

「数学的な考え方」についての一考察 —小学校教員のための捉え方の提案—

A Study of ‘Mathematical Way of Thinking’ —For Elementary School Teachers—

中 野 博 之*

Hiroshi NAKANO*

要 旨

「数学的な考え方」の育成は算数の学習指導では長年の課題となっている。そこで、先行研究を基に小学校教員の立場を考慮して「数学的な考え方」を捉え直すこととした。その結果、「数学的な考え方」を『もっと簡潔にしよう』、『もっとわかりやすくしよう』、『同じと見よう』という心情から発した動機を基に算数・数学を創造していく活動（行為）。と捉えることとした。さらに、この活動を支える要件として「既習の内容に置き換える」ことを重要視することとした。また、授業での問いの視点として「解決の方法をよりよくする」「問題を解決した後問題の本質的なことを明らかにしようとする」「問題を解決した後これまでに知っているものごととの関連を知ろうとする」「どのように考えたことが解決の役に立ったのかをふり返る」を設定した。

キーワード：数学的な考え方、反復（スパイラル）

1. はじめに

現在施行されている平成20年版学習指導要領は、基礎的、基本的な知識・技能の確実な習得と、思考力・判断力・表現力を育むことの両方をバランスよく重視することを求めている¹⁾。しかし、思考力については、その育成を重視することが主張されたのは平成20年版学習指導要領に限られたことではない。算数においては「思考力・判断力・表現力」に相当する「数学的な考え方」の育成について長年に渡り重視され、かつ、課題とされてきている。

「数学的な考え方」の育成が算数において長年課題となっている原因の1つには、算数を指導する者にとって「数学的な考え方」の内容と育成方法が不明確であることが考えられる。小学校教員は基本的に全教科を指導しており、その負担を考えると内容や方法が明確になっていないものに対しては指導が消極的になってしまいかねない。

一方、平成20年版学習指導要領では算数科の改訂

基本方針において以下のように「反復（スパイラル）」を強調した。

「数量や図形に関する基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着を図る観点から、算数・数学の内容の系統性を重視しつつ、学年間や学校段階間での内容の一部を重複させて、発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による教育課程を編成できるようにする²⁾

「～指導内容をなだらかに発展させたり、学び直しの機会を設けたりするなど、発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による学習指導を進められるようにする。」²⁾

こうした「反復（スパイラル）」は、その記述から、小学校の教員に先取り学習や前の学年の学習内容の復習といった問題演習の文脈で捉えられる可能性が高い。その上、「学び直し」という言葉から、内容等が不明確な「数学的な考え方」の育成よりも、知識・技能の習得を目的としたドリル練習を小学校教員が重視する可能性も否定できない。このような状況では、

*弘前大学教育学部数学教育講座

Department of Mathematics, Faculty of Education, Hirosaki University

「数学的な考え方」の育成については何も改善されず、これまでと同じ様に課題を残したままとなってしまうかねない。

そこで、本稿では、「数学的な考え方」について、先行研究や過去の文献を参考にその育成方法と内容を改めて整理し、算数を指導する小学校教員の立場を考慮した「数学的な考え方」の捉え方を提案することとした。さらに、捉え直した「数学的な考え方」に基づいて授業での問いの視点も提案することとした。その上で、スパイラルについても「数学的な考え方」の育成の文脈で捉え直すこととした。このように「数学的な考え方」を小学校教員向けに捉え直すことで、算数における思考力の育成に貢献できると考えている。

2. 「数学的な考え方」

これまで「数学的な考え方」については、算数・数学教育に携わる者のみならず数学者によって研究され多くの成果が生み出されている。その一方で、その成果によって様々な見解が示されており、その範囲も数学の内容から学習者の態度に及ぶ広いものとなっている。こうしたことが、前述にもある様な「数学的な考え方」の内容と育成方法が小学校教員には不明確なものとして捉えられてしまうことの原因と考えられる。そこで、そのような先行研究の様々な見解の中から、以下の4つの点に着目して本研究の目的に合致するものを選択することとした。

- ア. 活用する能力に関わるもの
- イ. 数学の特性を踏まえたもの
- ウ. 授業構成が想定でき授業の具体的な「問い」の言葉に置き換わりやすいもの。
- エ. 過度に細分化されていないもの。

アについては、現代的な教育課題である、いわゆる「キー・コンピテンシー」に関わる「言語や知識、技術を相互作用的に活用する能力」に関連するものである。毎年実施されている全国学力・学習状況調査でも「主として『活用』に関する問題³⁾」として出題されるものであり、小学校教員には関心のあるものといえる。このような「活用する能力」は全く別のように見えるものを「同じ」と見て解決していく能力と捉えることができ、異なるものと同じものと見ようとする数学の特性にも大に関わるものともいえる。

イについては算数の授業を考える以上は、算数という教科において特にその育成が要請されるものを考慮する必要があると考えたことによる。

ウについては、「数学的な考え方」を授業が想定できる形で小学校の教員に示すことで算数の授業改善に直結させることができると考えたことによる。

エについては、「数学的な考え方」を細かく分類し、カテゴリ化されたものを提案することは小学校教員には複雑で捉え難いものになり、さらに、分類されたもの全てを授業で扱わなければならないと誤解される恐れもあると考え、できるだけシンプルな分類をしているものを提案したいと考えたことによる。

その結果、秋月、中島、杉山、松原の4名の見解が上記の観点に沿っていると考えられた。そこで、この4名の見解を基に「数学的な考え方」の育成方法と内容を以下に整理することとした。

(1) 「数学的な考え方」の育成方法

秋月は「数学的な考え方」の育成方法に関連して次のように述べている。

「数学的な考え方と称するものは、数学活動一表現された数学だけではなく、数学を創り出していく、思考も含めて一のすべてを通して体験的に総合的にむしろ直観的に捉えられるものではないかと思っている。」⁴⁾

中島も、「数学的な考え方」の育成方法に関して、秋月の上記の記述を引用した上で以下のように述べ、秋月の意見に賛同をしている。

「ねらいが創造的な活動を可能にするというところにあり、その方法としては、日常の学習活動を通して創造的な実践として体験的に積み重ねていくほかにないという見解と軌を一にするものである」⁵⁾

また、松原は「考え方を伸ばす」ことについて以下のように述べている。

「考え方なるものを抜き出して教えることが可能であるはずがない。～(中略)～課題を数学的に解決する力を伸ばすには、解決すべき活きた課題に当面させて正しく考え抜かせることにある。『考え方を伸ばす』には日々の教室活動をこのようにするより他に方法はあるまい。」⁶⁾

さらに、杉山は考える力の育成には「考える場を与える」ことが必要であることを指摘した上で次のように述べている。

「考える力は考える経験だけで伸びるのではなく、よい考え方を学ぶことによって伸びるということである。～(中略)～考える力を伸ばすためには、子どもを考える場に置き、実際に考えさせると同時に、成功に導くことが欠かせない。それだけではな

く、同時に、そこで用いられた考え方に目を向けさせなければならない。」⁷⁾

こうした、秋月、中島、松原、杉山の指摘は「数学的な考え方」の育成方法について、小学校教員が授業で大切にすべきことをわかりやすく指摘したものと考えられる（ウに関わる）。4名に共通していることは、「数学的な考え方」の育成方法は考える経験を積ませる他にないとしていることである。そして、経験に加えて松原は「正しく考え抜かせる」ことを挙げ、杉山はそこで用いられた考え方を省察活動によって顕在化させていくことを挙げている。このようなことから、「数学的な考え方」の育成方法は、授業で考える場を設定することとともに、正しく考えることを指導すること、正しい考え方を省察することによって顕在化させることと捉えられる。

(2) 「数学的な考え方」の内容

次に、正しく考えること、省察させるべき考え方はどのようなことなのか、つまり、「数学的な考え方」の内容がどのようなものであるのかが問題となる。しかし、杉山は以下のように述べ、その概念が曖昧なものであるとしている。

『「数学的な考え方」は指導要録の評価の観点の1つとしてあげられている。したがって、明確に規定された概念のように思われるが、必ずしもそうではない。人によって、場合によって、いろいろに解される曖昧な概念である。』⁸⁾

こうしたことから「数学的な考え方」の内容は定義することが難しく、算数・数学において考える経験を豊富に積んだ各個人が各自の中に帰納的に把握していくものであると考えられる。このようなことも「数学的な考え方」が小学校教員にとって捉え難いものになってしまう原因と考えられる。

しかし、杉山が指摘しているように、子どもにただ考えさせているだけでは算数・数学で育てるべき考える力は育てることができない。そのような中で、中島は以下のように述べ算数・数学として考えるべき方向を示した。

『「数学的な考え方」は、算数・数学にふさわしい創造的な活動ができることを目指したものであることを述べた。これを引き起こす原動力として、簡潔、明確、統合といった観点が考えられ、それらの観点から『改善せずにはすまされない』という心情で課題を把握することが第一の要件である。』⁹⁾

その上で中島は『「統合」というのは、実は数学に

特有な考えではなく、広く科学的な見方・考え方の基盤にある重要な考えでもある。』⁹⁾と述べ「簡潔」「明確」「統合」の中の「統合」について重要視した。また、杉山は「数学的な考え方」の育成のためには「答えが出て考えるべきことはたくさんある」として「解決の方法をよりよくする」「問題の本質的なことを明らかにしようと努力する」「これまでに知っているものごととの関連を知ろうとする」等の活動を挙げた上で、「いろいろなものが統合化されていることは、思考の節約といった意味からも価値のあることである」⁷⁾と述べ、中島と同様に「統合」の重要性を指摘した。

これらの見解は「数学的な考え方」の内容を「簡潔」「明確」「統合」という3つの視点で考えており「数学的な考え方」を過度に細分化しているものではない（エに関わる）。その上で、「統合」という数学の目指す目的について述べ（アイに関わる）、さらに授業での具体的な活動の様相を示し、小学校教員が「数学的な考え方」の内容を捉えるに当たって理解しやすいものと考えられる（ウに関わる）。

(3) 「数学的な考え方」と「数学的な考え」

前述のように中島は「数学的な考え方」を、「簡潔、明確、統合」という観点から引き起こされる算数・数学にふさわしい創造的な活動、つまり、行為とした。さらに、中島は「数学的な考え方」を算数・数学の独自のものとする要件として「数学的な考え（アイデア）」を挙げた。そして、中島は「数学的な考え（アイデア）」について次のように述べ、それを子どもたちに意識させることの重要性を指摘した。

「数学的に何かを創造するという過程においては、何かしら『数学的なアイデア』が鍵となって働き、局面の打開を図っているはずである。このような数学的なアイデアが含まれているということが、『数学的な考え方』の要件であることができる」⁹⁾

また、杉山も「考え方」と「考え」の違いについて以下のように述べている。

「～『考え方』という以上、そこには考える方向や考える順序のようなものを含んでいる。それに対して『数学的な考え』と言っている場合は、数学的な考え方を含んだもっと広いものを意味しているようである。英語で表現すると、『数学的な考え方』が mathematical way of thinking,あるいは、mathematical mode of thinking となるのに対して、『数学的な考え』

は mathematical idea としてよいだろう。idea という言葉は、考え方のみならず、概念をも含んだ広い意味をもつ。『考え方』がプロセスや手続きの意味あいをもつに対して『考え』の方は中身をも含んだニュアンスをもっている。⁸⁾

これらの分類を基にすると、「考え方」は行為や手続きといったものを示すことに対して、「考え」は考え方だけではなく、解決の鍵となる着想、概念、原理といったものを含んだものと捉えることができる。そして、中島はこの「数学的な考え（アイデア）」の内容や性質を捉えることについては「範囲が広く、なかなか困難なこと」であり、「各事例をもとに、具体的に読みとって頂くことが適当といえよう。」として簡単には定義できないものとした⁹⁾。

その一方、松原は「数学的に考える」ことについて、数学的であるという特性を考慮した上で次の3つの段階にまとめた⁶⁾。

- ①対象を集合として捉える。
- ②その集合に対し、別の都合のよい数学的な構造をもった第二の集合へ変換する。
- ③第二の集合の特性を使って解決に導く。

これは、数学的な着想について述べているもので、中島、杉山の分類に従えば「数学的な考え」に当てはまるものと考えられる。

実際に問題を解く時、問題を自分のわかっているものに置き換えることを試みるが、これは「都合のよい集合への変換」と捉えられる。これを小学生なりの言葉で表現すれば「今までにこれと同じような算数の問題を解いたことはないかな」「今までに算数で習ったことを活用しよう」「今までに算数で習ったことに換えられないかな」となり、既習の内容に置き換えること（活用すること）と捉えられる。また、前述にもあるように、杉山は「答えが出て考えるべきことはたくさんある」として、「解決の方法をよりよくすること」「問題の本質的なことを明らかにしようと努力すること」「これまでに知っているものごととの関連を知ろうとすること」等を示した。これらは「どのような既習の内容に置き換えられたのか」を問題を解決した後に省察することと考えられる。

以上のことから、松原の捉え方は、数学の特性を踏まえたものであり（イに関わる）、活用についての捉えであり（アに関わる）、「数学的な考え」を小学校の教員にとって授業をイメージしやすい言葉に言い換えることができるものでもあり、杉山が指摘した上述の授業での具体的な活動とつながっていくものとも考え

られる（ウに関わる）。

3. 「数学的な考え方」の捉え方と問いの視点

これまでのことを踏まえ、「数学的な考え方」を小学校の教員が捉えやすくするために、本稿では以下のように捉えることを提案する。

『もっと簡潔にしよう』（簡潔）、『もっとわかりやすくしよう』（明確）、『同じと見よう』（統合）という心情から発した動機を基に算数・数学を創造していく活動（行為）

そして、この算数・数学を創造していく活動を数学的なものとして支える要件としての「数学的な考え」の中で「算数の授業での既習の内容に置き換える」ことを重要視する（図1）。

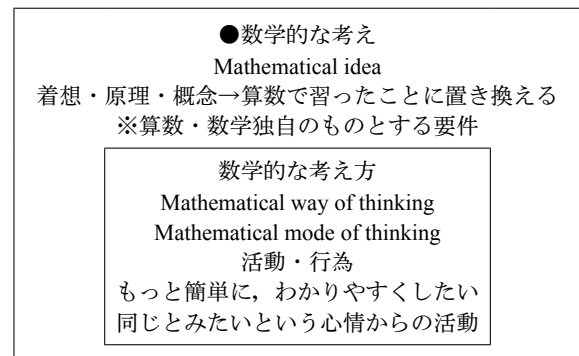


図1

さらに、「数学的な考え方」は実際に考える経験を通すことでしか育成できないということに基づいて、「数学的な考え方」を授業において子どもが経験するための問いの視点として以下の4つを提案する。

- a) 解決の方法をよりよくする。
(例)「もっと簡単にできないかな」「もっとわかりやすくできないかな」
- b) 問題を解決した後に問題の本質的なことを明らかにしようとする。
(例)「みんなの解決方法に共通していることは何か」「じゃあ、ここを変えても同じ結果になるのかな」「じゃあ、ここを変えたらどうなるんだろう」
- c) 問題を解決した後これまでに知っているものごととの関連を知ろうとする。
(例)「このような考え方を前にもやったことがなかったかな」「前もこれと同じ様なことをしなかったかな」「前に学習したことのどれを使っているのだろうか」

d) どのように考えたことが解決の役に立ったのかを振り返る。

(例)「どのように考えたからうまく解決できたのかな」「自分の今日の学習を振り返ってみよう」「友だちと自分の考え方を比べてみよう」

a) の「よりよく」することは簡潔・明確に関連しており、既習の内容に統合されることによって簡潔・明確にもなるので統合にも関連する。b) c) は当面している問題がどのような既習の内容に置き換えられたのか(既習の内容を活用したのか)を明らかにするもので統合と関連し、さらに、既習の内容に統合されることによって簡潔・明確になるので簡潔・明確にも関連する。つまり、a) b) c) は中島、杉山が共に重視した統合を既習の内容に置き換えること(既習の内容を活用すること)と捉え、そのことを授業の中で教師が問うための視点となるようにしたものである。

d) は杉山が重視した省察活動を授業の中で位置づけるものである。省察の対象とされるものは、「簡潔に」「わかりやすく」「同じと見よう」という心情から発した活動そのもの、及び、どのような既習の内容に置き換えたのか(活用したのか)という着想そのものとなる。

このような視点を基にした問いは、授業において子どもが自力で問題について考える時間が保障されていることが前提となる。また、こうした問いは、当初は教師が子どもに問うものであるが、算数の授業を積み重ねることを通して、いずれは教師が問わなくても子ども自身が授業の中で問えるようにしていくことはいうまでもない。

4. 「数学的な考え方」と「反復(スパイラル)」

次に「3」での「数学的な考え方」の捉え方を基に「反復(スパイラル)」について考える。

清水は「反復(スパイラル)」について小学校学習指導要領解説算数編にある「発達や学年に応じた反復(スパイラル)による教育課程により、理解の広がりや深まりなど学習の進歩が感じられるようにすること」²⁾が必要条件であるとした上で「子どもたちが学習の進歩を実感できる機会として生かすことが強く要請」されると指摘した¹⁰⁾。

これは既習の内容が目の前の問題との関連で見直されることが「反復(スパイラル)」の本質であることを示唆していると捉えられる。前述のa) b) c) d)の視点を基にした問いを授業に取り入れることによ

て、既習の内容の価値が見直され、当面している問題場面が既習の内容との関連で統合される。それは「理解の広がりや深まり」につながっていく。そして、再確認された既習の内容は応用範囲が広く、より深く理解された形で子どもに定着していく。これは、まさしく「反復(スパイラル)」の目指していることにもつながる。

つまり、「3」での捉え方や授業での問いの視点は、ドリル練習や先取り学習だけが学習内容を定着させていく方法ではなく「数学的な考え方」の育成そのものが知識・技能の定着に深く関わることを示唆し、小学校教員にスパイラルの認識を新たにさせるものと期待できる。

5. おわりに

小学校教員にとって「数学的な考え方」が理解されやすいものとなるように先行研究を参考に「数学的な考え方」の捉え方を提案した。

杉山は考える力の育成に関して以下のように述べ、教師の姿勢の重要性を指摘した。

「よりよく考えることのできる人間として、教師はその範を示し、当然問うべき問いをつねに問い続けることが必要である」¹¹⁾

また、前述のように松原は「数学的な考え方」を育成する方法は考える経験を積ませる他にないとしている。こうしたことから、「数学的な考え方」の育成には、算数を指導する教員自身が、まず、正しく考える経験を積み、その経験を基に子どもに考え方の見本を示すことが重要であることがわかる。したがって、小学校の教員が前述の「3」の視点を捉えて授業設計できるようになるためには、教員自らが「3」による「数学的な考え方」の経験を積んでいくことが必要となる。今後は上記のことを踏まえ、小学校教員を対象とした研修会の展開案を考えることに取り組んでいくこととする。

【付記】

- ・本研究は、平成26年度科学研究費補助金基盤研究(C)(課題番号25350184)「数学的な考え方の育成に焦点をあてた現職教員研修のための教材開発とその実証的研究」(研究代表者中野博之)による支援を受けている。

参考文献

- 1) 文部科学省 (2008) 小学校学習指導要領解説 総則編 東洋館出版社 p.3
- 2) 文部科学省 (2008) 小学校学習指導要領解説 算数編 東洋館出版社 p.3 p.4 p.5
- 3) 国立教育政策研究所 (2014) 平成26年度 全国学力・学習状況調査解説資料 p.6
- 4) 秋月康夫 (1966) 数学的な考え方とその指導 東京教育大学附属小学校初等教育研究会「教育研究」第21巻 5号 pp.8-9
- 5) 中島健三 (1974) 「数学教育の目標とカリキュラム構成のための原理」現代教育体系 4 数学と思考 第一法規出版 pp.124-125
- 6) 松原元一 (1977) 数学的な見方考え方 国土社 pp.201-202 p.190
- 7) 杉山吉茂 (2012) 「考える力を育てる算数の指導」確かな算数・数学教育をもとめて 東洋館出版社 p.162 p.164
- 8) 杉山吉茂 (1995) 「数学的な考え」小学校算数実践指導全集 8 数学的な考え方を育てる指導 日本教育図書センター p.24
- 9) 中島健三 (1981) 算数・数学教育と数学的な考え方 金子書房 p.51 p.130 pp.90-91
- 10) 清水静海 (2008) 「これからの算数科の教育に期待されていること」新しい算数研究 No. 447 東洋館出版社 p.1
- 11) 杉山吉茂 (1977) 『『考える』能力や態度を伸ばす指導』教育学研究全集13「考える」ことへの教育 第一法規 pp.54

(2015. 1.13 受理)