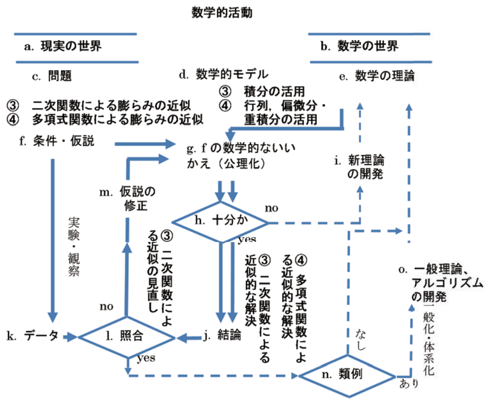


図18.「牛乳パックの幾何学化の発展」による活動

いう４つの定式化の過程を経験できる．

問題解決のための関数のレパートリが豊かになれば，様々な数学的モデルを構築することができる．ただし，その数学的モデルを用いて，解決したい問題を数学の問題（計算したり，解いたりできるもの）に帰着させなければ，問題解決の手段として確立することはできない．例えば，「牛乳パックの幾何学化の発展」教材における牛乳パックの膨らみの現象の定式化では，次数の低い多項式関数から考え始めることにより，解くことができる数学の問題に帰着させ，膨らみの体積を求めた．また，その際に用いた理論を適用できる関数は，次数の低い多項式関数だけではない．そのことを学んでいる高校生や大学生は，よりよい定式化を求めて試行錯誤することもできるであろう．

次数の低い多項式関数から考え始めるという発想は，換言すれば，まずは高等学校までに学ぶような扱いやすい関数で定式化するということである．現象が複雑になるほど，その本質を捉えて単純な関数で定式化することは難しい．しかし，複雑な現象に対して，大学数学における一般化された理論を活用するにしても，定式化の出発点となるのは，高等学校までに学んだ考え方にあることが本研究で確認できた．このこと

から，同一の問題場面に対して複数の定式化の過程を経験することは，複雑な現象を捉える際に役立つことが期待できる。

６．まとめと今後の課題

本研究の目的は，牛乳パックの膨らみの近似に焦点をあて，再定式化の過程を味わうことができる空間図形教材を開発することであった．このために，校種毎に異なる定式化の過程を示し，学習者が再定式化の過程を経験することの価値に関する考察を行った．

この結果，「牛乳パックの幾何学化」教材と「牛乳パックの幾何学化の発展」教材が開発された．前者の教材では，児童が，牛乳パック全体を直方体で捉え，得られた結論を現実に照らして解釈・評価する過程，および，牛乳パックの膨らみを直方体や三角柱で捉えて新たな結論を得る過程を味わうことができる．中学校の生徒は，小学校での経験に加えて，牛乳パックの膨らみを四角錐で捉える過程や作図によって円の半径を特定し円柱の一部で捉えて結論を得る過程を味わうことができる．後者の教材では，高等学校の生徒が，牛乳パックの膨らみを二次関数で近似し，積分を利用して結論を得る過程を味わうことができる．多変数関数における偏微分や重積分を学んだ大学生であれば，偏微分や重積分に関する理論を適用できる関数で近似して結論を得る過程を味わうことができる．今後の課題は，開発された教材の実践による効果を明らかにすることである．

引用・参考文献

１）大澤弘典（1996）．「現実場面に基づく問題解決－グラフ電卓を利用した合科授業展開を通して－」，日本数学教育学会誌 数学教育78-9，pp.16-20．西村圭一（2001）．「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」，日本数学教育学会誌83-11，pp.2-12．西村圭一（2012）．「数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究」，東洋館出版社．清野辰彦（2005）．「数学的モデル化における「仮定の意識化」の役割－レポート分析を通して－」，日本数学教育学会誌 数学教育87-7，pp.2-12．清野辰彦（2015）．「「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導－「比例とみなす」見方に焦点をあてて－」，日本数学教育学会誌 数学教育学論究臨時増刊97，pp.105-112．福嶋卓海(2021)．「行列を用いた数学的モデル化の教材開発に関する研究－推移確率行列に焦点をあてて－」，日本数学教育学会誌 数学教育103-7，pp.13-21．

２）三輪辰郎（1983）．「数学教育におけるモデル化についての一考察」，筑波数学教育研究，2，pp.117-125．

３）中村光一（2011）．「缶の問題を用いた数学的モデル化過程に関する考察」，日本数学教育学会誌 数学教育93-7，pp.2-11．

４）島田茂（1990）．「教師のための問題集」．共立出版．

５）飯島康之（1986）．「数学的探究における「可能性」について - 幾何学化に焦点を当てて -」，筑波数学教育研究，5，pp.1-11．飯島康之（1987）．「数学的モデル化における geometrization について」，日本数学教育学会 数学教育学論究，47･48，pp.27-30．太田伸也（1995）．「数学的モデルをつくる活動を採り入れた授業についての一考察－「カーブしている駅のホームと電車との隙間の問題」を題材として－」，学芸大数学教育研究，7，pp.31-39．西村圭一（2003a）．「数学的モデル化を取り入れた発展的な学習の授業実践－紙パックジュースを題材に－」，日本数学教育学会誌85-11，pp.31-39．西村圭一（2003b）．「幾何学化をめざす授業の研究」．科学教育研究，27-3，pp.223-231．西村圭一（2008）．「数学的モデル化を遂行する力の育成をめざす教材の開発－事象の幾何学化に焦点をあてて－」，教材学研究，19，pp.171-178．本田千春・西村圭一（2005）．「空間思考力の育成を目指す授業に関する研究－地図から風景をスケッチする教材を用いて－」．日本数学教育学会誌87-7，pp.13-20．[illegible]元新一郎（2007）．「数学的モデル化過程における幾何学化の困難性とその克服の方策」．日本科学教育学会年会論文集，31，pp.211-214．伊藤香織（2008）．「幾何学化による数学的モデル化教材の開発に関する一考察」，数学教育論文発表会論文集41，255-260．佐藤洋晟（2017）．「幾何学化に焦点を当てた数学的モデル化教材の開発に関する考察」．弘前大学教育学部数学教育研究室 卒業論文集（未刊行），pp.128-155．上村健斗（2017）．「「スーパームーン」の日を予測する教材の意義」．日本数学教育学会誌，99-11，pp.2-11．尾川洋一（2018）．「「再定式化」を重視した幾何学化の教材開発に関する研究」．秋期研究大会発表集録，51，pp.321-324．本田千春（2019）．「社会的文脈における問題を幾何学化し解決する力を育む教材の開発」．教材学研究，30，pp.53-60．清野辰彦（2021）．「数学的モデル化における幾何学化の一考察－「倉庫配置問題」を例にして－」．太田伸也先生ご退職記念論文集編集委員会，数学教育学における教材研究の真価（pp.181-191）．東洋館出版社．

６）新井紀子（2007）．「こんどこそ！わかる数学」．岩波書店．芳沢光雄（2020）「AI 時代に生きる数学力の鍛え方 思考力を高める学びとは」．東洋経済新報社．この他，飯島康之先生もこの教材に着目している．
http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/math_inquiry/milk_pack-01.htm

７）島田茂編著（1977）．「算数・数学科のオープンエンドアプローチ－授業改善への新しい提案－」，みずうみ書房．

８）島田茂（1990）．「教師のための問題集」，共立出版．

９）筆者らの実測による．

10）国立教育政策研究所教育課程研究センター（2010）.「平成22年度 全国学力・学習状況調査解説資料 中学校数学」.
https://www.nier.go.jp/10chousa/10kaisetsu_chuu_suugaku.pdf（2023年12月31日取得）
国立教育政策研究所教育課程研究センター（2014）.「平成26年度 全国学力・学習状況調査解説資料 中学校数学」.
https://www.nier.go.jp/14chousa/pdf/14kaisetsu_chuu_suugaku.pdf（2023年12月31日取得）
11）松尾七重（2001）.「我が国の数学教育における図形領域の特徴」. 千葉大学教育学部研究紀要 . I，教育科学編49，pp.97-108.
12）杉山吉茂（2012）.『確かな算数・数学教育をもとめて』. 東洋館出版社.

（2024. 1 . 10 受理）