

高校生のための理論物理学入門

Introduction to Theoretical Physics for High School Students

佐藤 松夫*・野崎 洋輔*

Matsuo SATO・Yosuke NOZAKI

要旨

これまでの理論の限界に直面した際、その限界を超えた原理を設定し無矛盾性を通じて理論を構築するという理論物理学の面白さを、高等学校学習指導要領までの知識の範囲内で高校生に伝えることができるか検討する。

キーワード：高等学校学習指導要領、理論物理学、特殊相対性理論、ローレンツ変換

1. 導入

理論物理学の対象は物理学であるが、手法は数学である。高等学校の知識では学習内容との兼ね合いもあり、理論物理学とはどのようなものなのかを知らずに大学受験を迎える生徒がほとんどである。ところが、大学入学の際に、数学科か、物理学科かのどちらに所属するか決めなければならない大学が多い。高等学校の段階で理論物理学とはどのようなものかを体験させることで、数学好きの高校生に将来の選択の幅を広げることができる。

今回の研究の目的は、本物の理論物理学の面白さを高校生に伝えることが可能かを検討することである。これまでの理論の限界に直面し、その限界を超えた原理を設定することで一から理論を組み立てていくプロセスを特殊相対性理論^{1, 2, 3)}を通して体験してもらう。高校生向けの特殊相対性理論の解説本などは出版されているが、理論物理学の方法で基本法則を構築するという立場で書かれているものはあまりない。また構築の過程で、結果を知っていなければわからないような不自然な仮定をおいている場合も多い。本論文では特殊相対性理論の解説というよりも特殊相対性理論の構築を通じて理論物理学の面白さを伝えることを目的としている。

本論文の構成は以下の通りである。2章では研究の結果である、高校生のための理論物理学として、特殊

相対性理論の導入を提示する。3章では2章の結果を得るために行った、高等学校学習指導要領と大学で学習する特殊相対性理論との比較について記述する。特に、そのギャップを埋めるためのいくつかの方法について例示する。

2. 高校生のための理論物理学入門

2-1 ニュートン力学

特殊相対性理論を学ぶ上で欠かすことのできないものが、特殊相対性理論以前の標準理論であったニュートン力学である。ニュートン力学における時間の概念は、地上での経験的事実の拡張と理想化に基づく。ニュートンは前提として絶対時間を仮定している。絶対時間とは、同じ構造の時計を用いて時間を計る限り、その示す時刻は時計の位置や運動の状態に依らない、という概念である。

ニュートン力学の原理は、ニュートンの運動の三法則としてまとめられている。

- (1) 慣性の法則：力が作用しない粒子は等速直線運動する。
- (2) 運動方程式：粒子の質量を m 、加速度を a 、それに働く力を f とすると、 $ma=f$ が成立。
- (3) 作用反作用の法則：2粒子間にはたらく力の大きさと方向は同じで向きは反対である。

* 弘前大学教育学部理科教育講座

Department of Natural Science, Faculty of Education, Hirosaki University

ここで、 $ma=f$ において、力 $f=0$ とおくと $ma=0$ となり $a=0$ つまり等速直線運動となる。これは第二法則が第一法則を含んでいるように思われるが、実際はそうではない。第一法則では力が作用しない粒子が等速直線運動をするような座標系の存在を要請している。このような座標系を慣性系と呼ぶ。第一法則のもとに、その慣性系で第二法則、第三法則が成り立つことを要求する。

ある慣性系 S で力が働いていない粒子が速度 v で等速直線運動をし、その位置を x とする。その系 S に対し、速度 u で等速直線運動している系 S' から粒子を観察する位置を x' とする。

このとき

$$x' = x - ut \quad \dots\dots(*)$$

と表される。時間変化 Δt を考える。この時の変化の関係は

$$\Delta x' = \Delta x - u\Delta t$$

となる。両辺を Δt で割ると、

$$v' = v - u \quad \dots\dots(**)$$

を得ることができる。系 S で等速直線運動している粒子は系 S' でも等速直線運動していることとなり、系 S' も慣性系であるといえる。また、速度 u は任意にとることができるので、系 S' という慣性系は無限にとることができる。このようにある慣性系から他の慣性系へ写す変換をガリレイ変換という。

ガリレイ変換(*)でニュートン力学の基本法則(1)、(2)、(3)は不変である。このように変換で基本法則が不変であることを理論に対称性があるという。対称性は理論物理学において基本法則を構築する強い指導原理である。相対性理論では、ガリレイ変換でなく、次節で導くローレンツ変換で基本原理が不変であることを要請する。

2-2 特殊相対性理論

マイケルソンとモーレイは実験により光の速さを測定した。地球は自転をしており、静止系ではないので東西や南北で測定される光の速さは異なるはずである。しかし、結果はどの方向でも測定される光の速さは同じであった。これは光の速さは観測者の状態に依らず一定であることを意味する。これを光速不変性という。このことはガリレイ変換によって与えられる速度の加法則(**)と矛盾している。そのためニュートンが定義した観測者、すなわち慣性系の定義を見直

す必要が出てくる。

認めざるを得ない実験事実である、光速不変性をもとに慣性系の定義をし直そう。光をある慣性系の2か所で観測する。簡単のために空間と時間合わせて2次元の場合を考える。2点 (t_1, x_1) と (t_2, x_2) の距離 Δl は、 $(\Delta l)^2 = (x_2 - x_1)^2$ と表される。光速不変性により、光の速度が一定値 c となるので $\Delta l = c(t_2 - t_1)$ が成り立つ。この2式から Δl を消去すると、 $c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x)^2$ という関係式が得られる。これは時間座標と空間座標のみの関係式となっている。そこで、光線で結ばれる任意の時間空間の2点に対し、常にこの関係が成り立つ時間空間座標系を慣性系とする。

新たに慣性系が定義されたので、特殊相対性理論の枠組みで慣性系から他の慣性系へと写す変換を導く。ある慣性系 S の2点 (t_1, x_1) と (t_2, x_2) で光を観測する。また、異なる慣性系 S' からみた系 S の対応する2点を (t'_1, x'_1) と (t'_2, x'_2) とする。各慣性系では、

$$-c^2(\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = 0 \quad \dots\dots①$$

$$-c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = 0 \quad \dots\dots②$$

が成り立っている。ここで簡単のために光速 c を1とおく。この c を復活させるためには $t \rightarrow ct$ とすればよい。

系 S での点を系 S' に写す変換を求める。すでにガリレイ変換(*)は矛盾しているので変換を拡張する必要がある。ニュートン力学では絶対時間の概念を暗に認めていたが、変換を拡張するために時間は絶対的なものではなく、空間座標と同様に変換を受けると仮定する。つまり、

$$t' = at + bx \quad \dots\dots③$$

$$x' = ct + dx \quad \dots\dots④$$

と表す。この仮定が正しければ、矛盾なく各係数 (a, b, c, d) が唯一つに決定されるはずである。

まず、 S' 系の原点の動きを S 系で見ると、④式より、

$$x = -\frac{c}{d}t$$

となる。これは系 S' が系 S に対して、速度 $-\frac{c}{d}$ で等速直線運動をしているといえる。以下、この速度を v とする。

$$v = -\frac{c}{d} \quad \dots\dots⑤$$

(t_1, x_1) と (t'_1, x'_1) について③式から、

$$t'_1 = at_1 + bx_1$$

(t_2, x_2) と (t'_2, x'_2) について③式から、

$$t'_2 = at_2 + bx_2$$

差をとると、

$$\Delta t' = a\Delta t + b\Delta x \quad \dots\dots⑥$$

が得られる。

同様に④式から

$$\Delta x' = c\Delta t + d\Delta x \quad \dots\dots⑦$$

が得られる。

これを②式へ代入し、整理すると、

$$(-a^2 + c^2)\Delta t^2 + (-b^2 + d^2)\Delta x^2 + (-2ab + 2cd)\Delta t\Delta x = 0$$

この式と①式が等価であるので係数が比例する。係数を比較し整理すると、

$$ab = cd$$

$$a^2 - c^2 = -b^2 + d^2$$

となる。ここで⑤式で c を消去する。

$$ab = -d^2v$$

$$a^2 + b^2 = d^2(1 + v^2)$$

さらに $\frac{a}{d} = a'$, $\frac{b}{d} = b'$ とおくと、

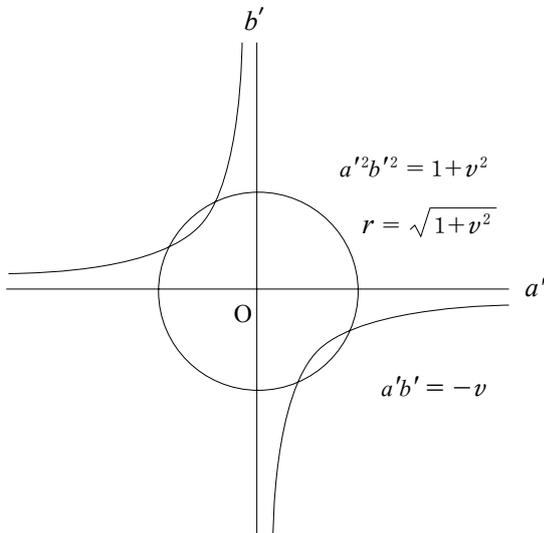
$$a'b' = -v$$

$$a'^2 + b'^2 = 1 + v^2$$

の2式が得られる。

これを a' - b' 座標に表すと図のようになる。上記の2式は双曲線 $a'b' = -v$ と半径 $\sqrt{1+v^2}$ の円で表すことができ、 (a', b') の解が4組あることが図形的に分かる。これらの2式を解くことで、 (a, b, c, d) の組み合わせが以下になる。

$$(a, b, c, d) = d(\pm 1, \mp v, -v, 1), d(\pm v, \mp 1, -v, 1) \quad (\text{複合同順})$$



まだ変換は唯一に定まっていない。さらに無矛盾性を追求する。系 S' から系 S への逆変換を考える。 (a, b, c, d) は v の関数なので、 $(a, b, c, d)(v)$ と表す。⑥式と⑦式から逆変換の式を表すと、

$$\Delta t = \frac{d}{ad - bc} \Delta t' + \frac{-d}{ad - bc} \Delta x'$$

$$\Delta x = \frac{-c}{ad - bc} \Delta t' + \frac{a}{ad - bc} \Delta x'$$

ここで $ad - bc = 0$ の時は逆変換が存在しないので $(a, b, c, d)(v) = d(\pm v, \mp 1, -v, 1)$ は不適である。系 S' が系 S に対して速度 v で等速直線運動しているので、逆に系 S は系 S' に対して $-v$ で運動している。よって、この式は $(a, b, c, d)(v)$ に $-v$ を代入したもの、

$$\Delta t = a(-v)\Delta t' + b(-v)\Delta x'$$

$$\Delta x = c(-v)\Delta t' + d(-v)\Delta x'$$

と等価でなければならない。ここで、

$$(a, b, c, d)(-v) = d(\pm 1, \pm v, v, 1) \quad (\text{複号同順})$$

係数を比較すると

$$(a, b, c, d)(v) = d(1, -v, -v, 1)$$

と符号が定まる。また、 $d = \pm \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ を得る。

さらに、系 S' が静止している場合、つまり $v = 0$ の場合を考えると、 t' と t , x' と x が一致しなければならないので、 d の符号は+のみが正しい。これで変換の係数 (a, b, c, d) が唯一に定まった。

以上より、慣性系から慣性系へ写す変換は、

$$t' = \gamma(t - vx)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

で表されることになる。(ただし、 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ 。) この変換をローレンツ変換という。

ここでローレンツ変換を我々の日常における速さ、つまり光の速さよりかなり遅い場合で考えてみる。これを非相対論的極限と呼ぶ。光速 c を復活させるとローレンツ変換は、

$$ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x)$$

$$x' = \gamma(x - vt)$$

である。 v を光速 c より十分小さい値とする。つまり、

$$\frac{v}{c} \rightarrow 0 \text{ である。}$$

この時、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \rightarrow 1$$

となる。これを適用するとローレンツ変換は、

$$t' = t$$

$$x' = x - vt$$

となり、これはガリレイ変換(*)と一致する。実は、特殊相対性理論の非相対論的極限はニュートン力学に帰着するのだが、それが座標変換にもあらわれている。このように物理学は新しい、より一般的な理論が過去の理論を含む形で発展している。

先ほどの導出で、

$$d = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

とあったが、 d は実数でなければならないので、

$$1 - v^2 \geq 0$$

が要請される。ここで光速 c を復活させると、

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \geq 0$$

これを整理すると、

$$c^2 \geq v^2$$

つまり、

$$c \geq |v|$$

となる。これは慣性座標系の速度が光速を超えられないことを意味する。

3. 高等学校指導要領との対応

今回は特殊相対性理論を高等学校の1～2年生でも理解できるように工夫した。入門的な内容にするため、高校生でも理解しやすいように空間を一次元にして時間とあわせて二次元で論じている。また、位置ベクトルの時間微分で速度を導くのだが、微分は2年生

で学習する内容である。高校基礎物理でもはじめは微分を用いずに距離と速度の関係を説明している。今回は運動が等速直線運動なので任意の時間変化に対し、 $\Delta x = v\Delta t$ が成り立つ。これを用いることで微分を使わずに速度を導いた。

ローレンツ変換を導く際に行列を用いると逆変換などが容易に導けるのだが、行列は高校数学Cで取り扱われる内容である。行列を用いてしまうと高校3年生で行列を学習した生徒以外は理解ができないので、一次変換の計算を行列を使わずに行った。後に行列を学習した時に、ローレンツ変換の逆変換を考える際に行う作業が、行列の逆行列を導き出す操作であることに気がつくはずだ。また、方程式の解の個数が分かりやすいように図を用いた。

これらの工夫により、光に関する実験結果とニュートン力学の矛盾に対峙し、理論を拡張することで整合性のある理論を構築するという理論物理学の面白さを高等学校指導要領の範囲内で記述することができた。また、ローレンツ変換がガリレイ変換を含んでいることや、計算の過程で導かれた式から光速を超えられないことが分かるのは生徒にとっても興味深いだろう。よって、本論文では本物の理論物理学の面白さを高等学校学習指導要領の範囲内で高校生に伝えることが可能であると結論する。

文献

- 1) A. Einstein, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (1905)
- 2) A. アインシュタイン (著), 内山 龍雄 (翻訳) 相対性理論 岩波書店 (1988)
- 3) 小玉英雄 一般相対性理論 岩波書店 (2000)

(2014. 8. 4 受理)