

扇形領域における熱伝導方程式に対する境界値問題 (その2)

The boundary value problem for the equations of heat conduction in a plane sector II

伊藤 成 治*
Shigeharu ITOH

要旨 : 扇形領域における熱伝導方程式に対する境界値問題の解の微分可能性に関する結果を報告する。

キーワード : 熱伝導方程式, 扇形領域

1 序論

扇形領域 $\Omega_{R,\theta} = \{(r, \varphi) \mid 0 < r < R, 0 < \varphi < \theta \in (0, 2\pi)\}$ において熱伝導方程式の境界値問題を考える。

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, & (r, \varphi, t) \in \Omega_{R,\theta} \times (0, \infty) \\ u(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi), & (r, \varphi) \in \Omega_{R,\theta} \\ u(r, 0, t) = u(r, \theta, t) = u(R, \varphi, t) = 0, & \lim_{r \rightarrow +0} u(r, \varphi, t) < +\infty \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで, α は正の定数である。

$J_\lambda(x)$ を λ 次のベッセル関数, $\beta_{\lambda,m}$ を $J_\lambda(\beta R) = 0$ の m 番目の正根としたとき, 通常の変数分離法によつて, 問題 (1.1) は形式的に次の級数解を持つことが導かれる (参考文献[1])。

$$u(r, \varphi, t) = \frac{4}{R^2 \theta} \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} K_{n,m}(r, \varphi) \exp(-\alpha \beta_{\lambda_n, m}^2 t), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{\theta} \quad (1.2)$$

$$K_{n,m}(r, \varphi) = \frac{J_{\lambda_n}(\beta_{\lambda_n, m} r) \sin \lambda_n \varphi}{J_{\lambda_n+1}^2(\beta_{\lambda_n, m} R)} \quad (1.3)$$

$$A_{n,m} = \int_0^R \rho J_{\lambda_n}(\beta_{\lambda_n, m} \rho) d\rho \int_0^\theta u_0(\rho, \xi) \sin \lambda_n \xi d\xi \quad (1.4)$$

参考文献[4] において, 問題(1.1) の連続な解の存在と一意性に関する結果を報告した。

定理 1 $u_0(r, \varphi)$ が $\Omega_{R,\theta}$ で連続かつ有界変動で, さらに整合条件

$$u_0(r, 0) = u_0(r, \theta) = u_0(R, \varphi) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +0} u_0(r, \varphi) < +\infty \quad (1.5)$$

を満足すれば, 問題 (1.1) の形式的な級数解 (1.2) - (1.4) は $\Omega_{R,\theta} \times [0, \infty)$ で一様収束する。

*弘前大学教育学部数学教室
Department of Mathematics, Hirosaki University, Hirosaki 036-8560, Japan

注意 $u_0(r, \varphi)$ に対する仮定を, 参考文献[4] では「区分的に滑らか」としたが「連続かつ有界変動」としても同様の結果が成り立つ。

定理 2 定理 1 と同じ仮定の下で, $u_1(r, \varphi, t)$ と $u_2(r, \varphi, t)$ がともに問題(1.1) の連続な解ならば, $u_1(r, \varphi, t) \equiv u_2(r, \varphi, t)$ である。

引き続き本論文では, (1.2)–(1.4) の微分可能性に関する結果を報告する。

定理 3 定理 1 と同じ仮定の下で, $p + q = 0, 1, 2$ および $\ell = 0, 1$ に対して, 2 重関数項級数

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^q K_{n,m}(r, \varphi) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \exp(-\alpha \beta_{\lambda_n, m}^2 t) \quad (1.6)$$

は, $\Omega_{R, \theta} \times (0, \infty)$ で一様収束する。従って,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^q \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell u(r, \varphi, t) \\ &= \frac{4}{R^2 \theta} \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^q K_{n,m}(r, \varphi) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \exp(-\alpha \beta_{\lambda_n, m}^2 t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

が成り立つ。

2 準備

$J_\lambda(x)$ の零点と $J_{\lambda+1}(x)$ の零点とが互いに分離しあう性質 (参考文献[3]) から, 2 重数列 $\{\beta_{\lambda_n, m}\}_{n,m=1}^{\infty}$ を狭義単調増加な単数列 $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ に並び替えることができる。この並び替えにより, 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して, ただひとつの組 $(n(j), m(j)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ が定まって, $A_{n(j), m(j)}$ を A_j , $K_{n(j), m(j)}(r, \varphi)$ を $K_j(r, \varphi)$ と書けば, 定理 1 より関数項級数 $\sum_{j=1}^{\infty} A_j K_j(r, \varphi) \exp(-\alpha \beta_j^2 t)$ もまた $\Omega_{R, \theta} \times [0, \infty)$ で一様収束している。

補助定理 1 $\lambda \geq 0$ かつ $x > 0$ のとき,

$$|J_\lambda(x)| \leq C_\lambda = \begin{cases} 1, & \lambda = 0 \\ 1 + \frac{1}{\lambda\pi}, & \lambda > 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$|J'_\lambda(x)| \leq C'_\lambda (1 + x^{-1}), \quad C'_\lambda = \max\{\lambda C_\lambda, C_{\lambda+1}\} \quad (2.2)$$

$$|J''_\lambda(x)| \leq C''_\lambda (1 + x^{-1} + x^{-2}), \quad C''_\lambda = \max\{|\lambda - 1| \lambda C_\lambda, (2\lambda + 1) \lambda C_{\lambda+1}, C_{\lambda+2}\} \quad (2.3)$$

が成り立つ。

証明 (2.1) は, ベッセル関数の積分表示 (参考文献[3])

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\lambda\eta - x \sin \eta) d\eta - \frac{\sin \lambda\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda\eta - x \sinh \eta} d\eta \quad (2.4)$$

より明らか。(2.2) と (2.3) は, 漸化式

$$xJ'_\lambda(x) = \lambda J_\lambda(x) - xJ_{\lambda+1}(x) \quad (2.5)$$

と (2.1) から直ちに導かれる。

(証明終)

補助定理2 ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $j \geq N$ に対して,

$$\frac{1}{|J_{\lambda_{n(j)+1}}(\beta_j R)|} \leq \sqrt{2\pi\beta_j R} \quad (2.6)$$

が成り立つ。

証明 $x \rightarrow +\infty$ のときの漸近表示 (参考文献[2])

$$J_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\lambda}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (2.7)$$

より, ある $B > 0$ と $L > 0$ が存在して, 任意の $\lambda \geq 0$ と $x \geq L$ に対して,

$$\left| J_\lambda(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\lambda}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \right| \leq Bx^{-\frac{3}{2}} \quad (2.8)$$

が成り立つ。従って, N を $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{B}{\beta_N R} \leq \frac{\sqrt{7}-1}{4}$ となるようにとれば,

$$\left| \cos\left(\beta_j R - \frac{\lambda_{n(j)}}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \right| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{B}{\beta_j R} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{B}{\beta_N R} \leq \frac{\sqrt{7}-1}{4} \quad (2.9)$$

と

$$\left| \sin\left(\beta_j R - \frac{\lambda_{n(j)}}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \right| = \sqrt{1 - \cos^2\left(\beta_j R - \frac{\lambda_{n(j)}}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right)} \geq \frac{\sqrt{7}+1}{4} \quad (2.10)$$

が成り立つ。故に,

$$\begin{aligned} J_{\lambda_{n(j)+1}}(\beta_j R) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_j R}} \cos\left(\beta_j R - \frac{\lambda_{n(j)}+1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O\left((\beta_j R)^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_j R}} \sin\left(\beta_j R - \frac{\lambda_{n(j)}}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O\left((\beta_j R)^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

より,

$$\sqrt{\frac{\pi\beta_j R}{2}} |J_{\lambda_{n(j)+1}}(\beta_j R)| \geq \left| \sin\left(\beta_j R - \frac{\lambda_{n(j)}}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \right| - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{B}{\beta_N R} \geq \frac{1}{2} \quad (2.12)$$

を得る。すなわち, (2.6) が導かれた。

(証明終)

3 定理3の証明

補助定理1より, 任意の $j \geq 1$ に対して,

$$|A_j| \leq (2 + \pi) R^2 \sup_{(r, \varphi) \in \Omega_{R, \theta}} |u_0(r, \varphi)| \equiv \hat{C} \quad (3.1)$$

が成り立つ。また,

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^q K_j(r, \varphi) = \beta_j^p \lambda_{n(j)}^q \frac{J_{\lambda_{n(j)}}^{(p)}(\beta_j r) \sin(\lambda_{n(j)} \varphi + \frac{q\pi}{2})}{J_{\lambda_{n(j)}+1}^2(\beta_j R)} \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \exp(-\alpha \beta_j^2 t) = (-\alpha)^\ell \beta_j^{2\ell} \exp(-\alpha \beta_j^2 t) \quad (3.3)$$

なので, $j \geq N$ ならば, 補助定理1と補助定理2より, 任意の $r_0 > 0$ と $t_0 > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} & \left| A_j \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^q K_j(r, \varphi) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\ell \exp(-\alpha \beta_j^2 t) \right| \\ & \leq 12\pi \left(1 + (\beta_1 r_0)^{-1} + (\beta_1 r_0)^{-2} \right) R \max\{1, \alpha\} \hat{C} \\ & \quad \cdot \lambda_{n(j)}^q \left(\lambda_{n(j)}^2 + \lambda_{n(j)} + 1 \right) \beta_j^{p+2\ell+1} \exp(-\alpha \beta_j^2 t_0) \\ & \leq \tilde{C} \lambda_{n(j)}^q \left(\lambda_{n(j)}^2 + \lambda_{n(j)} + 1 \right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \beta_j^2 t_0\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

と評価される。ここで,

$$\tilde{C} = 12\pi \left(1 + (\beta_1 r_0)^{-1} + (\beta_1 r_0)^{-2} \right) R \max\{1, \alpha\} \left(\frac{p+2\ell+1}{\alpha t_0 e} \right)^{\frac{p+2\ell+1}{2}} \hat{C}$$

である。

従って, $\beta_{\lambda_{n,1}} R > \lambda_n$ であること (参考文献[3]) を用いれば,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=N}^{\infty} \lambda_{n(j)}^q \left(\lambda_{n(j)}^2 + \lambda_{n(j)} + 1 \right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \beta_j^2 t_0\right) \\ & \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_n^q \left(\lambda_n^2 + \lambda_n + 1 \right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \beta_{\lambda_{n,m}}^2 t_0\right) \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^q \left(\lambda_n^2 + \lambda_n + 1 \right) \exp\left(-\frac{3\alpha}{8} \beta_{\lambda_{n,1}}^2 t_0\right) \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{8} \beta_{\lambda_{1,m}}^2 t_0\right) \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^q \left(\lambda_n^2 + \lambda_n + 1 \right) \exp\left(-\frac{\alpha}{4R^2} \lambda_n^2 t_0\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{8} \beta_{\lambda_{n,1}}^2 t_0\right) \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{8} \beta_{\lambda_{1,m}}^2 t_0\right) \\ & \leq \left(\max_{x>0} x^q (x^2 + x + 1) \exp\left(-\frac{\alpha}{4R^2} x^2 t_0\right) \right) \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{8} \beta_{\lambda_{n,1}}^2 t_0\right) \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{8} \beta_{\lambda_{1,m}}^2 t_0\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

を得るので, 定理3を証明するためには, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{8}\beta_{\lambda_n,1}^2 t_0\right) \quad (3.6)$$

と

$$\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{8}\beta_{\lambda_1,m}^2 t_0\right) \quad (3.7)$$

が収束することを示せばよい。

ところで、 n が十分大きいとき、

$$\beta_{\lambda_n,1}R = \lambda_n + 1.855757 \cdot \lambda_n^{\frac{1}{3}} + O\left(\lambda_n^{-\frac{1}{3}}\right) \quad (3.8)$$

であること (参考文献 [3]), および漸近表示(2.7)より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_{\lambda_{n+1},1} - \beta_{\lambda_n,1}) = \frac{\pi}{R\theta} \quad , \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (\beta_{\lambda_1,m+1} - \beta_{\lambda_1,m}) = \frac{\pi}{R} \quad (3.9)$$

が成り立つ。

従って、

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{8}\left(\beta_{\lambda_{n+1},1}^2 - \beta_{\lambda_n,1}^2\right) t_0\right) \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{4}\beta_{\lambda_1,1}\left(\beta_{\lambda_{n+1},1} - \beta_{\lambda_n,1}\right) t_0\right) < 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

および

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{8}\left(\beta_{\lambda_1,m+1}^2 - \beta_{\lambda_1,m}^2\right) t_0\right) \\ & \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\alpha}{4}\beta_{\lambda_1,1}\left(\beta_{\lambda_1,m+1} - \beta_{\lambda_1,m}\right) t_0\right) < 1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

から、ダランベールの判定法によって、級数(3.6)と(3.7)が収束することが示された。

謝辞：本研究は JSPS 科研費 24540156 の助成を受けたものです。

(2013. 8. 5 受理)

参考文献

- [1] M. Necati Özişik, Boundary value problems of heat conduction, Dover Publications, 1989.
- [2] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics (Volume 1), Wiley-VCH, 1989.
- [3] G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Merchant Books, 2008.
- [4] 伊藤成治, 扇形領域における熱伝導方程式に対する境界値問題, 弘前大学教育学部紀要, 第109号, 13-16, 2013.