

## 斜面を転がる球の運動の物理学的考察

### A Study of the Motion of Spheres Rolling down Slopes

山本 逸郎\*・古川由美子\*\*

Itsuro YAMAMOTO\*・Yumiko KOGAWA\*\*

#### 【論文要旨】

高校物理において等加速度直線運動を調べる実験の一つとして、斜面を転がる球の加速度を導出する実験が設定されている。また、斜面を転がる球の運動を利用した実験は、小学校および中学校における理科実験にも現れる。本研究では、アルミレールとプラスチックレール、鉄球とプラスチック球を組み合わせ、斜面を転がる球の加速度の角度依存性を測定した。球は始めすべらずに転がるが、ある角度を境に転がりながらすべりだす。得られた実験結果を詳しく解析し、斜面を転がる球の運動を考察した。

キーワード：高校物理力学分野，等加速度直線運動，斜面を転がる球の加速度，球の回転運動

#### § 1. はじめに

高校物理の教科書において、等加速度直線運動に関する様々な実験が記載されている。それらを大別すると、

- (1) 自由落下
- (2) 水平面上の物体の運動
- (3) 斜面上の物体の運動

に分類される。

(1) 自由落下の実験<sup>1)</sup>では、紙テープを取り付けたおもりを自由落下させ、記録タイマーによる打点を解析することによって重力加速度  $g$  を導出する。(2) 水平面上の物体の運動の実験<sup>2)</sup>では、水平面上の力学台車をゴムひも等を使って一定の力で引っ張り、力学台車の加速度  $a$  を導出する。この実験は、引っ張る力の大きさや力学台車の質量を変えることによって、ニュートンの運動の第2法則の検証実験としても設定される。(3) 斜面上の物体の運動の実験は、さらに、力学台車を使った実験<sup>3, 4)</sup>と球を使った実験<sup>5-8)</sup>に分類される。本研究では、後者の斜面上の球の運動の実験を取り上げる。

図1に、文献5)に記載されている実験装置の図を示す。ステンレス製カーテンレールに沿って鉄球を転がしながら、一定の距離  $x$  を転がる時間  $t$  をストップウォッチで測定する。距離  $x$  を変えることによって得られた  $x-t^2$  グラフの傾きから球の加速度  $a$  を導出し、さらに、重力加速度の斜面平行成分  $g\sin\theta$  との比較が考察される。文献6, 7)の実験も、測定方法および解析方法に若干の違いがあるが、速さと時間の関係を表す  $v-t$  グ

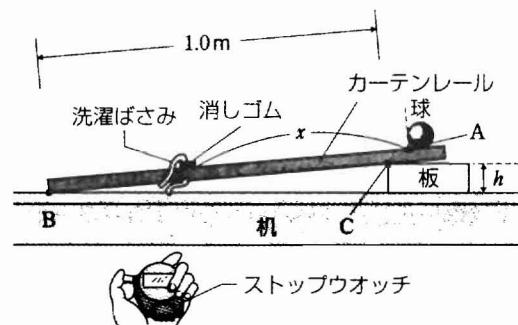


図1 高校物理の教科書に記載されている斜面上の球の運動の実験。文献5)より転載

\* 弘前大学教育学部理科教育講座

Department of Science Education, Faculty of Education, Hirosaki University

\*\* 2006年3月，弘前大学教育学部学校教育教員養成課程小学校教育専攻卒業

Graduation from Training Course for Primary School Teachers, Teacher Training Division, Faculty of Education, Hirosaki University in March 2006

ラフの傾きから加速度  $a$  を導出する。

等加速度直線運動を調べることが実験の目的でなくても、実験装置の一部に斜面を転がる球を利用した実験も見られる。例えば、水平投射の実験<sup>9)</sup>では、球の初速度を与えるためにレールの斜面に沿って球を転がす。運動量保存則を検証するための平面内の2球の衝突実験<sup>10)</sup>では、斜面を転がした球をもう一つの球に斜め衝突させ、さらに、水平投射を組み合わせて到達距離を測定する。このように、高校物理の力学分野の様々な実験に斜面を転がる球の運動が関係する。

高校物理に限らず斜面を転がる球の運動は、小学校および中学校の理科の実験にも現れる。すなわち、小学校理科5年「おもりのはたらき」の単元では、斜面を転がる球をもう一つの球に正面衝突させ、当てられた球が飛んだ距離を調べる実験<sup>11)</sup>や斜面を転がる球を木片等に衝突させ、木片の動いた距離を調べる実験<sup>12-14)</sup>が記載されている。中学校理科においても第1分野「エネルギー」の単元の中で、高い位置にある物体がもつ位置エネルギーを調べる実験<sup>15-17)</sup>として、小学校理科と同様の斜面を転がる球を木片に衝突させる実験が設定されている。

筆者ら<sup>18)</sup>は、以前、小学校と中学校の理科教科書に記載されている斜面を転がる球を木片に衝突させる実験について、詳しい測定と解析を行い、その結果を報告した。その中で、斜面を転がる球の衝突直前の速さが理論値と測定値で異なる等、いくつかの疑問点が生じた。それ故、斜面を転がる球の運動そのものを詳しく調べる必要性を感じたのが本研究を始めた動機である。なお、本研究の内容は、小中高の理科および物理教員が斜面を転がる球の運動が関係する実験の教材研究を行う際の資料として活用されることを想定しているので、物理量や式の説明をできるだけ丁寧に記述することにする。

## § 2. 実験方法

図2(a)に本研究で使用した実験装置<sup>19)</sup>の写真を、図3に実験装置の模式図を示す。斜面は、反りのない化粧棚板(サイズ17mm×250mm×900mm)に両面テープで長さ1mのレールを貼り付けて構成し、レールの溝に沿って球を転がした。板の一端を下から3種類のラボジャッキで持ち上げ、それぞれのラボジャッキの高さを変えることによって、斜面の角度 $\theta$ を約 $1.5^\circ$ から約 $52^\circ$ までの13段階に調節した。レール上の50cm離れた2点A、Bに速度測定器(ピースピ)を取り付け、A点からさらに20cm上方にL字金具を取り付け、球のスタート点とした。球は、スタート点から初速度ゼロになるように静かに転がした。写真には示していないが、レールの下端には、転がってきた球のストッパーとして安全おもりを置いた。また、角度が大きいときは、板がずれないように下端をレンガで押さえた。

レールは、溝の内幅の異なる3種類のアルミU形アングル(以後、アルミレールと呼ぶ)と2種類の電線カバー用プラスチックモール(以後、プラスチックレールと呼ぶ)を使用した。図2(b)に実験で使用したアルミレールとプラスチックレールの写真を示す。最後に溝の内幅(単位mm)をかっこで付けて区別すると、写真右から順に、

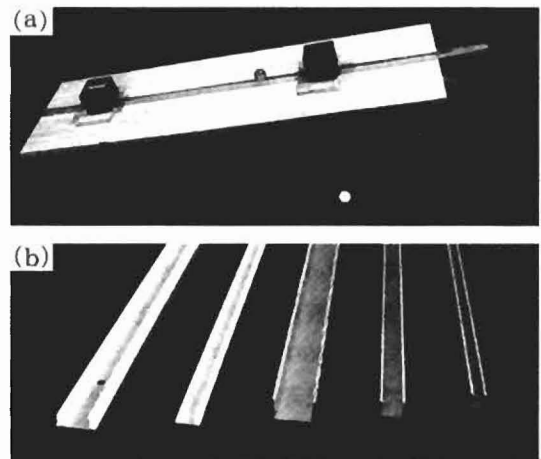


図2 (a) 実験装置. (b) 使用したアルミレールとプラスチックレール

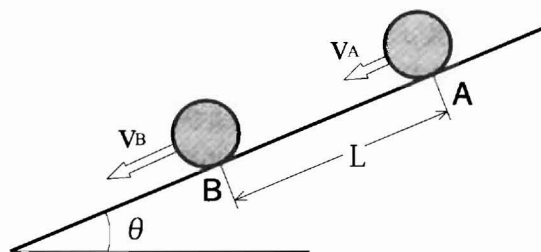


図3 角度 $\theta$ の斜面を転がる球がA点およびB点を通じたときの速さ $v_A, v_B$

アルミレール (6), アルミレール (10), アルミレール (18), プラスチックレール (8), プラスチックレール (15) である。球として、鉄球 (直径25.425±0.001mm, 質量67.066g) とプラスチック球 (直径25.457±0.001mm, 質量9.687g) の2種類を使用した。レールの滑走面および球の表面等は、予め (プラスチックに対して) エタノールおよび (アルミ, 鉄に対して) アセトンを用いてよく脱脂し, 測定中も手の脂が付かないようにポリエチレンの使い捨て手袋をした。

球の重心の斜面平行方向の加速度  $a$  は, レール上の2点 A, B に取り付けられた速度測定器 (ビースピ) が球の通過後に表示する速さ<sup>20)</sup> から求めることができる。AB 間の距離を  $L$  ( $=0.500\text{m}$ ), A 点での球の速さを  $v_A$ , B 点での球の速さを  $v_B$  とすると, 仕事-エネルギー定理より, 質量  $M$  の球にはたらく力  $Ma$  によって球が距離  $L$  だけ移動する仕事は, AB 間の球の並進運動エネルギーの増加分に等しいので, 次式が成り立つ。

$$MaL = \frac{1}{2} Mv_B^2 - \frac{1}{2} Mv_A^2 \quad (1)$$

式変形すると, 球の加速度  $a$  は

$$a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2L} \quad (2)$$

で与えられ, B 点と A 点での速さの2乗の差を距離の2倍で割った形になり, 球の質量  $M$  に依存しない。

斜面の角度  $\theta$  は, 斜面板の側面に  $\ell = 0.500\text{m}$  離してマークした2点の実験台からの高さを測り, 2点の高さの差を  $h$  としたとき, サインの関係式  $\sin \theta = \frac{h}{\ell}$  から求めた。

### § 3. 実験結果

ここでは紙面の都合上, アルミレール (10) を使った実験結果のみを示し, 他のレールの実験結果は, 4-1. 運動の解析において解析結果と共に示すことにする。

図4に, アルミレール (10) 上を転がした鉄球 (白丸) とプラスチック球 (クロス) の加速度  $a$  の実験値を, 斜面の角度  $\theta$  に対してプロットしたグラフを示す。グラフには重力加速度の斜面平行成分  $g\sin \theta$  も一緒に示してある。 $g\sin \theta$  は角度  $\theta$  と共にサインカーブを描いて増加していき, 両球の実験値は,  $g\sin \theta$  とは異なる値を取りながら増加しているのがわかる。鉄球とプラスチック球を比較した場合, 角度  $23^\circ$  を超えるとプラスチック球の方が  $g\sin \theta$  とのずれが大きくなる。

加速度は斜面の角度と共に大きく増大するので, 縦軸を加速度に取った図4のようなグラフでは, 低角度での加速度の振る舞いがわかりにくい。そこで, これ以後のグラフは, 加速度を重力加速度の斜面平行成分で割った比  $\frac{a}{g\sin \theta}$  を使うことにする。

図5に, 図4を加速度の比  $\frac{a}{g\sin \theta}$  でプロットし直したグラフを示す。縦軸の目盛りは50%から刻んでおり, 100%は加速度  $a$  が  $g\sin \theta$  で与えられることを意味する。まず, 図5 (a) の鉄球を見ると, 一番小さな角度  $1.5^\circ$  での比の値65%から少しずつ増大していき, 約  $20^\circ$  までに約68%の一定値に漸近していく。角度が  $23^\circ$  を超えると, 加速度の比は再び増

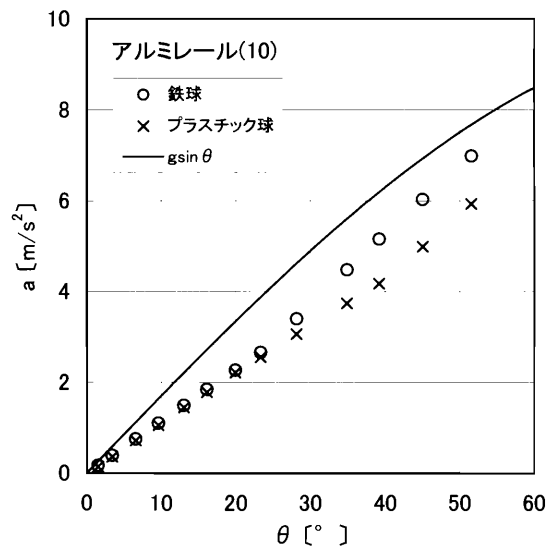


図4 アルミレール (10) に沿って転がる球の加速度と角度の関係

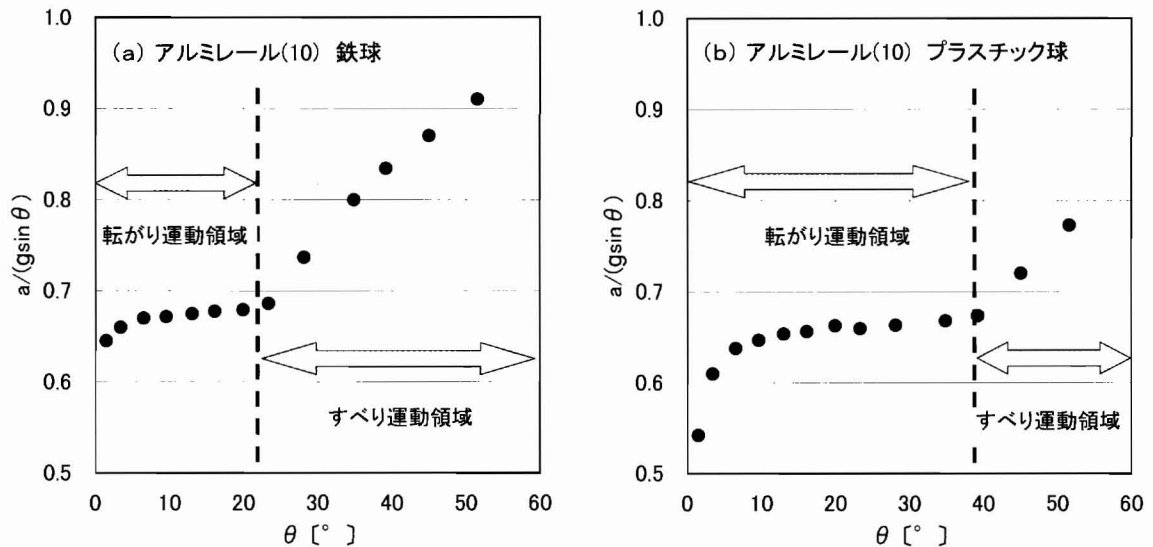


図5 アルミレール(10)に沿って転がる球の加速度の比と角度の関係。(a):鉄球,(b):プラスチック球

大し100%に向かっていくように見える。同じ傾向は図5(b)のプラスチック球でも見られる。すなわち、始めの54%から角度 $39^\circ$ までの約67%に漸近し、 $39^\circ$ を超えると再び増大する。このように加速度の比の実験値は、ある角度によって大きく2つの領域に分けることができる。本論文では、加速度の比がある一定値に漸近する低角度側を「転がり運動領域」、それを越えた高角度側を「すべり運動領域」と呼ぶことにする。

最後に実験値の誤差について触れておく。1つの測定条件(球と角度の組み合わせ)に対して最低でも5回の測定を行い、それらの平均値を図4および図5の実験値としてプロットしている。各測定条件毎の実験値のばらつき程度すなわち平均誤差を見積もると、図5の加速度の比で、マークの大きさよりも充分小さかった。ただし、鉄球の $52^\circ$ とプラスチック球の $1.5^\circ$ の実験値は、マークの大きさ程度を与えた。

## § 4. 考察

### 4-1. 運動の解析

#### (a) 転がり運動1:理論値の導出

まず、半径 $r$ 質量 $M$ の球が、水平面と $\theta$ の角をなす斜面をすべらずに転がり落ちる場合の運動を考察することにする。図6(a)に球にはたらく力を図示する。 $Mg$ は球の重心にはたらく重力、 $N$ は球と斜面の接触点から斜面垂直にはたらく垂直抗力、 $F$ は斜面平行に球の進行方向と逆にはたらく静止摩擦力である。静止摩擦力 $F$ によって球の表面と斜面がしっかりと接触し、すべりが押さえられる。球の重心の斜面平行方向の加速度を $a$ とし、球は重心軸の回りに角速度 $\omega$ で回転しているとすると、運動方程式は次の(3)-(5)式で与えられる。

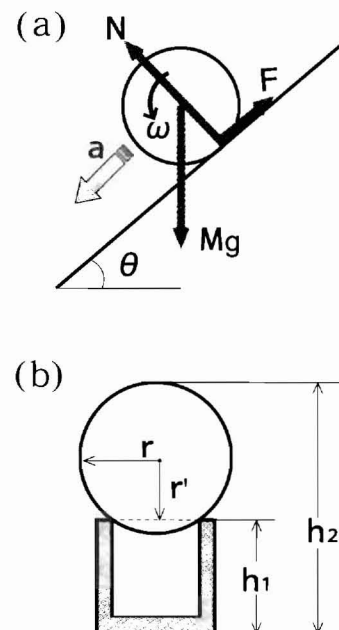


図6 (a) 斜面を転がる球にはたらく力。(b) 力のモーメントの腕の長さ $r'$ と $r$ を導出するための測定量

$$Ma = M \sin \theta - F \quad (3)$$

$$N = M \cos \theta \quad (4)$$

$$I\alpha = Fr \quad (5)$$

(3) 式から、斜面平行方向に加速度  $a$  を生み出す力は、重力の斜面平行成分  $Mg \sin \theta$  から静止摩擦力  $F$  を差し引いた形で与えられる。(4) 式は、斜面垂直方向で、垂直抗力  $N$  と重力の斜面垂直成分  $Mg \cos \theta$  が釣り合うことを示す。(5) 式における  $\alpha$  は球の重心軸の回りの角加速度を表し、角速度の時間微分  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$  で与えられる。また、 $I$  は重心軸の回りの慣性モーメントで、球の場合、

$$I = \frac{2}{5} Mr^2 \quad (6)$$

となる。このとき、(5) 式は、球の回転が静止摩擦力  $F$  による力のモーメント  $Fr$  によって生じることを示す。球がすべらずに理想的に転がる場合を考えているので、球は各瞬間において接触点を中心として回転していると思なすことができる。このとき、接触点での速度および加速度はゼロとなるので、球の加速度  $a$  と角加速度  $\alpha$  の間には、次式が成り立つ。

$$a = r\alpha \quad (7)$$

(7) 式を (5) 式に代入して角加速度  $\alpha$  を消去し、その式と (3) 式から加速度  $a$  を求めると、

$$a = \frac{5}{7} g \sin \theta \quad (8)$$

となり、重力加速度の斜面平行成分  $g \sin \theta$  に一定の係数値  $\frac{5}{7}$  が掛かった形になる。

(8) 式の導出は、力学の教科書や演習書<sup>21-23)</sup> に書かれていることであるが、本実験では実験装置に合わせて若干の修正が必要となる。図 6 (b) に図示したように、レールの溝の上に球が乗っているため、(5) 式における力のモーメントの腕の長さは、球の半径  $r$  でなく  $r'$  となる。同じことは (7) 式の  $r$  にも当てはまる (慣性モーメントの (6) 式の  $r$  は、 $r$  のままで変わらない)。  $r'$  の  $r$  に対する比を  $A \left[ = \frac{r'}{r} \right]$  と置き、(5) 式および (7) 式の  $r$  を  $r' = Ar$  で置き換えると、(8) 式に相当する加速度  $a$  は、

$$a = \frac{5A^2}{5A^2 + 2} g \sin \theta \quad (9)$$

で与えられる。重力加速度の斜面平行成分  $g \sin \theta$  に対する加速度  $a$  の比を取ると、

$$\frac{a}{g \sin \theta} = \frac{5A^2}{5A^2 + 2} \quad (10)$$

となる。

加速度の測定とは独立に、レールの底面からのレールの高さ  $h_1$  およびレールの上に球が乗った状態での球の高さ  $h_2$ 、そして球の直径  $2r$  を測定することによって、 $A$  の値は導出可能である (図 6 (b) 参照のこと)。  $h_1$  と  $h_2$  を最小目盛り 0.02mm のハイトゲージで、 $2r$  をマイクロメータで測定した結果、アルミレール (10)

について鉄球  $A = 0.916$ , プラスチック球  $A = 0.917$  を得た。このとき,  $\frac{5A^2}{5A^2+2}$  の値は, 鉄球  $0.677$ , プラスチック球  $0.678$  となる。プラスチック球の値が  $0.1\%$  大きくなるのは, プラスチック球の直径の方が  $0.03\text{mm}$  程大きいことに起因する。(10) 式に従って計算した値を, これ以後, 加速度の比  $\frac{a}{g\sin\theta}$  の理論値と呼ぶ。

図 5 に示したアルミレール (10) の実験結果に, 加速度の比  $\frac{a}{g\sin\theta}$  の理論値を点線で加えたグラフを図 7 に示す。理論値を転がり運動領域の実験値と比較すると, 理論値は角度に依らず一定なのに対し, 鉄球 (図 7 (a)), プラスチック球 (図 7 (b)) とも実験値が始めの角度から増加していく振る舞いは再現しない。しかしながら, 角度の増加と共に理論値に向かって漸近していくように見える。鉄球では  $20^\circ$  までに実験値と理論値はよく一致するが, プラスチック球の  $39^\circ$  までの実験値は理論値よりも約  $1\%$  程低く, 完全には一致しない。このように (10) 式で与えられる球の転がり運動の理論値は, 実験値のおおよその値を与えるが, その振る舞いを再現するまでには至っていない。

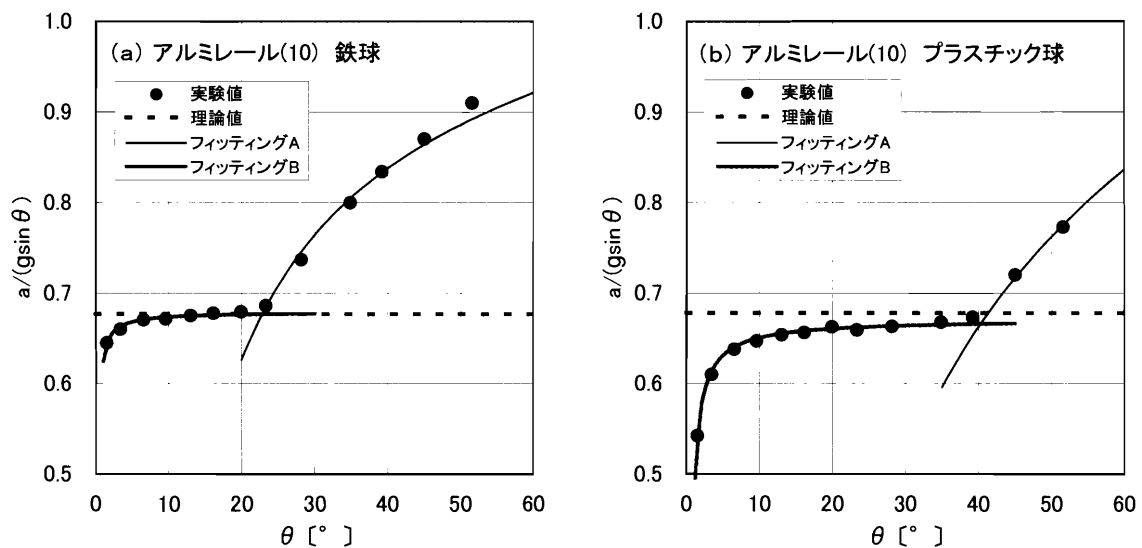


図 7 アルミレール (10) に沿って転がる球の加速度の比と角度の関係. (a): 鉄球, (b): プラスチック球

### (b) すべり運動

球がレールの溝に沿って理想的な転がり運動をする場合, 球の加速度  $a$  は (9) 式で与えられる。このとき, (9) 式と (3) 式より静止摩擦力  $F$  を求めると,

$$F = \frac{2}{5A^2+2} Mg\sin\theta \quad (11)$$

となる。ここで, 球と斜面の接触点がすべらないためには, 静止摩擦力  $F$  は最大静止摩擦力  $\mu N$  よりも小さくなければならない。  $\mu$  は静止摩擦係数であり, 垂直抗力  $N$  は (4) 式で与えられている。式で表すと,

$$\frac{2}{5A^2+2} Mg\sin\theta \leq \mu Mg\cos\theta \quad (12)$$

となり, 整理すると次の条件式にまとめられる。

$$\tan \theta \leq \frac{5A^2+2}{2} \mu \quad (13)$$

(13) 式の条件を満たす角度  $\theta$  の範囲内で、球はすべらずに理想的に転がる。逆の見方をすると、(13) 式の条件が成り立たない

$$\tan \theta > \frac{5A^2+2}{2} \mu \quad (14)$$

の条件を満たす角度  $\theta$  では、球は転がると同時にすべり始める。

球の運動にすべりが加わると、接触点での速度と加速度はゼロでないので、球の加速度  $a$  と角加速度  $\alpha$  の間の (7) 式の関係式は成り立たなくなり、(9) 式は導出できない。その代わりに、すべり運動では、図 6 (a) の  $F$  は静止摩擦力から動摩擦力に変わり、垂直抗力  $N$  との間に

$$F = \mu' N \quad (15)$$

が成立する。ここで、 $\mu'$  は動摩擦係数であり、一般に  $\mu' \leq \mu$  である。(3), (4), (15) 式から、球の加速度  $a$  は、

$$a = g(\sin \theta - \mu' \cos \theta) \quad (16)$$

で与えられ、加速度の比  $\frac{a}{g \sin \theta}$  は、

$$\frac{a}{g \sin \theta} = 1 - \frac{\mu'}{\tan \theta} \quad (17)$$

となる。

図 7 のすべり運動領域に描かれている細かい実線 (フィッティング A) は、(17) 式を使ったフィッティング曲線である。パラメータは動摩擦係数  $\mu'$  の 1 個だけなので、すべり運動領域の個々の実験値から  $\mu'$  を導出し、それらを平均して  $\mu'$  の値とした。その際、フィッティング曲線から外れるデータ (図 7 の例では、鉄球の  $52^\circ$  の実験値) は平均から除外した。得られた  $\mu'$  の値とその平均誤差は、図 7 (a) の鉄球で  $0.136 \pm 0.002$ 、図 7 (b) のプラスチック球で  $0.283 \pm 0.003$  となり、それらの値を使って描いたフィッティング曲線は両球のすべり運動領域の実験値をよく再現する。鉄球の  $52^\circ$  の実験値は、§3 で触れたように 5 回の測定のばらつきが大きく、実験値の平均誤差もマークの大きさ程度になる。 $45^\circ$  までのすべりは、1 つの  $\mu'$  の値を使ったフィッティング曲線で再現されることからわかるように比較的均一と考えられる。しかしながら、 $52^\circ$  の大きな傾斜角になると、個々の測定におけるすべりの程度も不均一になり、平均すると小さい  $\mu'$  の実験値を与える。

鉄球とプラスチック球の  $\mu'$  の値を比較すると、鉄球の方が小さい。(15) 式より動摩擦力  $F$  も小さくなり、同じ角度では鉄球の方がすべりやすくなる。すなわち、グラフにおいて同じ角度での加速度の比は、鉄球の方が大きな 100% に近い値をとる。 $\mu'$  の値は、また、転がり運動からすべり運動に変わる角度にも反映される。鉄球とプラスチック球のすべり始めの角度を比較すると、鉄球の方がより低い角度からすべり始める。 $\mu \simeq \mu'$  と近似し、(14) 式の  $\mu$  の代わりに  $\mu'$  を使って角度の条件を計算すると、鉄球  $\theta > 22.8^\circ$ 、プラスチック球  $\theta > 41.3^\circ$  となり、ほぼ実験データを再現する。

## (c) 転がり運動2：抵抗力の導入

ここでは議論をもう一度転がり運動に戻し、加速度の比の理論値(10)式の修正を試みる。図7において、転がり運動領域の実験値は角度の増加と共に、(10)式で与えられる理論値に漸近していく。一方、すべり運動領域の実験値も、グラフの角度範囲ではまだ途中段階であるが、(17)式から予想されるように100%に向かって漸近していく。その値は異なるがどちらの運動領域も一定値に向かって漸近する振る舞いは一致する。すなわち、(10)式と(17)式を組み合わせた形の式が、転がり運動領域の実験値を再現すると予想される。

今、球にはたらく力として、新たに抵抗力 $f$ を導入する。図8に、図6(a)を修正した斜面をすべらずに転がる球にはたらく力を図示する。抵抗力 $f$ は球の重心の位置に球の進行方向と逆向きにはたらく。実際には、球の表面とレールの接触面は見たり触ったりする限りは充分なめらかであるが、それではわからない小さな凹凸が障害物となり、理想的な転がり運動を遅らせる抵抗力 $f$ として現れていると考えている。

抵抗力 $f$ を仮定したとき、(3)-(5)の運動方程式は、

$$Ma = Mgs \sin \theta - F - f \quad (18)$$

$$N = Mg \cos \theta \quad (19)$$

$$I\alpha = FAr \quad (20)$$

となり、(18)式に抵抗力 $f$ が加わる形になる。抵抗力 $f$ は重心にはたらくので、(20)式の重心軸の回りの力のモーメントには現れない。(6)式と(7)式も成立し、再び記述すると、

$$I = \frac{2}{5} Mr^2 \quad (21)$$

$$a = Ar\alpha \quad (22)$$

となる。(20)式と(22)式において、(a)転がり運動1での議論に従って、力のモーメントの腕の長さを $r' = Ar$ に置き換えている。

ここで、抵抗力 $f$ は最大静止摩擦力や動摩擦力と同様に、垂直抗力 $N$ に比例すると仮定する。その比例係数を $k$ とおくと、次式となる。

$$f = kN \quad (23)$$

以上の式を使って加速度 $a$ を導出すると、

$$a = \frac{5A^2}{5A^2 + 2} g(\sin \theta - k \cos \theta) \quad (24)$$

となり、加速度の比 $\frac{a}{g \sin \theta}$ は、

$$\frac{a}{g \sin \theta} = \frac{5A^2}{5A^2 + 2} \left[ 1 - \frac{k}{\tan \theta} \right] \quad (25)$$

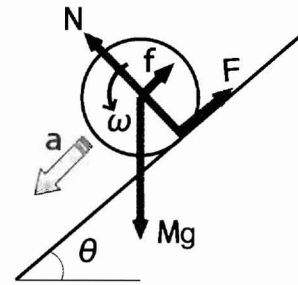


図8 抵抗力 $f$ を加えた斜面を転がる球にはたらく力



で与えられる。(25)式は、(17)式の右辺の $\mu'$ を $k$ で置き換え、その項全体に(10)式の $\frac{5A^2}{5A^2+2}$ が掛かる形になっている。

図7に、(25)式によるフィッティング曲線を太い実線(フィッティングB)で示す。その際、 $\frac{5A^2}{5A^2+2}$ と $k$ の2つをパラメータとして最小二乗法で計算した。フィッティング曲線は、両球の転がり運動領域の実験値が始めの低角度で増加し、一定値への漸近する振り舞いを見事に再現する。加速度の比の理論値、鉄球0.677、プラスチック球0.678に対し、パラメータ $\frac{5A^2}{5A^2+2}$ の値と誤差は、鉄球 $0.679 \pm 0.002$ 、プラスチック球 $0.670 \pm 0.002$ となり、鉄球では誤差の範囲内で一致し、プラスチック球では誤差を考慮しても0.6%程小さい値になった。 $k$ の値と誤差は、鉄球 $0.0014 \pm 0.0001$ 、プラスチック球 $0.0051 \pm 0.0002$ となり、プラスチック球の方が3倍以上大きな値となった。(25)式からわかるように最初の $1.5^\circ$ の実験値が鉄球よりもプラスチック球の方が小さいのは、プラスチック球の大きな $k$ の値を反映した結果である。抵抗力は球の表面とレールの接触面の小さな凹凸が障害物となり生じると考えたが、図7における鉄球とプラスチック球のレールは共通であり、 $k$ の差は主に鉄球とプラスチック球の表面の小さな凹凸の程度の差に起因すると考えられる。

本節で議論したような転がり運動に抵抗力を入れた解析は、筆者の知る限り今まで報告されていない。本研究において精密な実験を行うことによって初めて明らかにされたと考えている。

(d) レールと球の組み合わせによる比較

ここでは、アルミレール(10)以外のレールの実験結果および解析結果を示し、レールと球の組み合わせによる結果の違いを考察する。

アルミレールは、アルミレール(10)を含めて全部で3種類のレールで実験を行った。図9にアルミレール(6)の結果を、図10にアルミレール(18)の結果を示す。2種類のプラスチックレールの結果は、図11プラスチックレール(8)と図12プラスチックレール(15)に示す。図7と同様、実験値に加えて、(10)式で与えられる加速度の比の理論値を点線で、(17)式を使ったフィッティング曲線を細い実線(フィッティングA)、(25)式を使ったフィッティング曲線を太い実線(フィッティングB)で示してある。また、表1に、レールと球の組み合わせに対し、加速度の比の理論値およびパラメータ $\frac{5A^2}{5A^2+2}$ ,  $k$ ,  $\mu'^{(24)}$ の値と誤差をまとめた。

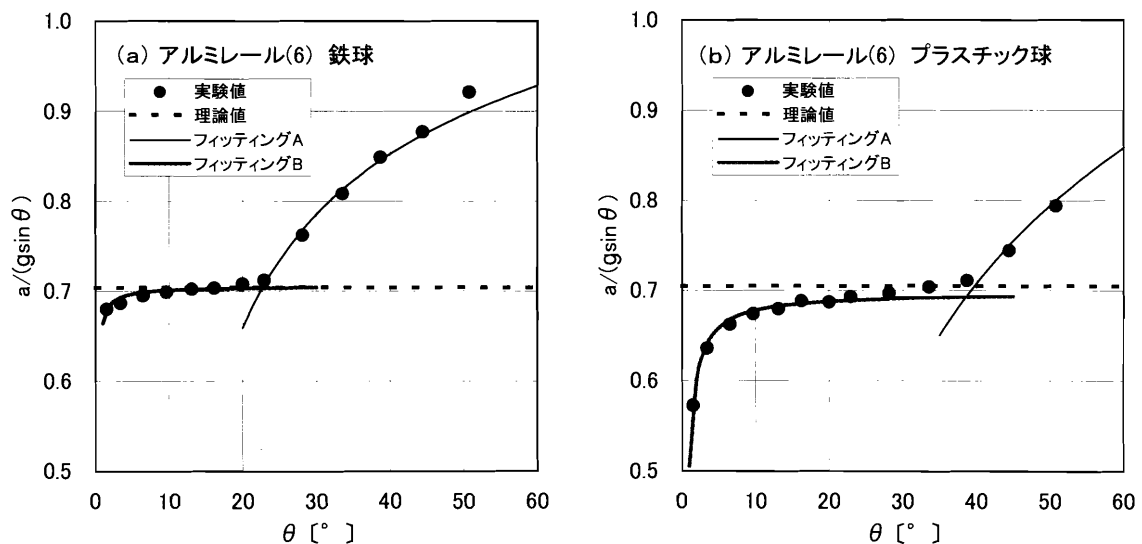


図9 アルミレール(6)に沿って転がる球の加速度の比と角度の関係。(a):鉄球,(b):プラスチック球

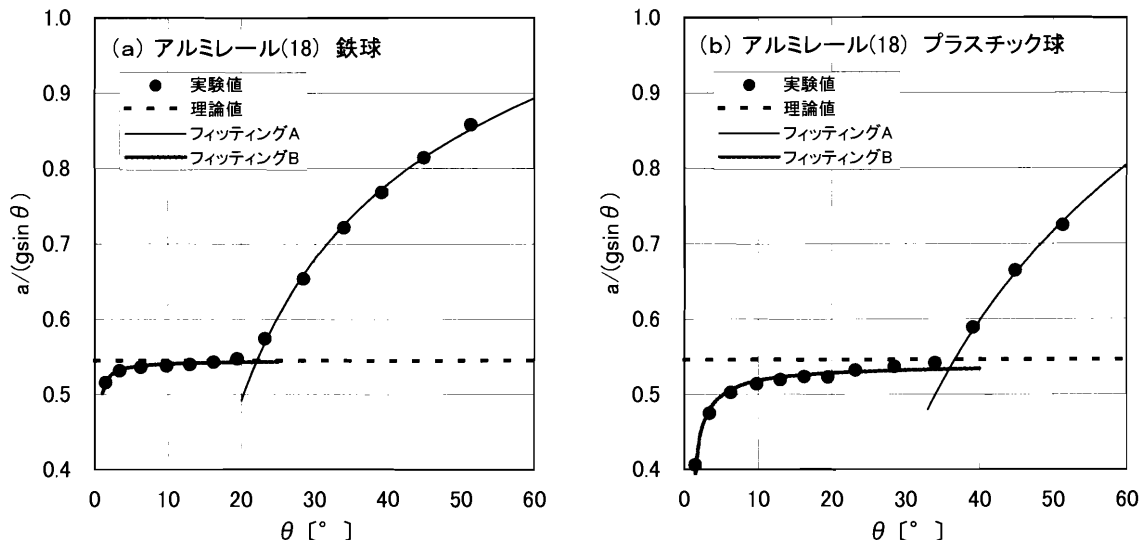


図10 アルミレール (18) に沿って転がる球の加速度の比と角度の関係。(a)：鉄球, (b)：プラスチック球

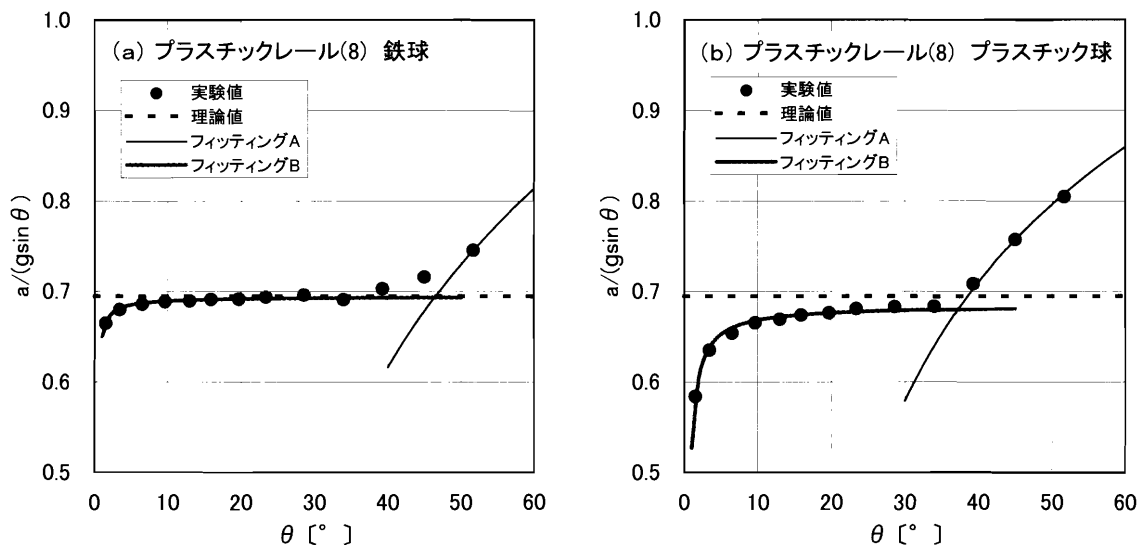


図11 プラスチックレール (8) に沿って転がる球の加速度の比と角度の関係。(a)：鉄球, (b)：プラスチック球

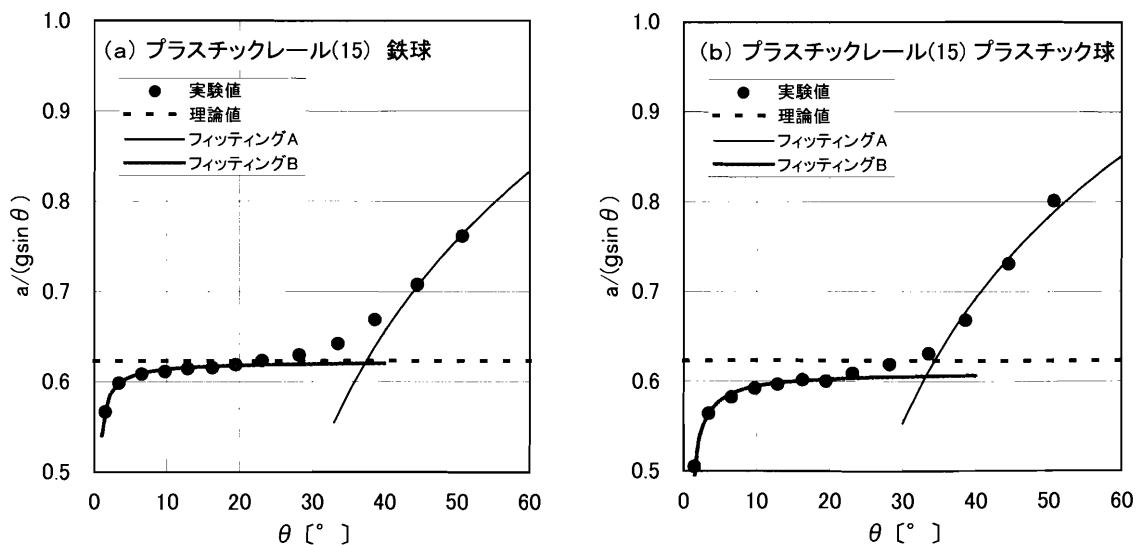


図12 プラスチックレール (15) に沿って転がる球の加速度の比と角度の関係。(a)：鉄球, (b)：プラスチック球

表1 加速度の比の理論値およびグラフのフィッティング曲線を与えるパラメータの値と誤差

	鉄 球				プラスチック球			
	加速度の比 の理論値	$\frac{5A^2}{5A^2+2}$	$k$	$\mu'$	加速度の比 の理論値	$\frac{5A^2}{5A^2+2}$	$k$	$\mu'$
アルミレール(6)	0.704	0.705 ±0.003	0.0010 ±0.0002	0.124 ±0.001	0.705	0.697 ±0.003	0.0048 ±0.0002	0.245 ±0.007
アルミレール(10)	0.677	0.679 ±0.002	0.0014 ±0.0001	0.136 ±0.002	0.678	0.670 ±0.002	0.0051 ±0.0002	0.283 ±0.003
アルミレール(18)	0.545	0.545 ±0.002	0.0014 ±0.0002	0.185 ±0.002	0.546	0.538 ±0.003	0.0065 ±0.0003	0.338 ±0.003
プラスチックレール(8)	0.695	0.694 ±0.001	0.0011 ±0.0001	0.322	0.695	0.684 ±0.002	0.0040 ±0.0002	0.243 ±0.003
プラスチックレール(15)	0.623	0.622 ±0.001	0.0023 ±0.0001	0.289 ±0.002	0.623	0.610 ±0.002	0.0045 ±0.0001	0.258 ±0.007
シリコンオイル アルミレール(10)	0.677	0.681 ±0.002	0.0015 ±0.0002	0.140 ±0.002	0.678	0.674 ±0.003	0.0058 ±0.0002	0.189 ±0.003

まず図のグラフから見ていく。いずれのレールと球の組み合わせにおいても、転がり運動領域の実験値はフィッティング B で、すべり運動領域の実験値はフィッティング A でよく再現される。レールの溝の内幅が広いレールでは、転がり運動領域での漸近値が小さくなるが、力のモーメントの腕の長さが短くなるために ((10) 式の  $A$  が小さくなり)、加速度の比の理論値も小さくなる。転がり運動からすべり運動に変わる付近の実験値に着目すると、プラスチックレール (8) 鉄球 (図11(a))、プラスチックレール (15) 鉄球 (図12(a))、プラスチックレール (15) プラスチック球 (図12(b)) では、フィッティング曲線よりも上に離れる。すなわち、これらの球とレールの組み合わせでは、すべり運動がフィッティング曲線よりも低い角度で始まる。ただし、より高角度のすべり運動領域の実験値が、1つの  $\mu'$  の値を使ったフィッティング A で再現されることからわかるように、ここでのすべりは、まだ  $\mu$  が角度に依存しながら徐々に増えていく、あるいは、転がり運動とすべり運動が混ざった不均一な状態だと推測される。このような不均一なすべり領域は、アルミレール (6) プラスチック球 (図9(b)) でも若干その傾向は見られるが、プラスチックレールの場合に顕著に現れる。

次に表1を使って、転がり運動領域でのパラメータ  $\frac{5A^2}{5A^2+2}$  と  $k$  の傾向を調べる。 $\frac{5A^2}{5A^2+2}$  は、鉄球では全レールに対し誤差の範囲内で加速度の比の理論値と一致する。一方、プラスチック球では誤差を考慮しても、いずれのレールでも加速度の比の理論値よりもわずかではあるが小さめになる (差の最大値はプラスチックレール (15) での1.1%)。残念ながら、鉄球で一致しプラスチック球でわずかに小さくなる理由を特定できなかった。 $k$  の値のレールによる変化は、鉄球で0.0010-0.0023、プラスチック球で0.0040-0.0065となり、レールによる差があまりない。その代わりに、いずれのレールでもプラスチック球の方が鉄球よりも約2倍から5倍大きな値をとる。(c) 転がり運動2において、 $k$  の値は主に球の表面の小さな凹凸の程度に起因すると考察したが、ここでの結果もそれを裏付けるものである。

すべり運動領域のパラメータ  $\mu'$  を比較する。アルミレール鉄球の組み合わせのみが0.124-0.185と比較的小さい値を示すのに対し、その他の組み合わせでは、アルミレールプラスチック球0.245-0.338、プラスチックレール鉄球0.289-0.322、プラスチックレールプラスチック球0.243-0.258となり、組み合わせによる差はあまりない。ここで、アルミレールについて鉄球とプラスチック球の  $\mu'$  の値を詳しく見ると、どちらの球でもアルミレールの溝の内幅と共に  $\mu'$  の値が大きくなる傾向があるように思われる。しかしながら、プラス

チックレールではその傾向が見られず、今回のデータのみでの結論は難しい。

$\mu$ の値は転がり運動からすべり運動に変わる角度に反映される。すなわち、アルミレール鉄球の組み合わせは、いずれのグラフ（図7(a), 図9(a), 図10(a)）においても約 $23^\circ$ の比較的低角度からすべり始めるのに対し、その他の組み合わせでは、すべり始めの角度が大きくなり、転がり運動領域の角度範囲が大きく広がる。

#### (e) シリコンオイルの効果

意図的にレールの滑走面および球の表面にシリコンオイル<sup>25)</sup>を塗ることによって、球の転がり運動とすべり運動がどのように変わるかを調べるため、アルミレール(10)について比較実験を行った。図13にシリコンオイルを薄く均一に塗った実験結果および解析結果を、パラメータの値を表1の一番下の段に示す。

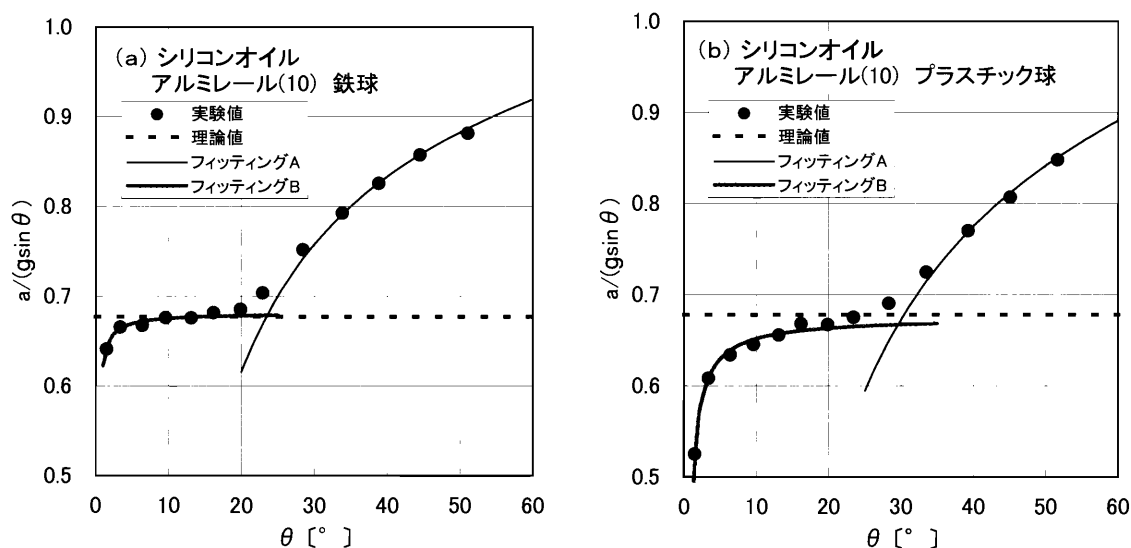


図13 シリコンオイルを塗った実験。(a)：鉄球，(b)：プラスチック球

図13と図7のグラフを比較すると、鉄球は基本的に変わらず、シリコンオイルの効果は見られない。大きく変化するのがプラスチック球のすべり運動領域であり、シリコンオイルを塗ることによって、より低角度からすべり始める。以上の結果は、表1のパラメータの値に表れる。アルミレール(10)とシリコンオイルのアルミレール(10)を比較すると、鉄球の $\frac{5A^2}{5A^2+2}$ 、 $k$ 、 $\mu$ およびプラスチック球の $\frac{5A^2}{5A^2+2}$ 、 $k$ の値は誤差の範囲内でほぼ一致するのに対し、プラスチック球の $\mu$ 'の値はシリコンオイルを塗ることによって0.283から0.189に大きく減少する。

加えて、転がり運動からすべり運動への境界領域の実験値に着目すると、プラスチックレールで顕著に見られた不均一なすべりが、シリコンオイルを塗ることによっても現れる。

#### 4-2. 物理教材としての考察

§1で述べたように斜面を転がる球の加速度を求める実験は、高校物理の教科書<sup>5-8)</sup>に生徒実験として取り上げられている。また、加速度の導出を目的としないが、斜面を転がる球の運動を取り入れた実験は、小学校および中学校の理科実験<sup>11-17)</sup>においても設定されている。本節では、主に高校の現場で加速度を求める実験を行う際に考慮(注意)すべき事柄をまとめる。

- 1) 実験装置を乗せる実験台の水平度を出す。実験台が傾いていると、その角度がそのまま斜面の角度に付加される。さらに重力加速度の斜面平行成分 $g \sin \theta$ と比較する場合、 $g \sin \theta$ の値も変わってくる。サイン関数の性質より、斜面の角度が小さい方が影響が大きい。

- 2) 反りのない斜面板を選ぶ。速度測定器を取り付けた AB 間の斜面が反っていると、斜面の角度が変わることになり、実験値に影響を与える。化粧棚板、木材板、教材会社の斜面板（力学台車用の滑走台）は、結構反っているものが多い。
- 3) レールはカーテンレールよりも本研究で使用したアルミ U 形アングルや電線カバー用プラスチックモールの方がよい。教科書の実験<sup>5-8)</sup>には、よくステンレス製カーテンレール（または単にカーテンレール）と記載されている。本研究で用意したステンレス製カーテンレール<sup>26)</sup>の溝面はなめらかでなく、溝面の直線度もあまりよくない。結果は示さないが実験値のばらつきも明らかに大きくなった。また、カーテンレールの底面は丸まっているので、水平方向（レールの短方向）に傾きやすい。
- 4) 重力加速度の斜面平行成分  $g\sin\theta$  と比較する場合は、溝幅の小さいレールと直径の大きな球を選ぶ。レールの溝幅の増大と共に、回転を与える力のモーメントの腕の長さ  $r'$  が小さくなり、加速度の比の理論値  $\frac{5A^2}{5A^2+2}$  の値も減少する。高校において発展的に取り扱ったとしても、(8) 式の係数  $\frac{5}{7}$  との比較と考えられるので、溝幅の小さいレールと直径の大きな球を選択することによって  $r' \simeq r$  と近似できる。
- 5) 比較的低い角度での実験では、プラスチック球よりも鉄球の方がよい。転がり運動領域の始めの低角度において抵抗力  $f$  に起因する加速度の比の理論値からの低下が起こる。低下の程度はプラスチック球よりも鉄球の方が小さい。教科書<sup>5-7)</sup>ではストップウォッチやメトロノームを使って時間を測定するため、 $4^\circ$  以下の角度に設定されている。図 7(a) および図 9(a)-12(a) の鉄球のグラフから分かるように、 $4^\circ$  では加速度の比の低下が始まっており、少なくとも  $7^\circ$  以上、できれば  $10^\circ$  以上の角度が望ましい。

以上をまとめると、転がり運動の球の加速度を求め、理論値と比較する実験では、アルミレール (6) 鉄球またはプラスチックレール (8) 鉄球の組み合わせで、 $10\text{-}20^\circ$  の角度が望ましいといえる。もちろん発展的な内容の取り扱い方によって、考え方も異なってくる。教材研究に取り組む際に本研究の内容が参考になれば、幸いである。

## § 5. まとめ

高校物理における斜面上の球の運動実験を題材に、アルミレールとプラスチックレール、鉄球とプラスチック球を組み合わせ、斜面を転がる球の加速度の角度依存性を測定する実験を行い、球の運動を詳しく解析した。得られた結果は、次のようにまとめられる。

- 1) 球の加速度を重力加速度の斜面平行成分で割った加速度の比をとると、実験値は転がり運動領域とすべり運動領域に分かれる。転がり運動領域での球は、球と斜面の接触点に静止摩擦力がはたらき、すべらずに転がる。角度の増大と共に、静止摩擦力が最大静止摩擦力を超えると、球はすべりながら転がるすべり運動領域に入る。
- 2) 転がり運動領域において、力のモーメントの腕の長さを考慮した加速度の比の理論値は、高角度における実験値とほぼ一致するが、始めの角度での比の値の低下を再現しない。球の重心にはたらく抵抗力を考慮に入れた式を使って、初めて実験値は再現される。
- 3) 抵抗力係数（抵抗力を垂直抗力で割った比）の大きさは、転がり運動領域における始めの角度での加速度の比の低下に反映される。加速度の比の低下は、プラスチック球よりも鉄球の方が小さく、レールの種類に依存しない。
- 4) すべり運動領域の加速度の比の実験値は、100% に向かって再び増加し、動摩擦係数を使った式で再現される。
- 5) 動摩擦係数の大きさは、転がり運動領域からすべり運動領域に変わる角度に反映される。アルミレール鉄球の組み合わせは、約  $23^\circ$  と比較的 low angle なのに対し、その他のレールと球の組み合わせでは、転がり運動領域の角度範囲が大きく広がり、すべりにくくなる。
- 6) アルミレールを使ってシリコンオイルを塗った実験を行った所、プラスチック球では動摩擦係数が小さくなり、すべりやすくなったのに対し、鉄球ではシリコンオイルの効果が現れなかった。

## 文献および註

- 1) 例えば, 國友正和ほか: 高等学校物理 I (数研出版, 平成14年検定済) p. 230
- 2) 例えば, 1) と同掲書, p. 234
- 3) 兵藤申一ほか: 高等学校物理 I (啓林館, 平成14年検定済) p. 115
- 4) 三浦登ほか: 物理 I (東京書籍, 平成14年検定済) p. 192
- 5) 國友正和ほか: 高等学校物理 II (数研出版, 平成15年検定済) p. 282
- 6) 近角聡信ほか: 新編物理 IB (東京書籍, 平成9年検定済) p. 30
- 7) 西川哲治ほか: 新訂物理 IB (大日本図書, 平成9年検定済) p. 46
- 8) 中村英二ほか: 高等学校物理 I (第一学習社, 平成14年検定済) p. 55
- 9) 三浦登ほか: 物理 II (東京書籍, 平成15年検定済) p. 14
- 10) 兵藤申一ほか: 高等学校物理 II (啓林館, 平成15年検定済) p. 27
- 11) 三浦登ほか: 新編新しい理科 5 下 (東京書籍, 平成16年検定済) p. 44
- 12) 日高敏隆ほか: みんなと学ぶ小学校理科 5 年 (学校図書, 平成16年検定済) p. 112
- 13) 養老孟司ほか: 小学理科 5 下 (教育出版, 平成16年検定済) p. 30
- 14) 大隅良典ほか: わくわく理科 5 下 (啓林館, 平成16年検定済) p. 42
- 15) 三浦登ほか: 新編新しい科学 1 下 (東京書籍, 平成17年検定済) p. 63
- 16) 日高敏隆ほか: 中学校科学 1 分野下 (学校図書, 平成17年検定済) p. 57
- 17) 細谷治夫ほか: 理科 1 分野下 (教育出版, 平成17年検定済) p. 59
- 18) 山本逸郎, 古川由美子, 野土谷桃子: 斜面を転がる球の衝突実験の物理学的考察, 弘前大学教育学部紀要, 94(2005)p. 19
- 19) 化粧棚板, アルミ U 形アングル, 電線カバー用プラスチックモールは近所の大型日曜大工店で購入し, 鉄球, プラスチック球, 速度測定器 (ビースピ) は教材会社, 中村理科工業 (株) 扱いを使用した。
- 20) 筆者は 4 台の速度測定器を所有しているが, 同じ速さを測定しても機器によって速さの表示値は, 最大で 1% ほどずれる。加速度を求める際には, 校正値を使用した。
- 21) D. ハリディほか著, 野崎光昭監訳: 物理学の基礎 1 力学 (培風館, 2002) p. 214
- 22) 山内恭彦, 末岡清市編: 大学演習力学 (裳華房, 1979) p. 226
- 23) 後藤憲一, 山本邦夫, 神吉健編: 詳解力学演習 (共立出版, 2003) p. 248
- 24) (c) 転がり運動 2 で導入した抵抗力  $f$  がすべり運動においても作用しているとすると, (17) 式の  $\mu$  は  $\mu + k$  で置き換わる。このときの  $\mu$  は, 表 1 の  $\mu$  から  $k$  を引いた値になる。すべり運動においても抵抗力  $f$  が作用する可能性は高いと考えられるが, 実験的に確認されていない。ただし,  $\mu$  の値は  $k$  の値よりも充分大きいので, 本節の議論はどちらの  $\mu$  の値でも変わらない。
- 25) H, S シリコンスプレードライ ((株) エーゼット製)
- 26) 伸縮 C 型カーテンレール 2.0m ~ 1.1m ステンレス (ヨコタ量販 (株) 製)

(2006. 7. 28受理)