

扇形領域におけるポアソン方程式に対するノイマン問題

The Neumann problem for the Poisson equations in a plane sector

伊 藤 成 治*

Shigeharu ITOH*

要 旨

扇形領域におけるポアソン方程式に対するノイマン問題の連続な解の存在とその一意性に関する結果を報告する。

キーワード：ポアソン方程式，ノイマン問題，扇形領域

扇形領域 $\Omega_{R,\theta} = \{(r, \varphi) \mid 0 < r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \theta \in (0, 2\pi)\}$ において，次のポアソン方程式に対するノイマン問題

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = g(r, \varphi), & (r, \varphi) \in \Omega_{R,\theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, 0) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \theta) = \frac{\partial u}{\partial r}(R, \varphi) = 0, & (r, \varphi) \in \Omega_{R,\theta} \\ \lim_{r \rightarrow +0} u(r, \varphi) < +\infty \end{cases} \quad (1)$$

を考える。この問題は非定常ストークス方程式の境界値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \Delta v + \nabla p = f, & \nabla \cdot v = \rho \\ v|_{t=0} = v_0 \\ v|_{\varphi=0} = v|_{\varphi=\theta} = v|_{R=0} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

と密接に関連している（参考文献 [5]）。

まず，参考文献 [4] に従って，有限フーリエ変換と有限ハンケル変換及びそれらの反転公式を用いて形式的な級数解を求めてみる。

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\theta} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \text{ に対して，}$$

*弘前大学教育学部数学教育講座

Department of Mathematics, Faculty of Education, Hirosaki University

$$\bar{w} = \bar{w}(r, n) = \int_0^\theta w(r, \varphi) \cos \lambda_n \varphi d\varphi \quad (3)$$

とおくとき、(1) の第1式の両辺に $\cos \lambda_n \varphi$ をかけて、 φ に関して0から θ まで積分すると、(1) の第2式より、

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{\lambda_n^2}{r^2} \bar{u} = \bar{g} \quad (4)$$

を得る。

次に、 $J_\lambda(z)$ を λ 次のベッセル関数として、 $J'_{\lambda_n}(\beta R) = 0$ の m 番目の正根 $\beta_{m,n}$ ($m = 1, 2, 3 \dots$) に対して、

$$\bar{w} = \bar{w}(m, n) = \int_0^R \bar{w}(r, n) r J_{\lambda_n}(r \beta_{m,n}) dr \quad (5)$$

とおくとき、(4) の両辺に $r J_{\lambda_n}(r \beta_{m,n})$ をかけて、 r に関して0から R まで積分すると、(1) の第2式より、

$$-\beta_{m,n}^2 \bar{u} = \bar{g} \quad (6)$$

を得る。従って、順に

$$\bar{u}(r, n) = \frac{2}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{m,n}^2 \cdot (-\beta_{m,n}^{-2} \bar{g}(m, n))}{\beta_{m,n}^2 - \frac{\lambda_n^2}{R^2}} \cdot \frac{J_{\lambda_n}(r \beta_{m,n})}{J_{\lambda_n}^2(R \beta_{m,n})} \quad (7)$$

と

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{\theta} \cdot \frac{2}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{m,0}^2 \cdot (-\beta_{m,0}^{-2} \bar{g}(m, 0))}{\beta_{m,0}^2} \cdot \frac{J_0(r \beta_{m,0})}{J_0^2(R \beta_{m,0})} \\ &\quad + \frac{2}{\theta} \cdot \frac{2}{R^2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\beta_{m,n}^2 \cdot (-\beta_{m,n}^{-2} \bar{g}(m, n))}{\beta_{m,n}^2 - \frac{\lambda_n^2}{R^2}} \cdot \frac{J_{\lambda_n}(r \beta_{m,n})}{J_{\lambda_n}^2(R \beta_{m,n})} \cdot \cos \lambda_n \varphi \\ &= \frac{1}{\theta} \left[\frac{2}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\beta_{m,0}^2} \right) \cdot \frac{J_0(r \beta_{m,0})}{J_0^2(R \beta_{m,0})} \cdot \bar{g}(m, 0) \right] \\ &\quad + \frac{2}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\beta_{m,n}^2} \right) \cdot \frac{\beta_{m,n}^2}{\beta_{m,n}^2 - \frac{\lambda_n^2}{R^2}} \cdot \frac{J_{\lambda_n}(r \beta_{m,n})}{J_{\lambda_n}^2(R \beta_{m,n})} \cdot \bar{g}(m, n) \right] \cos \lambda_n \varphi \end{aligned} \quad (8)$$

が導かれる。

定理 $g(r, \varphi)$ が $\Omega_{R, \theta}$ で連続かつ有界変動で、さらに

$$\int_0^\theta d\varphi \int_0^R g(r, \varphi) r dr = 0 \quad (9)$$

を満足すれば、問題 (1) の形式的な級数解 (8) は $\Omega_{R, \theta}$ で一様収束する。従って、 $u(r, \varphi)$ は $\Omega_{R, \theta}$ で連続になる。

また、 $u_1(r, \varphi)$ と $u_2(r, \varphi)$ がともに問題 (1) の連続な解ならば、 $u_1(r, \varphi) \equiv u_2(r, \varphi)$ が成り立つ。

証明 $g(r, \varphi)$ の r に関するディニ展開および φ に関するフーリエ余弦展開

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\theta} \left[\frac{2}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(r\beta_{m,0})}{J_0^2(R\beta_{m,0})} \cdot \bar{g}(m, 0) \right] \\ & + \frac{2}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{m,n}^2}{\beta_{m,n}^2 - \frac{\lambda_n^2}{R^2}} \cdot \frac{J_{\lambda_n}(r\beta_{m,n})}{J_{\lambda_n}^2(R\beta_{m,n})} \cdot \bar{g}(m, n) \right] \cos \lambda_n \varphi \end{aligned} \quad (10)$$

$$\bar{g}(m, n) = \int_0^\theta \cos \lambda_n \varphi d\varphi \int_0^R g(r, \varphi) r J_{\lambda_n}(r\beta_{m,n}) dr \quad (11)$$

は仮定より、 $g(r, \varphi)$ に一様収束する (参考文献 [2], [3])。

さて、ベッセル関数の零点の性質 (参考文献 [3]) から、2重数列 $\{\beta_{m,n}\}$ を単調増加な単数列 $\{\beta_j\}$ に並び替えることができる。この並び替えにより、 $\{\beta_j^{-2}\}$ は単調減少かつ一様有界になるので、アーベルの定理から問題 (1) の形式的な級数解 (8) は $\Omega_{R, \theta}$ で一様収束することが導かれた。

後半部分は、楕円型方程式の一般論から明らかである。

(証明終)

謝辞：本研究は JSPS 科研費 24540156 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] M. N. Özişik, Boundary value problems of heat conduction, Dover Publications, 1989.
- [2] N. K. Bary, A treatise on trigonometric series, Pergamon Press, 1964.

- [3] G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Merchant Books, 2008.
- [4] C. J. Tranter, Integral Transforms in Mathematical Physics (3rd edition), Methuen and Co. Ltd., 1966.
- [5] 伊藤成治, 扇形領域における熱伝導方程式に対する境界値問題, 弘前大学教育学部紀要, 第109号, 13-16, 2013.
- [6] 伊藤成治, 扇形領域における熱伝導方程式に対する境界値問題 (その2), 弘前大学教育学部紀要, 第110号, 17-21, 2013.

(2015. 1. 7 受理)