

# 扇形領域における熱伝導方程式に対する境界値問題

## The boundary value problem for the equations of heat conduction in a plane sector

伊藤 成治\*

Shigeharu ITOH

要旨：扇形領域における熱伝導方程式に対する境界値問題の連続な解の存在とその一意性に関する結果を報告する。

キーワード：熱伝導方程式，扇形領域

### 1 序論

扇形領域  $\Omega_{R,\theta} = \{ (r, \varphi) \mid 0 < r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \theta \in (0, 2\pi) \}$  において熱伝導方程式の境界値問題を考える。

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, & (r, \varphi, t) \in \Omega_{R,\theta} \times (0, \infty) \\ u(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi), & (r, \varphi) \in \Omega_{R,\theta} \\ u(r, 0, t) = u(r, \theta, t) = u(R, \varphi, t) = 0, & (r, \varphi, t) \in \Omega_{R,\theta} \times (0, \infty) \\ \lim_{r \rightarrow +0} u(r, \varphi, t) < +\infty \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $\alpha$  は正の定数である。

ところで、熱伝導方程式の境界値問題はストークス方程式の境界値問題と密接に関連している。 $u$ ,  $\nabla \psi$ ,  $w$  をこの順に次の方程式の解とする。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = f \\ u|_{t=0} = v_0 \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\theta} = u|_{R=0} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} \Delta \psi = \rho - \nabla \cdot u, \quad \nabla \psi|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\varphi=\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{R=0} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

---

\* 弘前大学教育学部数学教室

Department of Mathematics, Hirosaki University, Hirosaki 036-8560, Japan

$$\begin{cases} \nabla \cdot w = 0, \quad w|_{t=0} = 0 \\ w|_{\varphi=0} = -\nabla\psi|_{\varphi=0}, \quad w|_{\varphi=\theta} = -\nabla\psi|_{\varphi=\theta}, \quad w|_{R=0} = -\nabla\psi|_{R=0} \end{cases} \quad (1.4)$$

また,  $\nabla p$  を

$$\nabla p = \nu(\nabla(\rho - \nabla \cdot u) + \Delta w) - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi + w) \quad (1.5)$$

とおけば,  $v = u + \nabla\psi + w$  は,

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot v = \rho \\ v|_{t=0} = v_0 \\ v|_{\varphi=0} = v|_{\varphi=\theta} = v|_{R=0} = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

を満足することが容易にわかる。

さて,  $J_\lambda(z)$  を  $\lambda$  次のベッセル関数,  $\beta_{\lambda,m}$  を  $J_\lambda(\beta R) = 0$  の  $m$  番目の正根としたとき, 通常の変数分離法によって, 問題 (1.1) は形式的に次の級数解を持つことが導かれる (参考文献 [1]).

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, t) = \frac{4}{R^2\theta} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{J_{\lambda_n}(\beta_{\lambda_n,m}r) \sin \lambda_n \varphi}{\{J'_{\lambda_n}(\beta_{\lambda_n,m}R)\}^2} \exp(-\alpha\beta_{\lambda_n,m}^2 t) \\ \cdot \int_0^R \rho J_{\lambda_n}(\beta_{\lambda_n,m}\rho) d\rho \int_0^\theta u_0(\rho, \xi) \sin \lambda_n \xi d\xi \end{aligned} \quad (1.7)$$

ここで, 繁雑さを避けるために  $\frac{n\pi}{\theta}$  を  $\lambda_n$  と表記した。

本論文では, ある条件の下で形式的な級数 (1.7) が  $\Omega_{R,\theta} \times [0, \infty)$  で一様収束すること, すなわち  $u(r, \varphi, t)$  が  $\Omega_{R,\theta} \times [0, \infty)$  で連続になること及び (1.1) の解は (1.7) に限ることを証明する。

解の微分可能性および  $r \rightarrow +0$  での挙動については改めて報告する。

## 2 解の連続性

**定理 1**  $u_0(r, \varphi)$  が  $\Omega_{R,\theta}$  で区分的に滑らかで, かつ整合条件

$$u_0(r, 0) = u_0(r, \theta) = u_0(R, \varphi) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +0} u_0(r, \varphi) < +\infty \quad (2.1)$$

を満足すれば, 問題 (1.1) の形式的な級数解 (1.7) は  $\Omega_{R,\theta} \times [0, \infty)$  で一様収束する。

**証明** 整合条件  $u_0(r, 0) = u_0(r, \theta) = 0$  より,  $u_0(r, \varphi)$  は,  $\varphi$  に関して全域で連続かつ区分的に滑らかな周期  $2\theta$  の奇関数に拡張できる。従って,  $u_0(r, \varphi)$  の  $\varphi$  に関するフーリエ正弦展開

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r) \sin \lambda_n \varphi, \quad b_n(r) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta u_0(r, \xi) \sin \lambda_n \xi d\xi \quad (2.2)$$

は  $u_0(r, \varphi)$  に一様収束する (参考文献 [2])。

さらに, 整合条件  $u_0(R, \varphi) = 0$  および  $\lim_{r \rightarrow +0} u_0(r, \varphi) < +\infty$  より,  $u_0(r, \varphi)$  の  $r$  に関するフーリエ・ベッセル展開

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{\lambda_n}(\beta_{\lambda_n, m} r), \quad A_m = \frac{2}{R^2 J_{\lambda_n+1}^2(\beta_{\lambda_n, m} R)} \int_0^R \rho u_0(\rho, \varphi) J_{\lambda_n}(\beta_{\lambda_n, m} \rho) d\rho \quad (2.3)$$

も  $u_0(r, \varphi)$  に一様収束することがわかる (参考文献 [3])。

故に, 漸化式

$$J'_\lambda(z) = \frac{\lambda}{z} J_\lambda(z) - J_{\lambda+1}(z) \quad (2.4)$$

によつて,  $J_{\lambda_n+1}(\beta_{\lambda_n, m} R) = J'_{\lambda_n}(\beta_{\lambda_n, m} R)$  なので, 2重関数項級数

$$\begin{aligned} & \frac{4}{R^2 \theta} \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{J_{\lambda_n}(\beta_{\lambda_n, m} r) \sin \lambda_n \varphi}{\{J'_{\lambda_n}(\beta_{\lambda_n, m} R)\}^2} \int_0^R \rho J_{\lambda_n}(\beta_{\lambda_n, m} \rho) d\rho \int_0^\theta u_0(\rho, \xi) \sin \lambda_n \xi d\xi \\ & \equiv \frac{4}{R^2 \theta} \sum_{n, m=1}^{\infty} G_{n, m}(r, \varphi) \end{aligned} \quad (2.5)$$

が  $\Omega_{R, \theta}$  で一様収束することが示された。

さて, ベッセル関数の零点の性質 (参考文献 [3]) から, 2重数列  $\{\beta_{\lambda_n, m}\}$  を単調増加な単数列  $\{\beta_j\}$  に並び替えることができる。この並び替えにより, 任意の  $j \in \mathbb{N}$  に対して, ただひとつの組  $(n(j), m(j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  が定まって,  $G_{n(j), m(j)}(r, \varphi)$  を  $G_j(r, \varphi)$  と書けば, 関数項級数  $\frac{4}{R^2 \theta} \sum_{j=1}^{\infty} G_j(r, \varphi)$  もまた  $\Omega_{R, \theta}$  で一様収束している。

ところで, 関数列  $\{\exp(-\alpha \beta_j^2 t)\}$  は  $t \geq 0$  なる各  $t$  に対して単調減少かつ一様有界なので, アーベルの定理から関数項級数  $\frac{4}{R^2 \theta} \sum_{j=1}^{\infty} G_j(r, \varphi) \exp(-\alpha \beta_j^2 t)$  は  $\Omega_{R, \theta} \times [0, \infty)$  で一様収束する。

よつて, 問題 (1.1) の形式的な級数解 (1.7) が,  $\Omega_{R, \theta} \times [0, \infty)$  で一様収束することが証明された。また,

$\lim_{r \rightarrow +0} u(r, \varphi, t) < +\infty$  であることは,  $\Re \lambda > -\frac{1}{2}$  のときのベッセル関数のポアソン型積分表示 (参考文献 [3])

$$J_\lambda(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\lambda}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(z \cos \eta) \sin^{2\lambda} \eta d\eta \quad (2.6)$$

から明らかである。

(証明終)

### 3 解の一意性

変数分離法を用いて解を構成したが、この方法に因らなければならないという必然性はないので、解は(1.7)だけに限るのかという「解の一意性」の問題が残る。

**定理2** 定理1と同じ仮定の下で、 $u_1(r, \varphi, t)$  と  $u_2(r, \varphi, t)$  がともに問題(1.1)の連続な解ならば、 $u_1(r, \varphi, t) \equiv u_2(r, \varphi, t)$  である。

**証明**  $u(r, \varphi, t) = u_1(r, \varphi, t) - u_2(r, \varphi, t)$  とおくと、 $u_1(r, \varphi, t)$  は(1.1)で  $u_0(r, \varphi) = 0$  とした問題の解である。

ここで、 $t \geq 0$  に対して

$$E(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^R \int_0^\theta r |u(r, \varphi, t)|^2 dr d\varphi \quad (3.1)$$

とおけば、

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= 2 \int_0^R \int_0^\theta r u(r, \varphi, t) \cdot \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(r, \varphi, t) dr d\varphi \\ &= 2 \int_0^R \int_0^\theta r u(r, \varphi, t) \cdot \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] dr d\varphi \\ &= -2 \int_0^R \int_0^\theta \left( r \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r} \left| \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|^2 \right) dr d\varphi \leq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

が成り立ち、

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \frac{dE}{dt}(s) ds \leq E(0) = 0 \quad (3.3)$$

が導かれる。一方、 $E(t) \geq 0$  なので  $E(t) \equiv 0$  となり、 $u(r, \varphi, t) \equiv 0$  を得る。

(証明終)

#### 参考文献

- [1] M. Necati Özişik, Boundary value problems of heat conduction, Dover Publications, 1989.
- [2] 入江昭二・垣田高夫, フーリエの方法, 内田老鶴圃, 1984.
- [3] G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Merchant Books, 2008.

(2013.12.12 受理)