「科学的精神の開発」を目指す数学科の学習指導のありかた

～三平方の定理の証明を事例として～

05GP209　教科教育専攻、数学教育専修　　　木野田　一也
指導教官　　　太田　伸也

目次

序章

本研究の目的と方法

0-1　研究の動機及び目的

何故数学を学ばなければならないのかという疑問から発し、その意義は「科学的精神の開発」にあると考えるようになった。これまで文献等を調べながら考えてきたが、実際の教材にこのことを具体化するまでには至らなかった。そこで本研究では、三平方の定理の証明を実際の教材とし、「科学的精神の開発」を目指す学習指導のあり方について考察しようと考えた。

ところで何故教材として三平方の定理の証明を選んだのかというと、学習指導要領での三平方の定理の証明の扱いが「生徒の興味関心に応じて取り扱うこととし、その結果として証明ができることを知る程度とする。」[1]となっていたことに対し、この証明の中にも授業として取り扱う価値があるのではないかと思ったことと、ペリー運動のことを調べているとき、ペリーが講演で当時行われていたユークリッド原論の教授の仕方を批判していることを読んだことがきっかけである（後でペリーの講演についての概観を述べるのでここでの詳しい内容は避ける)。その非難は量を導入せずに体系を順序立てて行っている原論の内容をそのままの形で教授していることに対してであったとされている。量を導入しないとはどういうことなのか、そして原論の体系通りに教授するとはどういうことなのかを検証するために原論の一巻を実際に証明していった。第一巻は 48 個の命題がありそれを命題 1 から順に 48 個の証明を原論の本文に沿ってしていったが、証明していくのがものすごく大変だった。特に印象的だったのが長さや大きさ、そして面積といった辺の量や角の量、平面の量を表す語句が一言もでてこないことと、一つ一つの証明が至極面倒なことである。この辺や角、平面の量については明確な量としてはでてこないが＜辺 A と辺 B は等しい＞＜△A と△B は等しい＞というように表現がなされている。そして一つ一つの証明が至極面倒というのは、証明が丁寧に綴られているのと、現在では直観で等しいと認めてもいいとしているところですら論理によって証明されている部分があるということである。このようなこともあり証明をしていく上でかなりの時間を要したが、命題 47 を証明し終えたときに前の 46 個の命題が三平方の定理を証明するためにしてきたのだということがわかり、ものすごく感動した。ここまで証明してみて、原論をそのままの形で教授してはならないと講演していたペリーの意図が少し見えたし、これらが三平方の定理を教材として扱ってみたいと思った理由である。

「科学的精神の開発」について、小倉金之助は、「教育の意義は科学的精神の開発にある。」[2]と主張しており「科学的精神とは二つまたは多くの現象があるとき、経験的事実を基礎としてその原因を追究し、それらの現象の間に関係あるや否やを求め、もし関係ありとせばいかように関係あるや、その間の方法を発見しようとする努力、精神である」[2]と述べ、「人生における科学的精神、いかにして之を開発すべきか。これすなわち生活上、最も重大な問題であり、同時にまた教育上の根本問題であらねばなりません。」[2]と強調している。その上で「数学教育における科学的精神の開発の中心となるものが関数観念であり、これが核心となるので関数の関係を徹底してこそ数学教育の有意義である」[2]と述べているのである。そこで本研究はこの小倉金之助の主張を受けて次のことを目的とする。

三平方の定理の証明を事例として「科学的精神の開発」を目指すための指導法を明らかにする。

0-2　研究の方法

0-1 で述べた目的のために、次の方法によって研究を進める。

（ア）「科学的精神の開発」とはどういうことなのかを文献を元に明確にする。

（イ）三平方の定理の証明を題材としてどのように指導すれば「科学的精神の開発」を目指せるのかを事例的に考察する。

0-3　本研究の構成

第 1 章では、小倉がどのような経緯で「数学教育の意義は科学的精神の涵養にある」という結論に行き着いたのかについて、社会的背景及びジョン・ペリーの講演を概観し、当時の日本の数学教育の現状を概観しながら述べていく。

第 2 章では、教育の目的や人格の陶冶の方法を、課題を解決していく際に生じる思考過程に即しながら考察を加えていき、ここで「科学的精神の開発」を目指すとはどういうことなのかを明確にする。

第 3 章では、(現在知られている）三平方の定理の証明方法のうちのいくつかを示し、本研究で扱っていく分割合同を利用した証明法の背景となっているヒルベルトの平面の面積理論について考察をし、分割合同を利用した三平方の定理の証明を授業で扱う際の展開可能性を示す。

第 4 章では、実際に行った授業での生徒の活動を第 2 章の視点で見ていきながら考察を加え、「科学的精神の開発」を目指す指導法を探っていく。そして最後に今後の課題を述べる。

第１章
小倉が「数学教育の意義は科学的精神の涵養にある」と述べるに至った社会的背景

「科学的精神の開発」を目指すとはどういうことなのかを明らかにしていくが、ここでは小倉がどのような経緯で「数学教育の意義は科学的精神の涵養にある」という結論に行き着いたのかについて、社会的背景を 1-1～1-3 で概観していく。

1-1　ペリーのグラスゴーでの講演の要約

序章でも述べた通り、小倉は「教育の意義は科学的精神の涵養にある。」と主張しているが、この背景には 19 世紀初頭のペリーのグラスゴーでの講演があるといわれている。ここでは、ペリー運動までの社会的背景及び、講演の要約を見ていくことにする。

1-1-1　ペリーの講演までの社会的背景

「イギリスの中学校に、数学科が正式におかれるようになったのは、一九世紀もだいぶ進んだ一八三〇年ごろからである。イギリスの数学教育は、まず第一に、こういう点で、フランスやドイツとは比較にならないほど、遅れていたのであった。それというのも、一八世紀の終わりまでイギリスの中学校－主としてパブリック・スクールーは、上流階級の子弟の独占するところであったが、”上流階級の子弟の教養としては、数学など必要ない”という理由で数学科はおかなかったのである。ところが産業革命の結果として、新興の中産階級が現われてきた。そして中産階級の子弟が、中学校に入るようになると、数学の教養価値を認めなければならないようになった。そこで一八三〇年ごろから、中学校学科課程として数学科が確立したわけである。けれども、そのとき認められたのは”教養価値”ばかりで”実用価値”はまだ認められなかったのであるから、数学教材の中には、実用的なものはほとんど採り入れられなかった。だから非常に皮肉なことに、近代化学や近代技術のために必要な、近代的な数学の有力な観念や方法を、教材に採り入れることをしないで、ギリシアから一七世紀のはじめまで、といった古い型の数学ばかりをやっていた。それは”古い意味での”形式陶冶－”数学で推理の能力を練る”といった伝統的な信条－を表看板にして、実際には入学試験や資格試験の準備をもっぱらやっていたのであった。」[3)]

こうした他のヨーロッパ諸国よりも遅れを取っている中で中学校の数学を変えなければならないと努力をした人たちもいたが、数学界の学者などの強力な反対もあり、容易に改善することができなかったのである。そして、この状況はペリーが講演した 1901 年まではそれ程変わらなかったようである。ペリーが講演を行ったのは遅れていたイギリスの教育界が教育制度を確立していこうとする時期であった。

1-1-2　ペリーの講演の要約

この講演において、初めにペリーが「数学の教授」と題して講演をし、その講演を中心として討議が行われた。以下、文献より引用・参照しながら講演の要約をしていく。

ペリーは講演の前に資料を渡し、講演をはじめた。これは「初等数学教授要目」といわれるもので、当時の数学教育に対して反逆的といわれるほど際立った革新的なものであった。そして、この要目の目的は、一人の数学者を作るために作られたわけではなく、一般の人にも通じるように作られたのであるという。

「子供にどんな学科を教えるべきか、そしてどのようにして教えるべきかは有用性によって決めるべきで、一つのことを追求することは高尚なことであるが、やはり有用だからこそ価値がある」[4)] と言っており。

数学の学習における有用さのうちでペリー自身が心を打ったものを８つあげた。

(1) 高尚な情操を養い、心の歓びを与えること
(2) a 精神の開発、b 論理的な思考の要請
(3) 自然科学の研究にあたって、数学的武器によって助けを与えること。
(4) 試験を通過すること
(5) 自分の手や足のように、自由に使える精神的道具を、人々に与え、すべての経験をこの目的のために利用することによって、生涯を通じその教育（精神と能力の発達）と伴って、人々を進歩させること。
(6) これは多分（5）の中に含まれているかもしれない。人々を自己のためという見方から離れて、物事を考える必要を教えること。それによって現在、権勢の恐るべき束縛から、自分を救い出すことの大切さを教えること。屈服と支配のどちらを選ぶか、自分自身こそ最高の存在の一つなのだと、悟らせること。
(7) 応用科学の職業に従事する人々をして、彼らが次のような諸原理を知っていると感じさせること。応用科学は、それらの諸原理の上に建てられたものであり、そしてそれら諸原理によって発展させられたものである。
(8) 鋭い哲学研究者に対して、快適で満足な、完全な論理的助言を与え、それによって、哲学上の諸問題を、純抽象的見解から発展させようとする意図を阻止すること。[5)]

そして、これに対して当時の数学教育に当てはめ、次のような見解を加えている。

1、こういうことは、これまでにほとんど全くなく、子供の教育で無視されていたのである。
2、これも、これまで子供の教育では、多く無視されていた。
3、これも、これまでほとんど全く、子供の教育で無視されていた。
4、これは今まで無視されなかった唯一つのものであるし、また教師たちによって、本当に認められている唯一つの

ものである。
5、これはちょうど人々が読書を好むことによって、自分を教育するのと同様な能力である。
6、これは普通は、数学学習以外のこととして他の方面に任せられていた。
8、かような純抽象的な企ての不合理なことは、すでに明らかになっている。[5)]

そして、「最初に渡した「初等数学教授要目」の下では、(1)～(8)のすべての機能が、よく遂行されると信ずる。(中略) すべての子供が将来純粋数学者になるかのような初等の数学を教える現在の組織は、改められなければならない。」[6)]と言っている。

ここから先は講演内容からそれない程度に一部を省略しながら引用する。

私の経験によると、大抵の人は、発見者や知識の開拓者となることができるものである。そして個性を試す機会を与えるには、若ければ若いほどよいのだ。……どんな人にも、何らかの発見すると期待されるのだし、それから法則というものは最上の法則でも、決して完全なものではないのだ。ごく簡単な事柄についても、教師から教わったことは、さほど大したものではなく、自分自身で発見したことこそは、自分にとってほんとうの価値あるものであり、精神上永久的なものとなる。こういうことを子供の時分からから、よく注意して知らせておくがよい。子どもがすでに持っている経験を通じて教育せよ。彼をして彼自身の見地から観察せしめよ。すなわち彼自ら教育するように導け。私は学生の全数学過程を通じて、彼自身の実験によって、彼自身が作り上げた具体的な例によって、彼を教えることが大切だと思う。
われわれが絶対的正確という考えを見捨てるや否や、数学の学習において、全く新しい出発ができるのだということが解る。昔の人は算術の研究に一生を捧げた。平方根を求めたり、2 つの数を掛け合わせるのに数日を費やした。こんなようなことはみんな飛ばして、子供には掛け算は計算だけを教え、その抽象的推理はもっと進歩した時からはじめては何か大きな弊害はあるだろうか。(中略) そして今は全く手をつけない習慣になっている部分をもっと厳重に学ばせはじめてはどういうものか。正統的な事柄はずっと少なくするのである。(中略) 数学を利用しようとする人々の教育的訓練は、数学のはじめの方の部分の全てに、大いに省いたり飛ばしたりすることが大切である。(中略) 数学の研究は、その知識だけでなく科学的に考える習慣をつけ、どんな人間にも自分で考える能力を与え、そして国民に最大の幸福をもたらし、最大の実力を与えるものである。こういう意味で、どんな人でも、貧富の如何にかかわらず、数学を学ぶことが、我が国にとって最も大切なことだと確信する。論証幾何学や正統派の数学を教えている人々は、一般に、生徒がすでに持っている思考能力を破壊するばかりでなく、すべての計算、したがって自然のすべての科学的研究法に嫌いと憎しみを生じさせ、はかり知れない障害を与えていると私は考える。(中略) 世界中に行われている現在の教育方法は、全く非科学的だと考える。(中略) 一国が安全であるための基礎は、少数でなく、すべての国民を、よい教育によって、精神並びに身体的に、完全に発達させることにある。[7)]

以上がペリーの講演の要約である。小倉はペリーの講演について「自分の教育観や科学論や世界観などについて語りながら激しい情熱をもって、現在の数学教育の欠陥を突き、徹底的な改造の根本精神を説いた、戦いの言葉であった。」[8)]と閉め、ペリーが講演の中で強調したことを次のようにまとめている。

(1) ユークリッドの形態から完全に脱すること。
(2) 実験幾何学を十分に重んずること。
(3) 実験的ないろいろの測定と近似計算を重視すること。
(4) 方眼紙を盛んに使用させること。
(5) 立体幾何学をもっと多く教えること。
(6) 幾何学を利用する方面を、今までよりも多くすること。
(7) 微積分の概念をなるべく早く得させること。[8)]

1-2　当時の日本の数学教育の現状

1-1 で述べたペリーの講演が 1901 年であり、日本における中学校の数学教育がその内容にわたって厳密に統制されたのは 1902 年であった。1902 年は明治 35 年であり、この明治 35 年の教授要目は当時の文部大臣、菊池大麓と東京帝国大学教授、藤沢利喜太郎の二人の数学者の思想と方法によって決定された。それは従来の日本の数学教育を統一して一般的水準を高めたことに関しては甚だ効果的なものであった。ここでこの 2 人の数学教育に対する考え方があらわれている部分を引用してみる。

・菊池大麓

彼は「初等幾何学教科書」をあらわしたが、それはイギリスにおいて、ユークリッドの伝統に対する批判として生じた幾何学教授改良協会の教科書よりも論理的で、厳密な形式をとった。菊池は「幾何学講義」を書いた。そこで彼は次のように言っている。「幾何学と代数学とは別学科にして、幾何学には自ら幾何学の方法あり、濫に代数学の方法を用いる可からざるなり。」また、彼が幾何学で行なったユークリッド流の比および比例の理論の困難性については、「之を避けんとして、ゴマカシ的方法を用いるは、教育上甚だ宜しからず。凡て初歩の学科を授くるに当たって、困難なる条項を解くに、尤もらしく而も其実推理上大欠点ある論法を用いるほど、不良なることなし。欧米の教科書にも随分比例なきにあらず。これを酷評せば初学者の知識の足らざるに乗じてこれを詐騙するものというべし。教育上の害悪之より甚だしきものあらんや。」といっている。[9)]

・藤沢利喜太郎

彼は数学教育に熱心であって、算術や代数の教科書をあ

らわした（「算術教科書」「算術小教科書」「代数学教科書」）ばかりでなく、「算術条目及教授法」「数学教授法講義」をあらわした。最後の本は、前年彼が文部省夏期講習で行なった講義の筆記である。そこでは次のようなことが述べてある。「算術の難題を解くに、種々の図を用いる人もありますが、これは良くないことと思います。……一体問題を解くには思考力を要するものですが、これはなるべく外物の助けをからずにやるようにしなければなりません……」(中略)彼は「わが国に適する幾何学の流派」はユークリッド流で「日本の人は残らず菊池さんの幾何の流れに従うもとして」幾何学教授を考えた。初等代数で“比例する”を論じないで「幾何学の比例のところを厳密にやりたいと思います」といっている。彼にとっては幾何学は次のようなものであった。「幾何学に於いては、秋毫だも倫安許さず、徹頭徹尾厳密なる論理法に拠らざるべからざるなり。されば幾何学に於いては、極めて明らかなる事柄も、これを証明する道行を索むるために、非常に苦心することあるは、決して珍しからず。測量等に幾何学を実施応用することはしばらく措きて論ぜず、幾何学が普通教育の一大目的たる精神鍛錬上効能あるは実に焉にありて存す。」(中略) [9]

以上、2 人の数学教育に対する考え方があらわれている部分をみてきたが、明治 35 年教授要目は、この 2 人の精神によって定められたため、ペリーが排除しようとしていた古いイギリスの伝統的な形式を土台とするものになってしまったのである。

1-3　小倉の主張

1-3-1　小倉が見る当時の日本数学教育の現状

この明治35年の改造案について根本的に批判したのが小倉金之助であった。しかし、当時このような根本的な批判をした人は誰一人なく、学者たちから非難を受けたのである。その後、徐々にこの考えが認められるようになっていった。ここで、小倉は当時の数学教育の現状を 4 つの特徴を挙げて述べているがここではその部分を引用する。

・1 つ目の特徴として

中学校以上においてこれらの各分科（代数、平面幾何）は、専門の数学者が研究し得た専門の事柄の初めの方を、教育のことなど何も考えずに、ほとんどそのままの形で採り入れたものに過ぎない。たとえば幾何はユークリッドが二千年以前に組織した系統を、ほとんどそのまま襲用している。[10]

というのである。実際にユークリッド原論を見てみると、原論は体系が公理から始まり、定義をしていってそこから順番に証明によって定理を厳密に創っていっているのだが、この中には量が存在しないのである（第 6 巻に比例量が出てくる)。原論の体系をそのまま流用している理由を

今これらの数学の特徴を挙げれば、まず第一は論理的ということである。後に詳論するがごとく、従来数学教育の価値あるゆえんは、それが論理的に組織されているために、これを利用して推理力の陶冶練磨を施す点にあると考えられていた。…[10]

と言っている。この中で「推理力の陶冶練磨を施す点にある」という部分に焦点を当てると、従来の数学教育の価値は、古くからの形式陶冶説や能力説によって根拠づけられていたということである。ここでこの 2 つの説について述べておくと、

・形式陶冶説

一切の学習は、その学習内容が何であろうと、学ぶこと自身が学習者の精神に普遍的な効果を与える、というのである。精神がある働きをすると、精神そのものに、動的な一定の傾向を形成するから、最初の精神の働きの場面と事情を異にした場合でも、その働きは能力を高めるというのである。[11]

というものである。

それは、

たとえば、幾何学の学習で、ある問題を解いたとき、同時に思考力が養われるが、そこで養われた思考力は他の幾何学問題を解くときにも発揮される。また、幾何学でない問題に当面したときにも働いて、この場合は推理力が増進されたことになると主張するのである。これが形式陶冶説で、学習に際して精神に普遍的な効果をもたらすことを主張するのである。[11]

そのころの数学教育といえばまだ形式陶冶説が大半の人に受け入られており、今日周知の形式陶冶とは捉え方が異なる。この形式陶冶説は、能力説によって根拠がつけられ、そのころは有力視されていた。次に能力説について述べると

・能力説

心理学に転移（transfer,転入と呼ぶ人もある）という語がある。似たものを学習や訓練をした場合、その効果が他の場合にも影響して、直接に学習や訓練しなくても、精神的な機能や運動能力が上達することを指している。この練習の転移が形式陶冶説に心理学的な基礎を与えた。転移は動的な傾向であり、ある精神の働き、すなわち動的な傾向は転移の可能性を持つというのである。[11]

・次に 2 つ目の特徴として

各分科にはそれぞれその分科自身の研究方法があって、他の分科の研究方法を用うることを禁ずるという方針である。[10]

と言っている。これは 2 人の教育観を見ていくところで引用した菊池大麓の「幾何学と代数学とは別学科にして、幾何学には自ら幾何学の方法あり、濫に代数学の方法を用いる可からざるなり。」[9] や藤沢利喜太郎の「算術の難題を解くに、種々の図を用いる人もありますが、これは良くな

いことと思います。……一体問題を解くには思考力を要するものですが、これはなるべく外物の助けをからずにやるようにしなければなりません……」[9] からも伺える。

・3つ目の特徴として

難問題に富んだところにある。難問題によって精神的鍛錬を施さんとする考えと、高等学校への入学試験の準備と相まってここに立ち到ったのだろう。[10]

と言っているが、藤沢利喜太郎の「幾何学に於いては、秋毫だも倫安許さず、徹頭徹尾厳密なる論理法に拠らざるべからざるなり。されば幾何学に於いては、極めて明らかなる事柄も、これを証明する道行を索むるために、非常に苦心することあるは、決して珍しからず。測量等に幾何学を実施応用することはしばらく措きて論ぜず、幾何学が普通教育の一大目的たる精神鍛錬上効能あるは実に焉にありて存す。」[9] といっているところから伺える。

・4つ目の特徴として

ある少数部分を除けば純数学的であり、われわれの生活にぜんぜん無関係な非実用的であるところにある。[10]

と述べ、最後に

要するに、論理的であり、専門的孤立主義であり、非実用的である上に、難問題がすこぶる多い。これが日本数学教育の現状である。[10]

とまとめているのである。

1-3-2　小倉の主張

以上が当時の数学教育の 4 つの特徴であるが、ペリー運動を踏まえ、当時の日本の現状を踏まえて、小倉は数学教育の意義を次のように述べている。この主張は文献よりそのまま引用しておく。

われわれが近代社会の中に人間として生活を創造するためには、本当の意味での道徳も宗教も必要である。もちろん芸術も必要である。それらと共に科学もまた必要であることは言うまでもない。さて、人間生活において科学から学ばねばならぬものがいろいろある。生物学上の事実、理化学の現象、天文地震学等の事柄、これらに附帯する観察の方法、その他にもなお重要なことが多いであろう。けれどもその最も根本的なことは、科学的見方、科学的考え方、科学的精神を学ぶところにあると信ずる。

さきに述べたごとく、ここに二つまたは多くの現象があるとき、経験的事実を基礎として其の原因を突鑿し、それらの現象の間の因果の関係ありや否やを求め、もし関係ありとせばいかように関係ありや、その間の発見せんとする努力、精神、これがすなわち科学的精神である。

われわれが文化人としての生活を営む以上には、ただ雑然たる記憶、断片的な事実の集合のみではいけない。例い直接科学上の問題を扱う場合でないにしても、日常われわれの生活において行なわれる、判断や批判のうちには、科学的精神が最大の要素として働いていることは、何人も争うことができ得ないと思う。これを歴史に徴するも、近代文明の精神と特徴とは科学的精神の発揚にあった。(中略)

われわれは道徳、芸術等とともに、科学的精神なしに生活をしえないのである。人間の生活、人間の理想を真によく発展せしめるためには、科学的精神を高調せねばならぬのである。

人生における科学的精神、いかにしてこれを修養しこれを開発すべきか。これ生活上最も重大な問題の一であってまた同時に科学教育の根本問題でなければならない。

私はさきに自然科学との交渉がいかに親密であるかを説いた。われわれはまず数学が自然を母として生まれたことを知った。次に逆には自然科学の根底には、数学の精神が横たわっていることをみたのであった。それゆえに単に伝習的な知識としての数学ではなく、本当に人として生きんがための数学であるために、数学と自然科学とは、その志を等うして進まねばならぬ性質のものである。

しかるに今や私は科学教育の本務が、科学的精神の開発にあることを論じたのである。ここにおいて私は、

数学教育の意義は科学的精神にある

と結論せざるを得ないのである。

しからば数学教授内容の核心となるべきものは、はたして何であろうか。それはもちろん科学的精神の中堅となるものでなければならぬ。それは疑いもなく函数の観念である。それゆえに

数学教育の核心は函数観念の養成にある

なんとなれば、数学上函数の観念こそ最もよく科学的因果関係を語るものであり、しかもそれと同時に最も広くかつ最も深く、人間生活と交渉を有するからである。

私はただ函数の観念が数学教育に必要であるというような、微温的なことを言うのではない。函数の観念こそ数学教育の核心である。函数の関係を徹底せしめてこそ、数学教育は初めて有意義であることを主張するのである。

しかしながら私のいわゆる函数観念とは、決して函数の解析的表示のみ指すのではない。函数観念はわれわれの生活と共にあるのである、有名なる動物学者ハックスレーは「科学は整頓された常識である」というたが、この整頓された常識の基調をなすもの、否、常識を整頓するものこそ函数観念であると思う。[12]

以上、小倉がどのような経緯で「数学教育の意義は科学的精神の涵養にある」という結論に行き着いたのかについて、社会的背景を眺めながらペリー、菊池、藤沢、小倉の主張を取り上げてきた。

第 2 章では、「科学的精神の開発」を目指すとはどういうことなのかについて本研究での捉え方を整理していく。

第２章
「科学的精神の開発」を目指すとはどういうことなのか

この章では「科学的精神の開発」を目指すとはどういうことなのかを文献をもとに明確にしていく。このことは2-3で述べることにするが、その前段階として2-1では教育の目的がどのようにして達成されるのかについて触れ、2-2では2-1で述べた教育の目的が数学教育においてどのように解釈されるのかを文献から引用しつつ数学教育の役割を見ていく。

2-1　教育の目的はどのようにして達成されていくのか

教育の目的は学習指導要領を見ると「人格の完成にある」と記述されている。しかし教育とは何かについては詳しく書かれていないし、その目的がどのようにして達成されるのかについても触れられてはいないのである。そこで教育とは何か、教育の目的がどのようにして達成されていくのかを知るために「教育学網要」[13]を参照にした。
（ただ、これから参照する本文の中には教育という語はでてこないが代わりに陶冶という語が出てくる。参照する本文の前の文に「教育と陶冶は人を育てるという意味においては同じものとみてもよい。」[13]というようなことが書かれてあるので本研究ではここに書かれてあるように教育と陶冶を同じものとして扱っていくことにする。）

陶冶は
（一）　有機的全体としての人間が
（二）　自己活動を通して
（三）「人間」として自らを形成すること、このようにして形成された状態を指す。

故に陶冶においては、人間は、
（一）その一部分ではなく全体に注目せられ
（二）容器に外部から物を満たすごとき方法によらずに「内部から」開発せられ、
（三）かくして人間の個人的状態に即した価値的な人間性即ち人格にまで高められる。

かかる意見の陶冶は、人間の心理的諸能力の練磨に関する方面と精神的（客観的）価値の習得に関する方面との二方面に分かれる。
まず第一の方面についていえば、すべて人間は認識（知覚・表現・思考）感情・意思等の心理的作用の部分で出てくる諸能力を有する。故に、これらを練磨して、例へば記憶力・思考力を養い、感情を純化し、真摯にして強靭な意志を招来させることが肝要である。同時に、これらの諸能力は各々独自の性質を有するにせよ、統一し調和させることが望ましい。即ち人間のあらゆる能力を全体として統一的・調和的に発達せしめなければならぬのである。ケルシェンシュタイナーは陶冶のかくのごとき方面即ち人間の心理的諸能力に関する方面の陶冶を「心理的陶冶」と呼んだ。併し普通には之を「形式的陶冶」という。そして、かかる能力の陶冶はこの能力が関係する内容を介して始めて可能である。而も能力を陶冶し得る内容は概ね真・善・美・聖その他の精神的価値を担へるもの、即ち文化である。詳言すれば、科学、道徳、芸術、宗教その他の文化財を媒介としてその中に内在する精神的価値を習得することによって人間の諸能力は陶冶せられるのである。陶冶せられた能力は併し更に精神的価値を習得するのに役立つ。蓋し能力は価値習得の結果であると同時に価値習得の条件であるから。そしてこの点を高調すれば陶冶の第二の方面が展開する。
能力に受動的と能動的との区別があるやうに、精神的（客観的）価値の習得は体験と創造との姿においておこなわれる。さらばこそ人は精神的価値の習得を通してこれを担える文化の維持と向上に貢献することが出来る。即ち人は文化を維持し、向上せしめ得るようになって始めて、精神的価値を習得したと言える。そしてかかる意味の、精神的価値の習得の方面においてもまた、科学・道徳・芸術・宗教その他の価値が考えられるから、人間陶冶に関する限り、これら諸価値の全体としての統一と調和とが、要求されることはいふまでもない。ケルシェンシュタイナーは、文化の維持と向上とに向かう上述のごとき多方面の精神的価値の習得に「価値的陶冶（実質陶冶）」という名称を与えた。あるいは習得される価値を実質的なものとして考えるときは、シュヴァルツ H、Schwartz（1866－）がいえる如く、先の形式的陶冶に対し、実質的陶冶と名づけよう。
能力に関する陶冶（形式陶冶）と価値習得に関する陶冶（実質陶冶）とは密接な関係に立つ。つまり「価値的陶冶（実質陶冶）は、陶冶の最高目標を与え、･･･能力陶冶（形式陶冶）は、その必然的な保証を与える。」のである。それは人間の諸能力はただ客観的（精神的）価値の習得のためだけに陶冶され、客観的価値の習得に役立つ限りにおいてのみ値打ちがあるからである。ここにおいて、価値習得の陶冶（実質陶冶）は能力の陶冶（形式陶冶）に対して優位をしめていると言えるが決して、教授上の「唯物主義」に陥るものではない。このようにして陶冶は「価値習得」にその本質を見出す。それは個人における「価値形成」である。ケルシェンシュタイナーは、このような実態を表現して陶冶は「文化財」によって目覚まされたできうる限り広く且つ深く、しかも個人的に組織された価値観を招来させることにあるとなした。ここでの「価値観」とは「精神的価値によって完全に透徹された意味組織」であって単に価値受容のみではなく、価値創造をもまた含む。そして「価値観」の支持者は「価値形態」としての人格であるが故に、陶冶の本質を次のように規定することができる。

「陶冶とは客観的に活動し得る、且つ自分自身を愉快に楽しみ得る統一的人格を目的として児童及び青年の素質ならびに生活圏と関係する一切の客観的価値を体験、情操、創造力の中に撥刺と取り入れることである。」上述のような統一的人格の陶冶、換言すれば「個性の限界内における人々の到達しうる限りの価値陶冶、能力陶冶」は通常「一般的陶冶」と呼ばれる。それはこのような陶冶が「すべての人の例外なく全く一般的に要求される」という意味である。…（略）[13]

文献の内容をみると、＜初めから備わっている心理的諸能力を文化に内在している精神的価値を習得して行く過程で練磨（記憶力・思考力を養い、感情を純化し、真摯にして強靭な意志を招来させること）し、これらを統一し調和させていくこと＞を形式陶冶といい、＜練磨された心理的諸能力により新たな精神的価値を習得していく過程で、文化の維持と向上に貢献が出来るようになっていくこと＞、このような精神的価値の習得を実質陶冶という。

この精神的価値（客観的価値）の習得過程で形式的陶冶（心理的諸能力の練磨）と実質的陶冶（精神的価値の習得を通して文化の維持と向上に貢献が出来ようになること）を一体としながら目指していく事を陶冶（教育）といい、この陶冶（教育）を全教育課程で行うことによって教育の最終目標である「人格の完成」を達成していくのである。

2-2　教育の目的から見る数学教育の目的

数学教育も教育の一環なのでこの目的に沿っていくことになる。それは、数学という文化財を通して教育（陶冶）していくということである。どの教科（文化財）で教育（陶冶）を施したとしても真・善・美・聖･･･の多くの精神的価値が含まれるが、数学という文化財に関して言えばこれは科学に分類されるため、数学教育は精神的価値の習得場面においては真の面が強いといえる。

それでは数学教育の目的を見ていく。教育の目的は通常次の３つの視点から論じられる。

A.　陶冶的目的
　人間形成、人間陶冶、価値観・態度・能力の育成、などに関わる目的
B.　実用的目的
　日常生活や職業などに必要・有効な知識・技能等の獲得に関わる目的
C.　文化的目的
　人類が築いて来た文化を継承したり、発展させたりすることに関わる目的[14]

このことをもとに中原は、過去にされてきた議論を整理し、数学教育の目的を次のようにまとめている。

A.　数学教育の陶冶的目的
算数・数学は真理を追求する学問であり、それへの取り組みは合理性、主体性が求められる。また、それは論理性、抽象性、記号性、創造性などに富む。したがって、算数・数学教育は以下の諸点に置いて人間形成に寄与することができる。

A1.　人格・価値観・態度などの育成
- A11.　真理・正義を重んじる人間の育成
- A12.　合理性・計画性を重んじる人間の育成
- A13.　主体性・自主性を重んじる人間の育成
- A14.　理論・形式などの美による美的情操の育成

A2.　思考力・表現力・判断力などの育成
- A21.　理論的な思考力・判断力などの育成
- A22.　抽象的・一般的な思考力・判断力の育成
- A23.　記号的・図的な思考力・表現力の育成

B.　数学教育の実用的な目的
算数・数学にける知識、技能、考え方などは日常生活や科学技術に必要不可欠であり、今日では文系分野においてもその活躍が広がりつつある。またコミュニケーションの道具として、以下の諸点が挙げられる。

B1.　日常生活に役立つ知識などを身につける
B2.　職業に役立つ知識などを身につける
B3.　より進んだ数学、他教科の理解に役立つ知識などを身につける
B4.　試験に役立つ知識などをみにつける
B5.　コミュニケーションに役立つ知識などを身につける

C.　数学教育の文化的目的
算数・数学は人間の知識がつくりだした素晴らしい文化である。この文化に接し、それを享受するのは一人ひとりの人間の固有の権利であり、さらにそれを後世に継承し、発展させる義務がある。こうした考えに立つと以下の諸点が掲げられる。

C1.　数学という文化を享受する
C2.　数学という文化を継承し、発展させる
C3.　教養として数学を身につける[14]

数学教育を施し、精神的価値を習得していく過程で心理的諸能力を錬磨することによって上記で引用したＡで書かれてあることが育ち（形式的目的）、文化の維持と向上に貢献できるようになっていく過程でＢの能力が身に付き（実質的目的）、Ｃの目的が達成されていくのである（文化的目的）。これが数学教育の目的といえる。

2-3 「科学的精神の開発」を目指すとはどういうことなのか

本研究では、小倉の「教育の意義は科学的精神の開発にあり、数学教育においては関数観念の涵養にある」[12] と述べていたことをもとに三平方の定理の証明の授業を通して「科学的精神の開発」を目指すための指導法について考察していくが、この節で「科学的精神の開発」を目指すとはどういうことなのかを述べる。そのために、

1 授業での課題の当面のさせ方について考える。
2 課題に当面したときの思考の過程（流れ）を大雑把に捉える。
3 1、2 をもとに「科学的精神の開発」とは何かを述べる。

2-3-1 授業での課題の当面のさせ方

授業での課題の当面のさせ仕方について考察していくが、その前に科学的精神と関数観念の意味をもう一度確認しておくと、

＜科学的精神とは＞
ある 2 つの事象がある時に、その 2 つの事象の関係を探ろうとするまたは結びづけようとする精神のことをいう。

＜関数観念とは＞
数学上に形となって現われた科学的精神そのもの。つまり、ある事象があるときに、その事象を数学の世界と結びづけようとする精神のこと。(課題を数学の構造に載せていこうとすること）この場合のある事象とは必ずしも数学の世界のものとは限らない。[12-1]

である。それでは授業での課題への当面のさせ方について考察していく。

ある 2 つの事象 A と B があるとする。このとき科学的精神が発動するとは A と B の関係を探ろうとすることである。例えば A に天気、B に傘を持つという事象を考えれば A と B との関係を＜雨が降るかどうか＞（場合によっては＜日照りが強いかどうか＞）と結びづける。では関数観念はというと、例えば有名人のライブを開くとする。このときライブに来てくれた人の人数を知りたいという状況があった時に、A に人（ある事象）、B に自然数（数学の世界）という事象を考え、A と B の関係を＜人数＞として結びつけようとするのである。

しかし、今の例のように科学的精神や関数観念の言葉の表面的な意味だけを捉えて当てはめている場面を用いて授業を展開しようとしても、2-1 や 2-2 で述べてきたような教育の目的や数学教育の目的は達成されないのである。それは、そこには 2 つのものを結びつけようとする時に生じるはずの思考がそれほど深く生じないからである。(今述べている思考の深さとは、ある事象を思考の対象とした時に子どもにとってその事象が難しいから深く考えなければならず、簡単だからそれ程考えなくても済むとか、その事象の抽象度が高いから深く考えなければならず、抽象度が低いからそれ程考えなくても済むといったものではなく、2 つのものを結びつけよう（関係を探ろう）とした時に子どもの人格がどのくらいまで深く表れてくるのかという意味である。)

教育の目的や数学教育の目的を達成させるためには子どもの人格が深く表れてくるような課題を設定して当面させる必要がある。

（以下、この「人格が表れる」ということを本研究では 2-1 の教育学綱要の引用の中で引いた下線部を参考にして、

> 課題に当面し解決していこうと試行錯誤している際に、心理的諸能力＜認識（知覚・表現・思考）・感情・意思等の心理的作用の部分で出てくる諸能力＞が表出してくること [13]

とし、「修正や調和をしていくこと」を、

> 働きかけられたことをよく消化し、一つの知的組織となって人間としての能力や態度の一側面となること [15]

とする。）

それは子どもを陶冶するとは、まず子ども自身の人格を前面に出させ、次に前面に出てきた子どもの人格に対して働きかけ、最後に働きかけられたことをもとにして子ども自身が修正または調和をしながら自分のなかに吸収していくことであるからである。このサイクルを繰り返しながら人格の完成を目指していくのである。

子どもの陶冶のためにはまず子どもの人格を前面に出させることが前提だが、この前面に出てきた人格の深浅によって陶冶のされ方に差が生じてくるのである。2 つのものの関係を探ろうとしている時、子どもの人格をそれ程前面に出さなくとも捉えられるような課題であったならば子どもはそれ程陶冶されない。それは、前面に出てくる子どもの人格の部分が少ないため、出てきた人格に働きかける要素が少なく、修正や調和することがそれ程多く出来ないからである。子どもを陶冶させるために子どもの人格が深く表れてくるような課題に当面させるのはそういう理由からである。

ただ、人格が深く表れてくるような課題に当面させるために闇雲に難しい事象や抽象度の高い事象に触れさせればいいというわけでもない。課題に当面した時に子どもにとってあまりにも難しい事象や抽象度の高い事象だった場合、かえって子どもの人格を出せずに終わってしまうのである。子どもにとって適度な難しさ、抽象度を持つような課題に当面させてこそ子どもの陶冶が期待できるのである。

つまり、2 つのものの関係を探ろうとする場面に当面した時、子ども自身がそれまで生きてきた中で築きあげてきた全人格、またはそれに準ずるぐらいのものを前面に出せるような課題であれば、子どもの人格が深く表れ、前面に出てきた人格に働きかけることによって子ども自身が陶冶されていくのである。

（しかし前述したような人と数を結びづけようとする課題に当面させたとしても、発達段階によっては陶冶させられ

る可能性を十分に持っている。実際に小学校１年では人数を数える際に人と自然数を結びづけさせるような授業場面が組まれていることでもわかる。ただ、本研究では対象を中学３年生に置いているので上述の例のような課題に当面させたとしても陶冶の可能性は見出せないのである。）

2-3-2　課題に当面したときの思考過程（流れ）

次に､2 つのものの関係を探ろうとしている時の思考の過程を深入りしない程度に見ていくことにする。

授業場面において 2 つのものの関係を探ろうとする場面の中で、＜問題＞と＜答え（解決方法）＞の関係を探っていく形式で与えられる場合に焦点を当て、この問題と答えの 2 つの関係を探ろうしていく時に生じる思考過程を見ていく。

ある問題が生じたとする。この問題を A と置く。そしてこの答えを Z と置く。A と Z の関係を探ってみる。しかし直接的には見つからない。そこで A を Z に導くために A を見直し A から導ける事象に置き換えてみる。これを B とする。今度は B と Z の関係を探ってみる。しかし見つからない。そこで B に置き換えただけでは見つかりそうもないので今度は B を見直し B から導ける事象に置き換えてみる。これを C とする。今度は C と Z の関係を探ってみるが見つかりそうもない。

このままだと A と Z の関係を見つけられそうにないのでまた A を見直し最初の B とは別に導ける事象に置き換えてみる。これを D とする。また D と Z の関係を探ってみる。しかし見つからない。今度は D から導ける E に置き換え E と Z の関係を探ってみる。しかし見つからない……。といった具合である（＜α＞図）

＜α＞図

・A（問題）→×→Z（答え）
↓（やり直し 1）
・A（問題）→B（置き換え 1）→×→Z（答え）
↓（やり直し 1）
・A（問題）→B（置き換え 1）
→C（置き換え 2）→×…→Z（答え）
↓（やり直し 2）
・A（問題）→D（置き換え 3）→×→Z（答え）
↓（やり直し 3）
・A（問題）→D（置き換え 3）
→E（置き換え 4）→×…→Z（答え）
↓（やり直し 4）
…
↓（やり直し n）
・A（問題）→X（置き換え l）
→Y（置き換え m）→…○→Z（答え）

というように何度も〈置き換え→失敗→置き換え→失敗…〉をし、試行錯誤をしながら徐々に A と Z の関係を探っていくのであるが、A と Z の関係や A と B の関係、B と C との関係を含む全体の流れの中で 2 つのものの関係を見つけていく際に生じるいろいろな思考や試行錯誤を通じてその人の人格が引き出され、引き出されてきた人格に作用し、修正や調和を繰り返しながらその人を陶冶していくのである。

つまり修正や調和していく過程の中に 2-1 や 2-2 で述べてきたような心理的諸能力が錬磨（形式陶冶）され、文化の維持と向上に貢献が出来るようになっていく（実質陶冶）のである。

2-3-3「科学的精神の開発」を目指すとはどういうことなのか

ここまでは陶冶を意識した課題への当面のさせ方と科学的精神を意識しながら課題へ当面したときの問題と答えとの関係を探っていく際の思考過程を大雑把に述べてきた。ここでは「科学的精神の開発」とはどういうことなのかを明確にしていく。そのために（ア）「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」16-1) と（イ）「数学的見方考え方」17) の2つの文献をもとにまとめる。

2-3-3-1　文献の引用と補足

(ア)「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」16-1) より

数学的活動
既成の数学の理論を理解しようとしたりして考えたり、数学の問題を解こうとして考えたり、あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり、数学を何かに応用して、数学外の問題を解決しようとしたりする、数学に関係した思考活動を、一括して数学的活動と呼ぶことにして、そのいろいろな時点での意味を、現実の世界と数学の世界のかかわり合いの上から、次の第1図（模式図1）のような模式図で考えて見よう。16-1)

①

a現実の世界と、b数学の世界とがあり、現実世界には何らかの意味で、c問題があり、解決をせまっているとする。
・ここでいうa現実の世界というのは必ずしも物理的な経験世界だけを意味するものと限る必要はない。
・「aは」bの数学の世界より抽象度の低い世界でもいい 16-2)

②

cの問題に対しては、現実の世界の経験からその、f条件・仮説を設定し、さらに数学の理論が適用可能になるように、条件・仮説を抽象化、理想化あるいは簡単化して、数学の言葉によっていいかえる。
・条件・仮説の設定や、抽象化、簡単化ということには、現実の世界についての知識とともにその人がその時点までに学んでいる数学の理論が関係してくる。過去の同種の問題解決の事例を思い起こし、場面と似かよった特徴を持つものをさがし、その適用可能性を考えるなど。こうして、いわば活動者の得意の土俵に問題をひきずりこんでいいかえたのが、g公理化の段階である。
数学を実際問題に応用する場合には、意識するとしないにかかわらず、このf→gの過程がある。16-3)

③

gの段階でまとめられた命題群は、一応検討を要する。これで当面の問題に対する解答を導くに十分なだけの条件がそろったであろうか。いいかえると、現実の世界の中の命題はすべてgの公理系の中の命題に翻訳可能であろうか。もしそうでなければ、fの条件・仮説に追加を要する。16-4)

④

gとしての公理的なものがまとまれば、それから、現実の世界についての命題と対応するgの中に命題が作れる。
・後者の命題の真偽は、gの公理系からの演繹によってのみ決定される。
・演繹にはgの公理系とともに、e数学の理論が全面的に駆使される。しかしそれでもうまく演繹が進められないという場合には、「i 新理論の開発」に進むことが必要である。16-5)

⑤

演繹によって導いた、j結論は、これに対応して、aの現実世界で経験的に収集した、kデータと、l照合させられる。
・データと結論がf→gの際に認めた近似の範囲に合えばfの仮定は否定されず、一応そのまま保持、許される範囲を越えてくいちがえばfの仮定が誤りであるとしてm仮説の修正ということになる。くいちがった場合に、fにのみ責任負わせるにはeの数学の理論からjの結論の間が演繹論理で一貫していなければならない。16-6)

このf.条件、仮説→g.公理化→j.結論→l.照合の過程で最終段階が肯定的であれば、このgの公理系は、fに対する数学的モデルと呼ばれる。

⑥

n類例の有無が検討される
・ない場合
成功した数学的モデルの典型として活動者のe数学の理論の中に組み込まれる。
・ある場合
いくつもある場合、共通の特徴をとらえて、一般化し、より基本的な命題と、副次的、ないし、従属的な命題とを区別して体系化を図る。16-7)

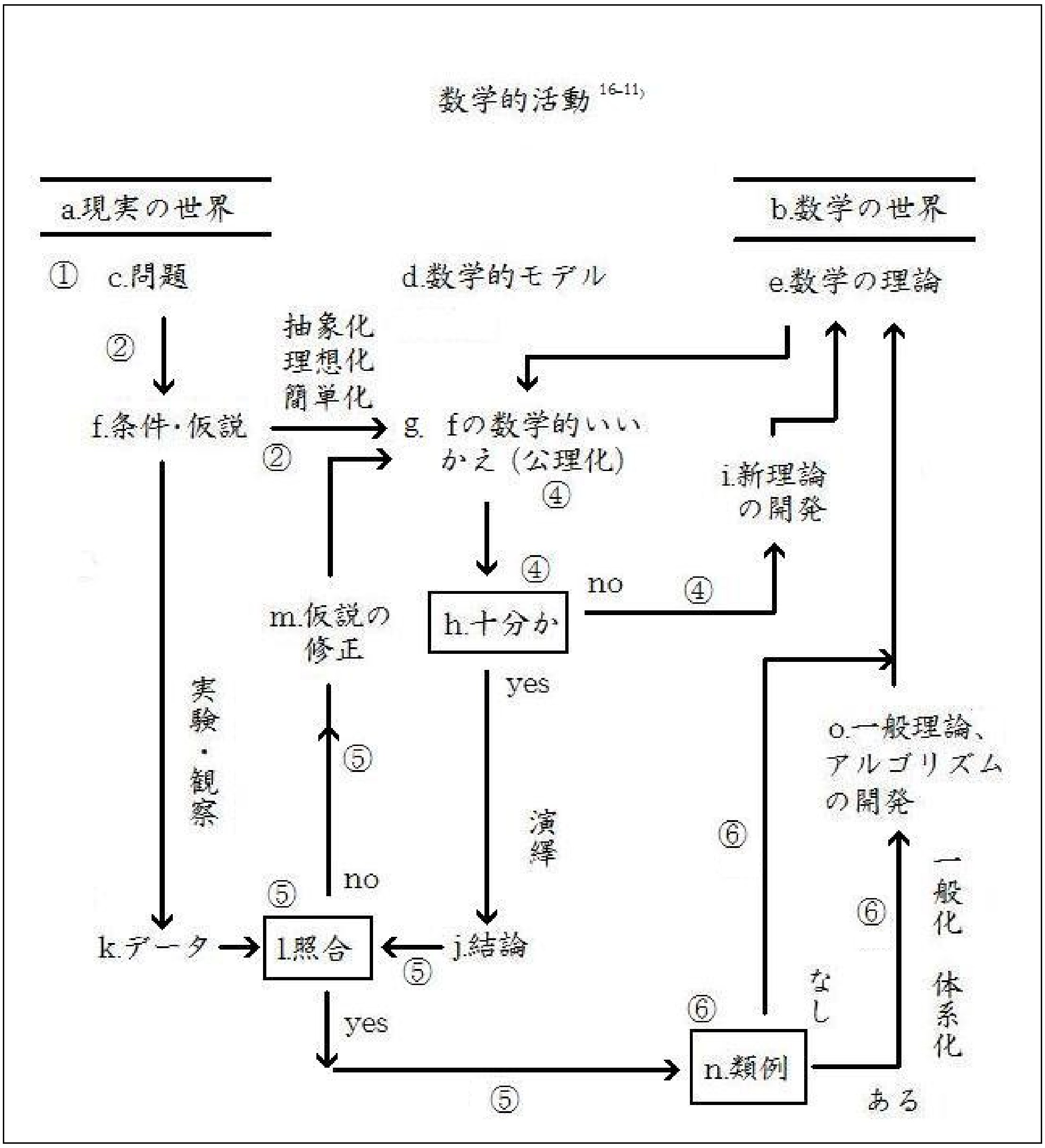
⑥

o一般の理論および、その理論による処理のためのアルゴリズムの開発に進む。
・一般に平行した記号法が開発され、演繹推理が記号の配列の変形として進められるようにアルゴリズムの開発する。
・このoの段階の結果はそのままe数学の理論の新しい要素となる。16-8)

e 数学の理論は、i の新理論、n の典型例、o の一般理論を入力として次第に豊かになっていく [16-9]

a を始点として矢印の向きに進むのが、創造的活動であって創造的な学習活動の道筋である。実際の授業にあってはその段階に応じて、この全過程の一部を取り上げているとみられる。[16-10]

（但し、①〜⑥の番号は思考過程の順番ではなく、下図＜模式図 1＞内の場面場面を説明するために筆者がつけた便宜上のものである。）
今引用した①〜⑥は課題に当面した時の思考活動の過程を追っていったものであるが、2-3-2 の＜α＞図で述べた大雑把な思考過程は「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」[16-1] より引用した①〜⑤の部分に当たるとみることができるのである。



模式図 1

（イ）「数学的な見方・考え方」[17] より⑧

> 数学的にものを見、数学的に考えるとは課題に当面し体制化し構造化する思考段階において次のことがなされることである。
>
> 一、対象を集合としてとらえる。ここで先の方を見直した第一段の抽象化がある。
> 二、その集合に対し、別に都合のよい構造を持った第二の集合へ変換する。つまり関数を設定する。ここで飛躍的な抽象化がなされることが多い。
> 三、第二の集合の特性を使って解決に導く。その後でその結論を第一の集合またははじめの課題に当てはめて課題自身の具体的な言葉に直されることも多い。[17]

⑧は松原の数学的な見方・考え方とは何かを引用した部分であるが、この中に出てくる下線部の「集合」「関数」の補足をしておくと

「集合」を

> 集合とは、ここでは「ものの集まり」ときめておこう。ここでいうものとは何であってもさしつかえはない。子どもの集まりのような具体的なものばかりではなくて、抽象的なものの集まりであってもよくて、その対象に制限はない。ただし、集合となるためには次の二つのことが要請されるものと約束しよう。
>
> 一、範囲が明確に限定されていること
> 二、集合に含まれる一つ一つの要素がはっきりと区別できること
>
> 一はある任意のものがいま考えている集合に属するもの（その集合の要素）であるかどうかということが明確であるということであって、たとえば丈の高い人の集合などは明確でない例である。集合に含まれる要素の数に制限はない。無限に多くてもよいのであって、数学ではむしろ無限集合が普通である。
> 二は要素の一つ一つがはっきりしていることで、たとえば前に述べたコップ一ぱいの水の場合は集合とはいえない。範囲ははっきりしているが、一つ一つの要素が何であるかわからない。水の一滴一滴では曖昧である。そこでこれを数の集合に変えていたのである。
> 次に大切なことは、人の集合の場合でもある程度の抽象化は必ずあるということである。人の集まりを集合とみたとき、各人の個性や特色はみな消えて、まったく同格の要素となる。いいかえると人の集まりでなくて、子どもの遊ぶオハジキの集合でも小石の集合でも同じことで、人間の集合がオハジキノの集合になってもさしつかえはない。つまり各人の個性などはみな捨てられることになるから抽象化されたことになる。
>
> 数学の対象になるには、まずこの第一段の抽象化が必要であって、水であろうが等しく数の集合におきかえられてしまうのである。[18]

とし、

「関数」を

> ひとつの集合のどの要素をとって見ても他の一つの集合のただ一つの要素が対応しているとき一意の対応という。二つの集合XとYがあってXのどの要素にもYのどれか一つの要素が対応しているとき、集合XとYの間に一意対応があるという。一対一対応も一意対応の特別な場合である。この対応が、あらゆる数学の基礎に横たわっている大切な、ものの見方である。（中略）二つの集合の一意対応のことを写像という。すなわち集合のXどの要素にも集合Yのただ一つの要素が、ある関係fによって対応しているとき、「Xの要素が写像 f によってYにうつされる」などという。[19−1]
>
> 写像には習慣的に種々の別名で呼ばれるものがある。
> 関数：集合Yが数の集合であるような写像を関数という。集合Xは数の集合であってもなくてもよい。
> 変換：XとYが同種の集合である写像を変換ということが多い。[19−2]
>
> 集合Xで発生している問題を解決するのに集合Yの性質を使う。そのためにXをYに変換する」…集合Xとしてとらえた問題を上手に解決するために適切な集合をYを見つけて、XとYとの間の関数を設定する。すなわちXとYに変換してYの性質を使ってX上の問題を解くのである。従来、関数の効用といえば問題の中にすでに含まれている関数関係を見出すことであった。このことはもとよりいま述べた関数を設定することの特殊な場合と見られるのであるが、関数の効用はむしろ問題中に含まれていない集合を見つけて新たに関数を設定するときに発揮される。[19-3]

としている。

2-3-3-2　「科学的精神の開発」とは

2-3-2の＜α＞図を骨格として「算数・数学科のオープンエンドアプローチ」[16-1]から引用した①～⑥と「数学的見方考え方」[17]から引用した⑧をもとにまとめる。

（ア）＜ある問題が生じたとする。この問題をAと置く。そしてこの答えをZと置く。AとZの関係を探ってみる。しかし直接的には見つからない。そこでAをZに導くためにAを見直しAから導ける事象に置き換えてみる。これをBとする。今度はBとZの関係を探ってみる。しかしみつからない。＞＜α＞図でいえば

A（問題）→×→Z（答え）
↓（やり直し 1）
A（問題）→B（置き換え1）→×→Z（答え）

の部分である。これは①、②と⑧の一に相当する。

（イ）次に、＜そこでBに置き換えただけでは見つかりそうもないので今度はBを見直しBから導ける事象に置き換えてみる。これをCとする。今度はCとZの関係を探ってみるが見つかりそうもない。＞は

A（問題）→B（置き換え 1）→×→Z（答え）
↓（やり直し 1）
A（問題）→B（置き換え 1）
→C（置き換え 2）→×…→Z（答え）

の部分であり、これは③と⑧の二に相当する。

（ウ）そして、＜このままだとAとZの関係を見つけられそうにないのでまたAを見直し最初のBとは別に導ける事象に置き換えてみる。これをDとする。またDとZの関係を探ってみる。＞は、

A（問題）→B（置き換え 1）
→C（置き換え 2）→×…→Z（答え）
↓（やり直し 2）
A（問題）→D（置き換え3）→○→Z（答え）

の部分であり、④と⑤、⑧の三に相当する。この後は、必要に応じて（イ）と（ウ）を繰り返しながらZ(答え)まで導いていく。

＜結論＞

課題に当面した時の思考活動を（ア）、（イ）、（ウ）と見てきたがこれを元にまとめると

「科学的精神の開発」とは

課題に当面しこれを解決していく際に、与えられた条件や仮説などを元に対象を抽象化、理想化、簡単化しながら集合として捉え、この集合を解決に都合のよい適切な数学的構造をもった集合へ置き換えて課題を解決していくという思考活動が出来るようになっていく事。

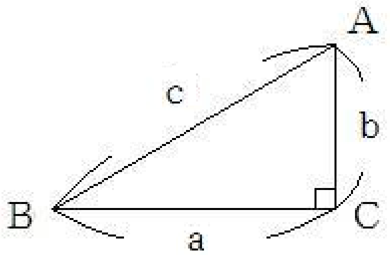
といえる。

数学教育での授業場面を考えてみると、課題と答えとの関係を探っていこうとしている時に生じる置き換えは、解決のために都合のよい数学の構造を探っていく過程と見ることができる。課題を数学の構造に載せていこうとする（数学の世界に結びづけようとする）際に生じる思考や試行錯誤により子ども自身が陶冶されていくため、この「科学的精神の開発」を目指していくことによって数学教育での目的が達成されていくのである。

第3章
三平方の定理の証明を授業で扱うための教材研究

3-1 三平方の定理の証明
ここでは三平方の定理の証明について本研究で扱っていく証明も含めていくつか取りあげる[20]。

3-1-1 図を動かして証明する方法
基本となる直角三角形を∠C＝90°の直角三角形 ABC の３辺を<0>図のように a,b,c と置き、AB を一辺として出来る正方形を c^2、BC を一辺として出来る正方形を a^2、CA を一辺として出来る正方形を b^2 とする。



<0>図

証明<1>

右の図は、直角三角形 ABC の４倍と c^2 とで一つの正方形が形作られている。それを下のように直角三角形を動かすと、直角三角形四つと a^2 および b^2 で同じ正方形になる。それゆえ c^2 と a^2+b^2 とは等しい。（中略）これを代数的に考えると、大きな正方形の１辺は a+b である。直角三角形の面積は 1/2ab である。ゆえに上の図で

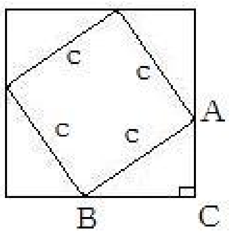
$$c^2+4(1/2ab) = (a+b)^2$$

この括弧をほどいて整頓すると

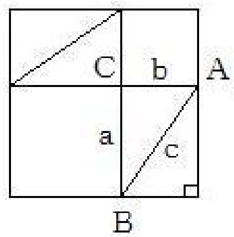
$$c^2=a^2+b^2$$

となる。[20-1]

下線部の「右の図」と「上の図」は<1-ア>図のことを、「下の図」が<1-イ>図のことである。



<1-ア>図



<1-イ>図

証明<2>

左の大きな正方形 c^2 は右のように組み変えると、二つの正方形 a^2 および b^2 の和となるのである。これを代数的に考えてみると、左の方の図で

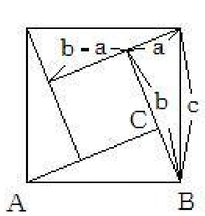
$$c^2=4(1/2ab)+(b-a)^2$$

である。これを整頓すると

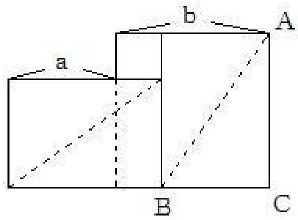
$$c^2=a^2+b^2$$

となる。[20-2]

「左の大きな正方形」「左の方の図」は<2-ア>図を、「右のように」は<2-イ>図を表している。



<2-ア>図



<2-イ>図

証明<3>

下の図で

$$1+2+5=□FEDK+□HDCA=a^2+b^2$$

である。

斜線を施してある５の部分をそのままにして、１を４の位置に、２を３の位置に動かすと、

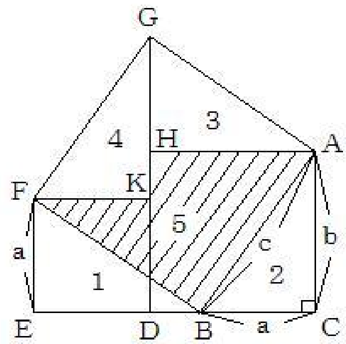
$$3+4+5=□GFBA=c^2$$

となる。すなわち

$$a^2+b^2=c^2$$

である。[20-3]

「下の図」は（3）図を表し、「1を4の位置に、2を3の位置に動かす」とは△BEF（1）を点 F を中心に 90°回転移動させた図形を△GFK（4）とし、△ABC（2）を点 A を中心に 90°回転移動させた図形を△AGH（3）とすることを表している。「1」は△BEF、「2」は△ABC、「3」は△AGH、「4」は△GFK、「5」は五角形 ABFKH を表している。



<3>図

<4>

a^2 および b^2 を適当に裁断し、これを接合して c^2 を作る証明方法

証明＜4- i ＞

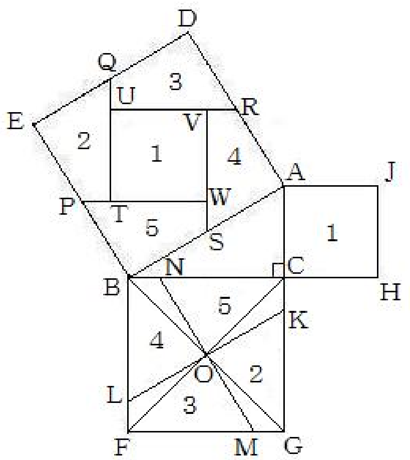
a^2の中心 O を通って、AB に平行な直線 KL、それに垂直な直線 MN で a^2を 4 つに切る。この切断線 MN に沿ってすべらせ、3 を 4 の上にあげ、2 を 5 の上に上げる。つぎに KL に沿ってすべらせ、3 を 2 の右に、4 を 5 の右にもって来る。そうすると、中空な正方形ができて、その一つの辺の長さは AB に等しい。すなわち、下の正方形 ADEB になる（作図から、KABL は平行四辺形になり、KL=AB、また O は正方形 a^2 の中心であるから MN=KL）。ここで

CA=KA－KC=LB－KC=SV－SW=WV

したがって、この中空部分 TUVW は正方形で、その一辺は CA に等しい。すなわち

$a^2+b^2=1+(2+3+4+5)=c^2$ [20-4]

「すべらせ」「上にあげ」「上に上げる」「もって来る」の 4 つの表現はすべて 1,2,3,4,5 の四角形を平行移動させることを意味しており、「1」は□ACHJ、「2」は□OKGM、「3」は□OLFM、「4」は□ONBL、「5」は□OKCM を表している。



＜4- i ＞図

証明＜4- ii ＞

DA を延長して b^2を 1、2 の 2 部分に分け、BA に平行に FM を引き、これに垂直に MN を引いて a^2を 3、4、5 の 3 部分に分ける。E から BC に平行に EP を引き、FB の延長を PE と Q で交わらせる。

四辺形 MABF は平行四辺形であるから

MF=AB、△ABC≡△EBQ

（AB=EB、および角の相等から）

であるから

BQ=BC=FB

それゆえ 5 を FQ にそってすべらせ、MF を AB に一致させると四辺形 MNBF（5）は四辺形 APQB に一致する。D から AC に平行に DT を引くと、

△MGF（4）≡△DTE（MF=DE だから）

また

UP=BE=AD（UPEB は平行四辺形）

であるから共通の辺を引き去って

UA=PD

ゆえに

△UAC（2）≡△PDT。

次に EB 上に AU に等しく ER を取り BC に平行に RS を引くと、

四辺形 HKAU（1）≡SQER

また UP=BE から UA＝RE をそれぞれ引くと、AP=BR.しかるに

AP=MN

であるから

MN=BR

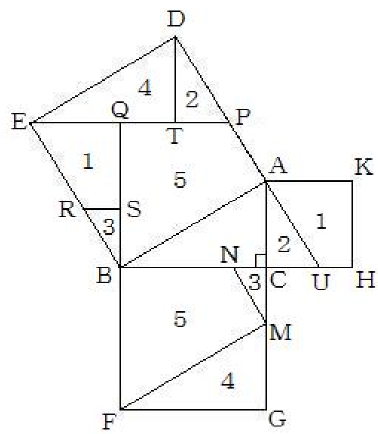
∴△MCN（3）≡△BSR

以上全てを加えると、すなわち

$a^2+b^2=3+4+5+1+2=c^2$

である。[20-5]

「すべらせ」は平行移動を、「1」は□HKAU、「2」は△UAC、「3」は△MCN、「4」は△MGF、「5」は MNBF を表している。



＜4- ii ＞図

証明＜4-iii＞

K、C を結び、C、F を結ぶと、KC、CF は一直線になる。DA の延長と KC とを N で交わらせ、EB の延長と CF とを M で交わらせる。H、N を結び、G、M を結ぶ。

D より AC に平行に引いた直線 DP と KA の延長との交点を P とする。

△PAD≡△CAB

（AD=AB および角の相等から）

ゆえに

AP=AC=KA

したがって C、P を結べば、△CKP は直角二等辺三角形となり、

∠ACP は 1/2 直角

また E より BC に平行に引いた直線 EQ と、FB の延長との交点を Q とすると、同様に△CQF は直角二等辺三角形で

∠BCQ は 1/2 直角

したがって直線 CP と直線 CQ は一致する。さて△ANC と△APJ とは対応する各角が等しく（対応する各辺が垂直であるから)、かつ

AC=AP

であるから

△ANC（1）≡△APJ

また、P から KF に平行に PR を引くと、△NKA と△RAP とは各角がそれぞれ等しく

KA=AP

であるから

△NKA≡△RAP

しかるに

△KHN（3）≡NKA（4）

であるから

△KHN≡△RAP

次に、△FMB と△PRD とは各角がそれぞれ等しく（対応辺がそれぞれ平行）、かつ

PD＝FB（△ADP≡△ABC から）

であるから、

△FMB（5）≡△PRB

また、△CMB と△PDL とは各角がそれぞれ等しく（対応辺が垂直）、かつ PD＝BC であるから

△CMB≡△PDL

ここで

△CGM（7）≡△CBM（8）

であるから

△CGM≡△PDL

以上をあわせて

1+3+5+7＝四辺形 ADLJ

同様に

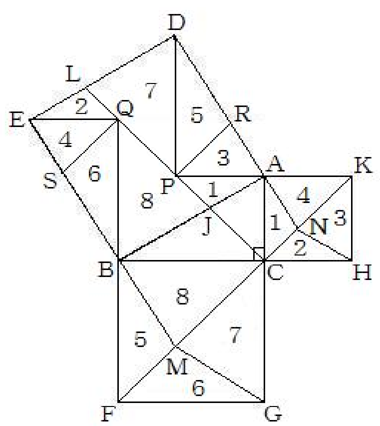
2+4+6+8＝四辺形 JLEB

この二つを合わせて、結局

$a^2+b^2=c^2$

となる。[20-6]

「1」は△ANC、「2」は△HNC、「3」は△KHN、「4」は△NKA、「5」は△FMB、「6」は FMG、「7」は△CGM、「8」は△CBM を表している。



＜4-iii＞図

証明＜4-ⅳ＞

C より AB に平行に CM を引き、EB を延長して BN を作る。C から AB に垂線 CP を下し、その足 P から CA に平行に PQ、CB に平行に PR を引けば

PQ=CA=MB

(AQPC、CABM は共に平行四辺形)

かつ各角がそれぞれ等しいから

△LBM（4）≡△AQP

CB＝PR（CPRB は平行四辺形)

かつ各角がそれぞれ等しいから

△CBL（5）≡△PRB

次に、PR 上に AC に等しく PS を取り、S より PQ に平行に SU を引き、また Q より PR に平行に QT を引けば、

□HKAC（1）≡□PQTS

また、四辺形 NLMF と QDUT で

QT＝AC=FN（△FNB＝△CAB から）

QD=AD－AQ＝NB－LB＝NL

でかつ各角はそれぞれ等しいから

四辺形 NLMF（3）≡四辺形 QDUT

次に四辺形 GCLN と SUER とで、

RE=BE－BR＝NB－LB＝NL

UE=DE－DU=CM－LM=CL

かつ各角はそれぞれ等しいから

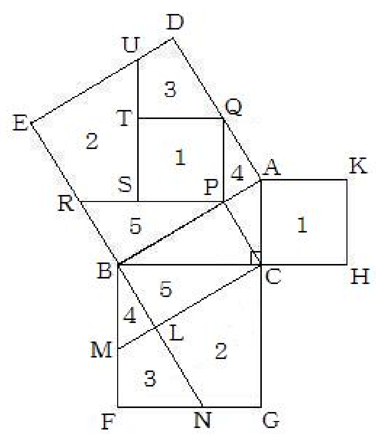
四辺形 GCLN（2）≡四辺形 SUER

これらをみんな加えると、結局

$a^2+b^2=c^2$

となる。[20-7]

□HKAC を 1、□GCLN を 2、□NLMF を 3、△LBM を 4、△CBL を 5 と表す。



＜4-ⅳ＞図

証明＜4-ⅴ＞

Fより AB に平行に FM を引き、また G より AB に垂直に GN を引く。BE 上に BP＝ON、PE＝GO となるような点 P をとる。

(GN=MF＝AB=BE)

また DE 上に

DQ=OF、QE=MO

となるような点 Q をとる。つづいて、AD 上に

AR=ON、RD=GO

となるような点 R をとり、AB 上に

AT=OF、TB=MO

となるような点 T をとる。P から BC に平行に PU を、Q から BC に平行に QR を、T から AC に平行に TS を引くとここにできる三角形 2 および 3 は、上の三角形 2 および 3 とそれぞれ合同になる。(2 辺と夾角が等しい)。また四辺形 4 および 5 は、上の四辺形 4 および 5 とそれぞれ合同になる（2 隣辺と 4 角が等しいことから)。

ここに、

PQ=GM=CA（△GME≡△ABC から）

また、

PU=NC＝CA（△GCN≡△BCA から）

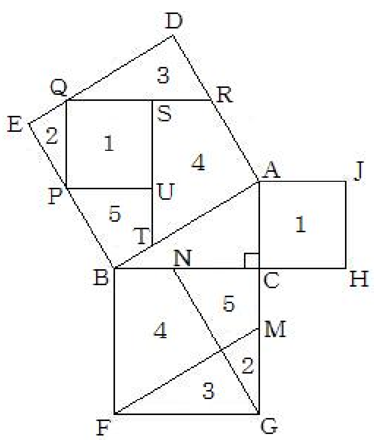
四辺形 PQSU は 2 隣辺が等しく CA で、各角が直角だから、正方形で b^2 に等しい。したがって

a^2+b^2＝1＋2＋3＋4＋5＝c^2 [20-8)]

「ここにできる三角形 2 および 3 は、上の三角形 2 および 3 とそれぞれ合同」は、前半の「ここにできる三角形 2 および 3」がそれぞれ△PQE、△QRE を表し、後半の「上の三角形 2 および 3」がそれぞれ△GMO、△GFO を表している。

「四辺形 4 および 5 は、上の四辺形 4 および 5 とそれぞれ合同」は、前半の「四辺形4および5」がそれぞれ□ARST、□BPUT を表し、後半の「上の四辺形4および5」は□ONBF、□ONCM を表している。

「1＋2＋3＋4＋5」の 1，2，3，4，5 はそれぞれ□ACHJ，△GMO,△GFO,□ONBF,□ONCM を表している。



＜4-ⅴ＞図

証明＜4-ⅵ＞

図で点 B、C を通って直交する 2 直線で a^2 を 4 つに切断するのが（ⅳ）の場合、点 F、G を通って直交する 2 直線で a^2 を 4 つに切断するのが（ⅴ）の場合である。

しかし、これらの 4 直線で囲まれる部分（図の斜線を斯いた部分）に中心 O を持ち、AB に平行および垂直な 2 直線（たとえば図の KL、MN）でこの正方形を四つに切断すれば同様に

a^2+b^2＝1＋（2＋3＋4＋5）＝c^2

がいえることは次のように証明される。

KL=MN=AB

であることから、BE、ED、DA、AB の上にそれぞれ

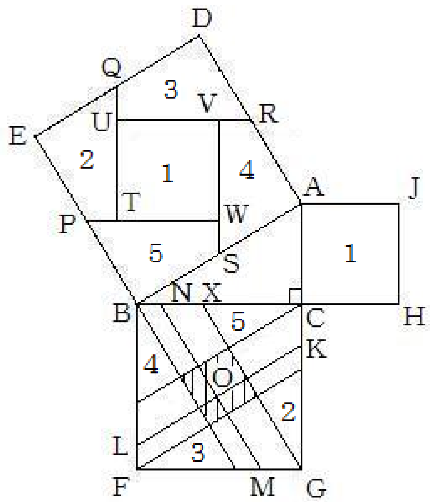
BP=ON、PE=MO
EQ=KO、QD=OL
DR=MO、RA=ON
AS=OL、SB=KO

のように点 P、Q、R、S を取ることができる。

つぎにこれらの 4 点を通り、CB あるいは CA に平行に PW、QT、RU、SV を引けば、ここにできる 2、3、4、5 はそれぞれ上の 2、3、4、5 と合同になる。また、1 は四つの角が直角でその上、

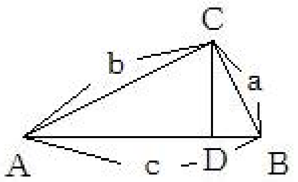
TW=PW－PT＝CN－GM
＝CN－XN＝CX＝CA
WV=SV－SW=LB－KC=KA－KC=CA

であるから、1 の正方形で b^2 に等しい。したがって上の命題が成り立つ。[20-9)]



＜4-ⅵ＞図

3-1-2　代数的な証明



＜5＞、＜6＞図

証明＜5＞

<u>C より AB へ垂線 CD を下せば</u>

△ABC∽△ADC

∴AB : AC＝AC : AD

すなわち　$b^2＝c \cdot AD$

同様に△ABC∽△DBC から

$a^2＝c \cdot DB$

2 式を加えて

$a^2+b^2＝c \cdot (AD+DB)＝c^2$ [20-10)]

下線部は＜5＞図のことである。

証明＜6＞

<u>上の図</u>で△ABC∽△ADC∽DBC から

c^2/△ABC＝b^2/△ADB＝a^2/△DBC

（相似三角形の面積の比は対応辺の 2 乗に等しい）

∴　c^2/△ABC＝b^2+a^2/△ADC+△DBC（加比の理）

しかるに　△ADC＋△DBC＝△ABC

∴　$c^2＝a^2+b^2$ [20-11)]

下線部は＜6＞図のことである。

証明＜7＞

<u>（1）と同じく</u>△ABC∽△ADC から

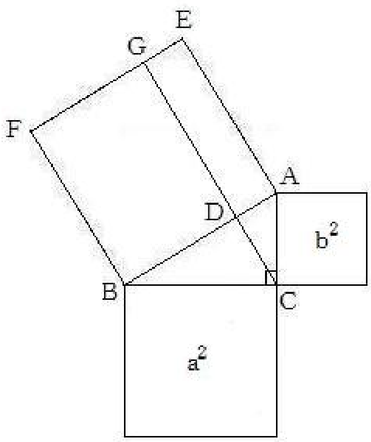
b^2＝AD･AB＝AD･AE＝<u>長方形 AG</u>

同様に　a^2＝AB･DB＝BF･DB＝<u>長方形 BG</u>

しかるに　長方形 AG＋長方形 BG=c^2

∴　$a^2+b^2＝c^2$ [20-12)]

下線部「（1）と同じく」は＜5＞の証明の下線部のことを表し、「長方形 AG」は□AEGD を、「長方形 BG」は□BFGD を表す。



＜7＞図

＜8＞

直角三角形 ABC において A を中心、AC を半径とする円をかけば、この円は点 C で直線 BC に接する。

∴　BC^2=BD･BE

しかるに

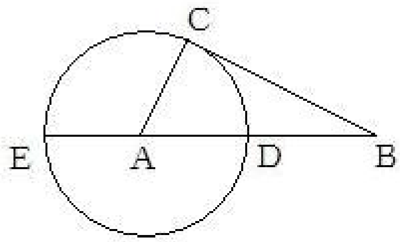
BD＝AB－AD、BE=AB+AE

AD=AE=AC。

∴　BC^2＝（AB－AC）（AB+AC）

＝AB^2-AC^2

∴　$AB^2＝BC^2+AC^2$ [20-13)]



＜8＞図

証明＜9＞

∠C＝90°の△ABC に内接円をかき、その中心 O から各接点に垂線を下し、その長さ、すなわちこの円の半径を r とすれば

△ABC＝1/2（a+b+c）r

（1/2ar＝△OBC 等から）

また

2r＝CD+CE＝a+b-c

（AE=AF、DB=FB から）

∴　4△ABC＝（a+b+c）（a+b-c）

＝$(a+b)^2-c^2$

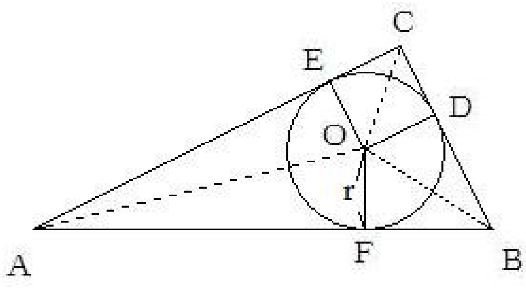
しかるに

△ABC＝1/2ab

∴　2ab＝$(a+b)^2-c^2$

整頓して

$a^2+b^2＝c^2$ [20-14)]



＜9＞図

3-1-3　幾何学的な証明

証明＜10＞

Cから AB に垂線 CLM を引く。また K、B および C、D を結ぶ、△CAD と長方形 ADML とは底辺が共通で高さが等しいから（CM//AD）

長方形 ADML＝2△CAD

次に CAD と△KAB とで、KA=AC、AB=AD、∠KAB＝∠CAD(＝直角＋∠CAD)であるから

△CAD≡△KAB

また△KAB と正方形 KACH とは、底 KA が共通で、高さが等しいから（HB//KA）

□KACH＝2△KAB

ゆえに結局

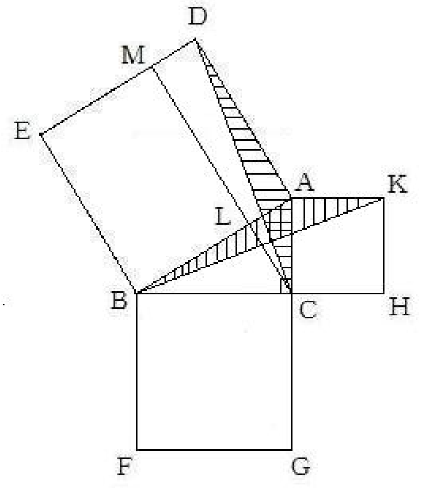
□KACH＝長方形 ADML

同様に

□GCBF＝長方形 LMEB

この二つを加えると

$a^2+b^2=c^2$ [20-15)]



＜10＞図

証明＜11＞

Cから AB に垂直に CPQ を引く。また K から AB に平行に KT を引き、D から AC に平行に DS を引く。底辺が共通で高さが同一だから

長方形 ADQP＝平行四辺形 ADSC

KA=CA、AB=AD

∠KAB＝∠CAD（＝直角＋∠CAB）から

平行四辺形 ADSC＝平行四辺形 ABTK

底辺が共通で高さが同一であるから

平行四辺形 ABTK＝□KACH

結局

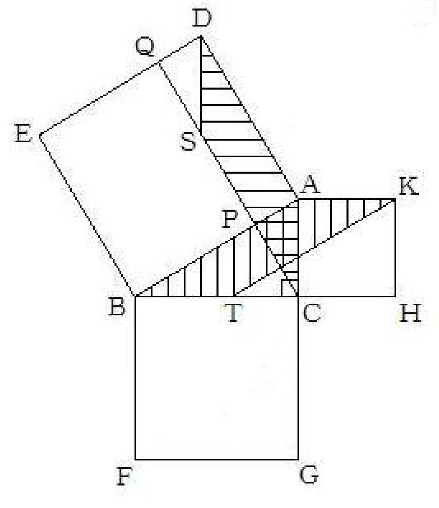
長方形 ADQP＝□KACH

同様に

長方形 PQEB＝□BFGC

二つ加えて

$a^2+b^2=c^2$ [20-16)]



＜11＞図

証明＜12＞

KH の延長と FG の延長との交点を L とし、L、C を結び、これを延長して AB、DE とそれぞれ P、Q で交わらせる。また DA を延長して LK と M で交わらせる。△LHC と△ABC は直角をはさむ 2 辺がそれぞれ等しいから

△LHC≡△ABC

ゆえに

LC=AB=AD。

また MACL は平行四辺形になる。したがって長方形 ADQP と平行四辺形 MACL とは底辺が等しく、かつ高さが同一（LQ//MD）であるから

長方形 ADQP＝平行四辺形 MACL

また平行四辺形 MACL と正方形 KACH とは底辺 AC が共通で高さが等しい（KL//AC）から

平行四辺形 MACL＝□KACH

ゆえに結局

長方形 ADQP＝□KACH

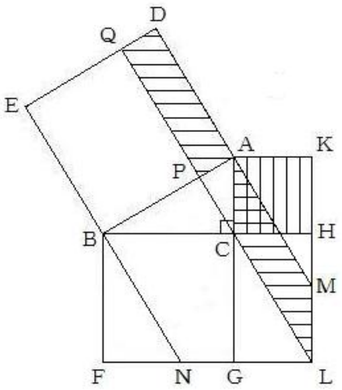
同様に

長方形 PQEB＝□BFGC

この二つを加えて

$a^2+b^2=c^2$

となる。[20-17)]



＜12＞図

証明＜13＞

KA の延長と FB の延長との交点を L とする。また D から AL に平行線を引き、その交点を M とすれば、

△ABC≡△BAL≡△EDM

また ADML および LMEB は平行四辺形となり、

LM＝AD＝AB。

したがって AL を延長して ME と N で交わらせれば、

△LMN≡△ABC

ゆえに

LN＝AC＝AK

□KACH と平行四辺形 LMEB とは、底辺が等しく(AC=ME)、高さも等しい(KA=LN)から

□KACH＝平行四辺形 LMEB

同様に

□BFGC＝平行四辺形 ADML

しかるに

□ADEB＝□ADEB＋△DME－△ALB

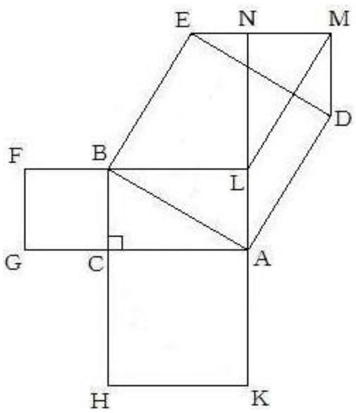
＝平行四辺形 ADML＋平行四辺形 LMEB

ゆえに

□KACH＋□BFGC＝□ADEB

すなわち

$a^2+b^2=c^2$ [20-18]



＜13＞図

証明＜14＞

K、C および C、F をそれぞれ結べば、KCF は一直線となる（∠HCK＝∠FCB＝1/2 直角)。CB に平行に DL、CA に平行に EL を引き、交点 L と C とを結ぶ。また H、G を結べば

△ABC≡△DLE≡HCG

四辺形 KABF と CADL とにおいて

KA=CA、AB=AD、BF=DL

∠KAB＝∠CAD（＝直角＋∠CAB)

∠ABF＝∠ADL

（＝∠ABC＋直角＝∠LDE＋直角)

であるから

四辺形 KABF≡四辺形 CADL

同様に

四辺形 KFGH≡四辺形 CLEB

二つを加えて

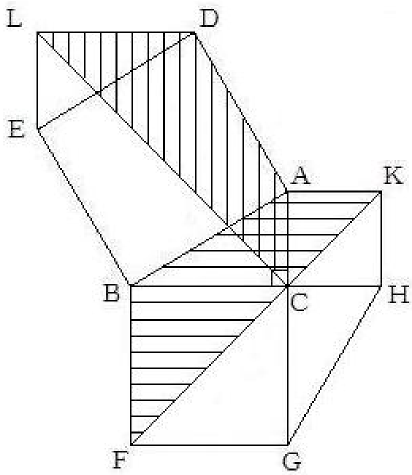
六辺形 KABFGH＝六辺形 CADLEB

この左辺から△HCG＋△ABC＝2△ABC を取り去り、右辺から△ABC＋△DLE＝2△ABC を取り去れば

□KACH＋□BFGC＝□ADEB

すなわち

$a^2+b^2=c^2$ [20-19]



＜14＞図

以上、数ある三平方の定理の証明のうちの代表的なものを見てきた。これらの証明の中でも本研究では、正方形を裁断したり張り合わせたりしながら証明していく方法に焦点を当てていく。引用した証明で言えば、証明＜4-ⅰ＞から証明＜4-ⅵ＞であるが、この証明方法には主に分割合同の考え方が使われているので、分割合同の考え方がどのようなものであるかを知るため､次節でヒルベルトの「定理 43」から「定理 48」の部分を引用、参考にして考察を加えておく。次に 3-3 でこれらの証明のうちでも本研究で扱っていく証明に視点を当て、その授業の可能性を探っていくことにする。

3-2　平面における面積の理論

ここでは、分割等積による三平方の定理の証明の背景となっているヒルベルト「幾何学の基礎」[21)]の面積の理論について考察する。

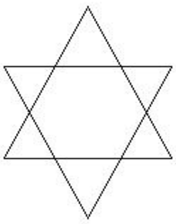
> 連続を除く線形公理、平面型の公理の全群―公理Ⅰ 1-3、Ⅱ－Ⅳ―を仮定する。…比例の理論と、そこで導入した線分算を用いると、ユークリッドの面積論は上述の公理だけで、すなわち平面内で連続の公理とは独立に基礎づけることが可能になるのである。…比例の理論は本質的にパスカルの定理（定理 40）に基づいているのであるから、面積論についてもまったく同じことがいえる。[21-1)]

下線部の「(定理 40)」は「幾何学の基礎」[21)]の P50 に載っているパスカルの定理のことを指しているがここでは割愛する。

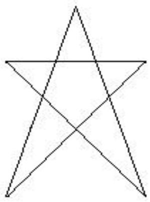
(定義 1)

> 多角形の頂点がことごとく互いに異なり、多角形のどの頂点も辺の上に落ちずかつ多角形の任意の 2 辺に共有点ないとき、この多角形は単一であるという。[21-2)]

単一多角形の反例としては次のようなものがあげられる。



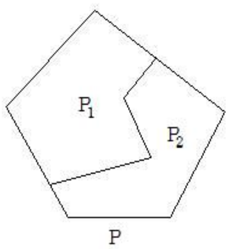
(図 15-ア)



(図 15-イ)

(定義 2)

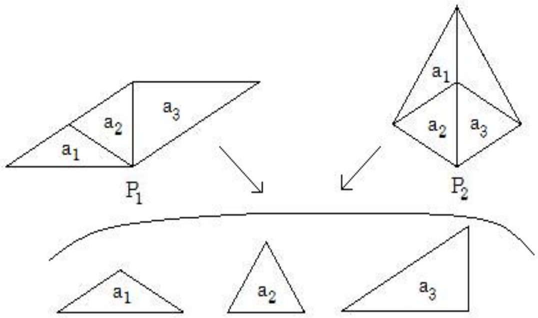
> 単一多角形 P の 2 点を、まったく多角形の内部にはいる 2 重点のない折線で結べば、二つの新しい単一多角形 P_1 と P_2 とができて、その各の内点はすべて P の内部にはいる；このことを《P は P_1 と P_2 にわかれる、または P は P_1 と P_2 に分割される、あるいは P_1 と P_2 は P を合成する》という。[21-3)]



(図 16)

(定義 3)

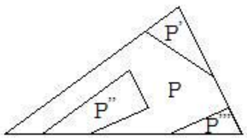
> 二つの単一多角形が二つずつ互いに合同な有限個の三角形に分割されるとき、これらを分割等積という。[21-4)]



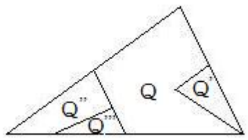
(図 17)

(定義 4)

> 二つの単一多角形 P と Q に互いに二つずつ分割等積な有限個の多角形 P'、Q'、P''、Q''、…P'''、Q'''をつけ加えて生ずる両多角形 P+P'+P''+…+P''' と Q+Q'+Q''+…+Q''' が互いに分割等積であるとき、P と Q は補充等積であるという。[21-5)]



(図 18-ア)

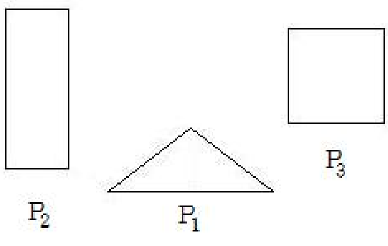


(図 18-イ)

(定理 1)

> 二つの多角形 P_1 と P_2 が第 3 の多角形 P_3 に分割等積ならば、P_1 と P_2 は互いに分割等積である。二つの多角形が第 3 の多角形に補充等積ならば、これらは互いに補充等積である。[21-6)]

以下、多角形 A と多角形 B が分割等積の関係にある時《A－B》、多角形 A と多角形 B が補充等積の関係にある時《A～B》と表記することにする。(定理 1～定理 6 まで)



(図 19)

(証明)

P_1 に線分を加えて P_1 を三角形に分割してそのうちの一つを a_i とし 、P_2 に線分を加えて P_2 を三角形に分割したときに出来る三角形のうちの一つを b_j とする。同様にして P_3 を三角形に分割してそのうちの一つを c_i とし、c_i とは別の P_3 の分割の仕方を d_j とする。つまり、

$$P_1=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_i \quad P_2=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_j$$
$$P_3=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_i \quad P_3=d_1+d_2+d_3+\cdots+d_j$$

である。題意と定義 3 から三角形 a_i と c_i、b_j と d_j で $a_i \equiv c_i$、$b_j \equiv d_j$ となるような分割のしかたが存在するので、今はこの場合を考える。これらの P_3 の両分割を考えると、一方の分割の各三角形は他方の分割に属する諸線分によって、一般に多角形に分割される。そこで線分を追加して、これらの多角形自身が三角形に分割されるようにする。このようにしてできた三角形を $e_1e_2\cdots e_k$ とすると、

$$P_3=e_1+e_2+\cdots+e_k$$

である。ここで P_3 の分割を P_1 と P_2 に戻してみると、

《P_1-P_3》なので

$$P_3=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_i=e_1+e_2+\cdots+e_k$$
$$P_1=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_i=e_1+e_2+\cdots+e_k$$

《P_2-P_3》なので

$$P_3=d_1+d_2+d_3+\cdots+d_j=e_1+e_2+\cdots+e_k$$
$$P_2=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_j=e_1+e_2+\cdots+e_k$$

よって

$$P_1= e_1+e_2+\cdots+e_k =P_2$$

P_1 と P_2 は同数の互いに合同な三角形に分かれていることになるので定義 3 により《P_1-P_2》である。…（証明終）

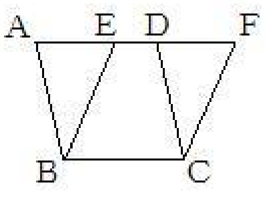
なお《長方形》,《平行四辺形の底辺と高さ》,《三角形の底辺と高さ》を通常のように定義しておく。[21-6)]

（定理 2）

等底、等高の二つの平行四辺形は互いに補充等積である。[21-7)]

（証明）底辺 BC を共有し高さが等しい 2 つの平行四辺形、ABCD と EBCF を考える。

（ⅰ）AD 上に E が存在する場合



（図 20-ア）

△ABE と△DCF の関係を考える。ABCD が平行四辺形なので向かい合う辺の長さが等しくなるから、AB=DC、同様に EB=FC である。いま、等底な平行四辺形を考えているので AD＝BC=EF より AD=EF であり、AD=AE+ED、EF=ED+DF から、AE=DF となる。よって三辺の長さがそれぞれ等しくなるので

△ABE≡△DCF

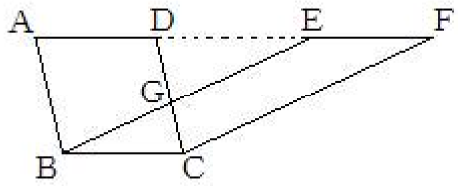
ここから

□ABCF＝□ABCD+△DCF

□ABCF＝□EBCF+△ABE

となるが、△ABE≡△DCF なので（定義 4）から、《□ABCD～□EBCF》となる。

（ⅱ）AD 上に E が存在しない場合



（図 20-イ）

ABCD は平行四辺形であるから、AD は BC に等しい。同じ理由で EF も BC に等しい。それゆえ AD はまた EF に等しい。そして DE は共通である。ゆえに AE 全体は DF 全体に等しい。しかも AB は DC に等しい。かくて 2 辺 EA、AB は 2 辺 FD、DC にそれぞれ等しい。そして角 FDC は角 EAB に、外角は内角に等しい。故に底辺 EB は底辺 FC に等しいので△ABE≡△DCF となる。

ここから

□ABCF＝□ABCD+△DCF

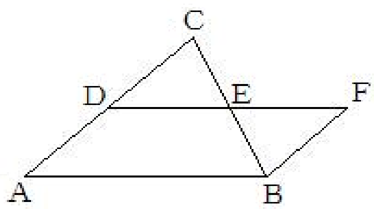
□ABCF＝□EBCF+△ABE

となるが、△ABE≡△DCF なので、（定義 4）から《□ABCD～□EBCF》となる。

よって、（ⅰ）（ⅱ）より、等底、等高の二つの平行四辺形は互いに補充等積である。･･･（証明終）

（定理 3）

どの三角形 ABC も常にこれと等底かつ高さが半分の、ある平行四辺形と分割等積である。[21-8)]



（図 21）

（証明）

AC の中点 D と BC の中点 E をとり、DE をそれと等しく延長して F をとると

△DCE と△FBE で

DE=FE（仮定）

CE=BE（仮定）

∠DEC＝∠FEB（対頂角）

よって二辺とその間の角がそれぞれ等しいので

△DCE≡△FBE

である。

ここで

△ABC=△DCE+□ABED

□ABFD＝△FBE+□ABED

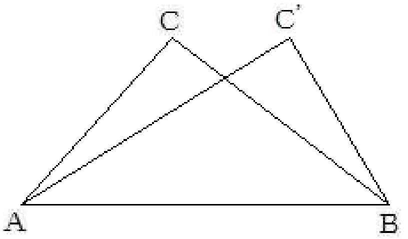
であるので、

△DCE≡△FBE

よって《△ABC－□ABFD》である。…（証明終）

（定理 4-1）

等底等高の三角形は互いに補充等積である。[21-9)]



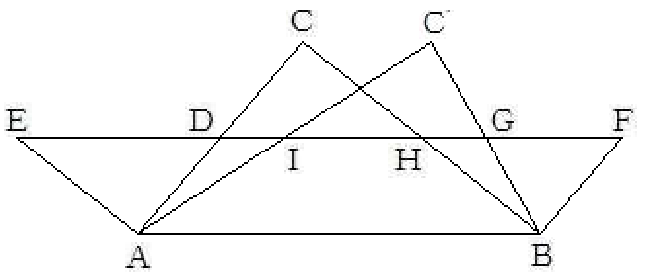
（図 22-ア）

（証明）

等底、等高な三角形をそれぞれ A（△ABC）、B（△ABC'）とすると（定理 3）から A と B それぞれに等底で高さが半分の平行四辺形が存在する。

A の等底で高さが半分の平行四辺形（□ABFD）をΓ、B の等底で高さが半分の平行四辺形（□ABGE）をΔとすると、A と B が等底で等高なのでΓ、Δも等底で等高である。よって（定理 2）より《Γ～Δ》である。

ここで A に△BFH を加えた図形を E、Γに△CDH を加えた図形を Z、同様にして、B に△AEI を加えた図形を H、Δに△C'GI を加えた図形をΘとする。



（図 22-イ）

そうすれば、

E≡Z、H≡Θ

となるので、《A～Γ》であり、《B～Δ》となる。

今、《A～Γ》、《B～Δ》となっているので（定理 1）を使えば、《A～Γ》、《Γ～Δ》であることから《A～Δ》となる。そして、《A～Δ》で《B～Δ》であることから

《A～B》

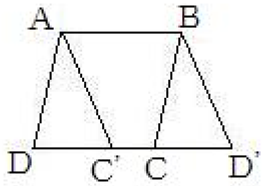
よって、等底等高の三角形は互いに補充等積である。…（証明終）

（定理 4-2）

2 つの等底、等高な平行四辺形は分割等積である。[21-10)]

（証明）等底等高な 2 つの平行四辺形 ABCD と ABC'D'で

（ｉ）辺 CD 上に D'が存在する場合



（図 22-ウ）

□ABCD＝△ADD'+□ABCD'

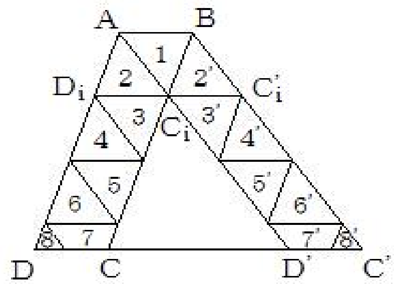
□ABC'D'＝ △BCC'+□ABCD'

であるが、（定理 2）のように考えると

△ADD'≡△BCC'

となる。よって《□ABCD－□ABC'D'》である。

（ⅱ）辺 CD 上に D'が存在しない場合

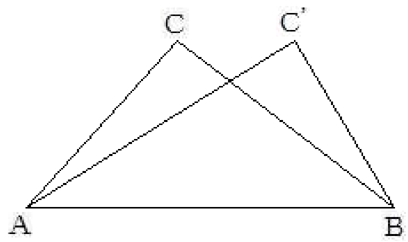


（図 22-エ）

2 辺 BC と A D'の交点 C_i を通り、辺 AB に平行な直線を引き、これが辺 AD、BC'と交わる点をそれぞれ D_i、C'_i とすると（ｉ）より、2 つの平行四辺形 ABC$_i$ D$_i$ と AB C'$_i$ C$_i$ は分割等積になる。次に、平行四辺形 ABCD と ABC'D'からそれぞれ平行四辺形 ABC$_i$ D$_i$ と AB C'$_i$ C$_i$ を切り取り、残った平行四辺形 D$_i$ C$_i$ CD と C$_i$ C'$_i$ C'D'について上辺 D$_i$ C$_i$ と C$_i$ C'$_i$ が共有するように平行四辺形 C$_i$ C'$_i$ C'D'を平行移動させる。これを順次繰り返していき、DC 上に D'が来るまで続ける。DC 上に D'C'が来たとき（ｉ）よりその時の 2 つの平行四辺形《□ABCD－□ABC'D'》であるといえる。よって（ｉ）（ⅱ）より、2 つの等底、等高な平行四辺形は分割等積である。･･･（証明終）

（定理 4-3）

等底、等高な三角形は分割等積である [21-11)]



（図 22-エ）

（証明）

２つの等底、等高な三角形Ａ(△ABC)とＢ(△ABC')があるとする。（定理３）より三角形Ａにはこれに等底で高さが半分の平行四辺形Γと分割等積であり、三角形Ｂはこれに等底で高さが半分の平行四辺形Δに分割等積である。三角形ＡとＢが等底、等高なので（定理 4-2）からこの２つの平行四辺形ΓとΔが分割等積となる。

今、《Ａ－Γ》、《Ｂ－Δ》で《Γ－Δ》なので（定理１）を使えば《Ａ－Γ》で《Γ－Δ》であることから、《Ａ－Δ》であり、《Ａ－Δ》で《Ｂ－Δ》であることから（等積の推移律）

《Ａ－Ｂ》

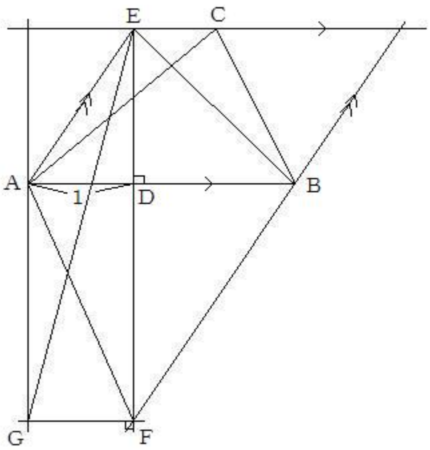
よって、等底、等高な三角形は分割等積である。

…（証明終）

（定理５）

任意の三角形、したがってまた任意の単一多角形に対して、１辺が１で、与三角形あるいは与多角形と補充等積な直角三角形が常に作図できる。[21-12]

（証明）　（ｉ）三角形に関するほうの主張



（図 23）

任意の三角形を ABC とする。底辺 AB 上に A 側から長さが１となるように点 D をとる。この点 D を通り AB に垂直な直線を引き、この直線をｌと置く。次に頂点 C を通り AB に平行な直線ｌとの交点を E とし、EA と EB を結ぶ。そうすると（定理 4-1）により

《△ABC～△ABE》　　－①

点 B を通り AE に平行な直線を引き、直線ｌとの交点を F とし、AF を結ぶ。そうすれば（定理 4-1）により

《△ABE～△AFE》　　－②

点 A を通りｌに平行な直線と点 F を通りｌに垂直な直線との交点を G とし、EG を結ぶ。そうすれば（定理 4-1）により

《△AFE～△GFE》　　－③

よって定理 43 を使えば①と②から

《△ABC～△AFE》　　－④

となり、④と③から

《△ABC～△GFE》

が言える。△GEF は

GF＝AD=1、∠GFE＝90°

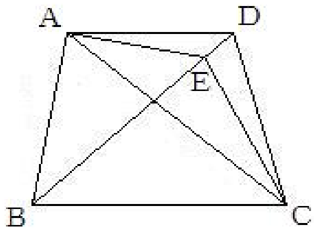
の直角三角形であるので上記のように作図をすれば、任意の三角形に補充等積な１辺の長さが１の直角三角形ができる。

（ⅱ）多角形に関するほうの主張

与えられた単一多角形を三角形に分割し、これらの三角形に対して１辺が１の補充等積な直角三角形を求める。この長さ１の辺をこれらの三角形の高さと考え、再び(定理 1)と（定理 4-1）によって合併すれば結論を得る。…（証明終）

（定理６）

二つの補充等積な三角形が等底ならば、また等高でもある。[21-13]



（図 24）

この定理の証明は「ユークリッド原論」第一巻の第 39 の命題として載っている。ここではこの命題の証明を参照して証明する。

（証明）

同じ底辺上にあり同じ側にある等しい三角形はまた同じ平行線の間にある。同じ底辺 BC 上にありそれと同じ側にある等しい三角形を ABC、DBC とせよ。AD を結びなさい。AD は BC と平行であることをいう。

もしそうでなければ、点 A を通り、直線 BC と平行な AE をひき、EC を結びなさい。それゆえ、三角形 ABC は三角形 EBC と等しい。なぜなら、それは同じ底辺 BC 上にあり、同じ平行線の間にある。しかし、ABC は DBC と等しい。それゆえ、DBC も EBC と等しい。大きいほうが小さいほうと等しいが、不可能である。それゆえ、AE は BC と平行ではない。同様にして、AD 以外のどの直線もそうでないことを証明することができる。それゆえ、AD は BC と平行である。･･･（参照）[22]

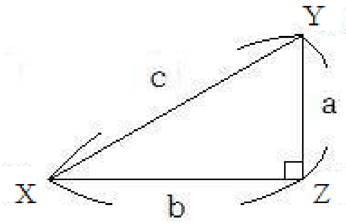
それ故、同じ底辺上にあり同じ側にある等しい三角形はまた同じ平行線の間にある。…（証明終）

3-3　分割合同による三平方の定理の証明を授業で扱う際の展開可能性

3-1 で数ある証明の中の一部を見てきたが、ここでは分割合同を利用した証明を授業で扱う際の展開の可能性について掘り下げる。

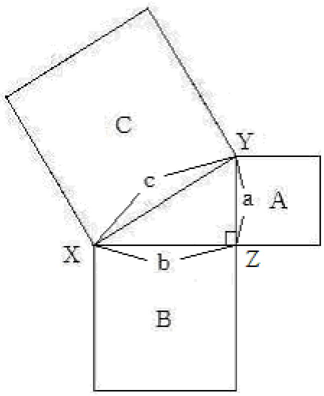
それではまず本研究で扱っていく三平方の定理の証明を授業で導入していく時の全体の流れを見ていく。（正方形の裁断を利用する証明法は 3-1 で見ているので割愛する。）

∠Z＝90°とする直角三角形 XYZ の 3 辺 abc を次の＜28＞図ように置く。



＜28＞図

そして、正方形 A は a を一辺として出来る正方形、正方形 B は b を一辺として出来る正方形、正方形 C は c（斜辺）を一辺としてできる正方形とする。＜29＞図



＜29＞図

以下（ア）、（イ）は、授業で扱う分割合同を利用した三平方の定理の証明の授業の流れを表すことにする。

＜授業の大まかな流れ＞

三平方の定理の証明を授業で扱う際には次のような流れを考えている。

（ア）直角をはさむ 2 辺に具体的な長さを与え、ある方法を使いながら C＝A＋B が成り立ちそうであるということを子どもに経験させる。

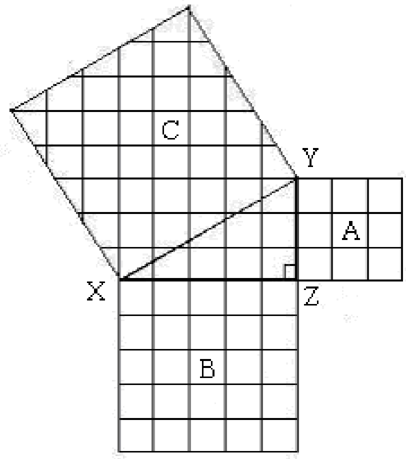
（イ）特殊な辺の長さ（（ア）で経験した長さ）では C＝A＋B が成り立つことがわかった上で、直角をはさむ 2 辺が任意の長さの時に成り立つかどうかを考えさせる。

つまり授業の流れは次ぎように持っていくようにする。

特殊な場合についての証明(ア) →　一般的な場合についての証明(イ)

3-3-1　授業の流れの検討＜Ⅰ＞

（ア）方眼用紙に＜30＞図のように直角三角形をかき、各辺を一辺とする正方形を立てる。A、B、C（斜辺を一辺とした正方形）の各々の方眼のマス目を数え、面積の関係を調べる。



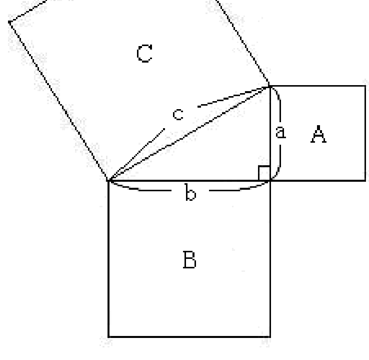
＜30＞図

これを何種類か試した後、そこから C＝A＋B が成り立っていることを確認する。

（イ）しかし今の確認の仕方では C＝A＋B が成り立つのは（ア）で調べた辺の関係を持つ直角三角形のみであって、各々の辺の長さの取り方によらないことを示しているわけではないので、いつでもこの等式が成り立つことを示すために次の課題を考えさせる。

＜問題＞

直角をはさむ 2 辺の長さが acm と bcm の直角三角形を描き、各辺を一辺とする正方形をそれぞれの上に立て、正方形を小さいほうから順に A、B、C と名づける。この A と B の 2 つの正方形をうまく裁断して 1 つの大きな正方形を作る。2 つの正方形をどのように裁断すると 1 つの大きな正方形が出来あがるのだろうか。 ＜31＞図



＜31＞図

直接（イ）の問題に行かず、（ア）→（イ）の流れにしたのは次の理由である。
（イ）の正方形の裁断方法を考えさせる前段階として（ア）のCの面積とAとBの正方形の面積を加えた量が等しいことを経験として持っておく必要があった。

それは、次の①～③のように考えたからである。

①「C＝A＋Bが成り立つのは何故だろう」と疑問を持たせ、興味を持たせることでその子の人格を深く表出させるためのきっかけとなること。
②（ア）での面積（方眼）の数え方が（イ）の課題での裁断方法の発見に結びつく可能性があること。
③そしてこの課題は裁断方法をなかなか見つけられないため、どうしたらよいか悩んだり、方法を探すのをあきらめそうになったりした時、<（ア）でC＝A＋Bが成り立つことがわかっているから切り方も必ず存在するはずだ>と意識として持っている子と、<本当に切り方が存在するのだろうか>となっている子では、裁断方法の発見のされ方に大きな影響が出てくることである。

そのような理由で直接（イ）の問題に行かず、（ア）→（イ）のような流れで授業を展開するが、（ア）のようにしてC＝A＋B を認めることが出来たとしてもこれは帰納的に等しいと認めただけに過ぎず、すべての直角三角形の場合でこの法則が成り立つと保障したわけではないので必然的に演繹的な証明が必要となるのである。それが今の授業の流れでいくと（イ）の段階であり、その演繹的な証明方法として本研究では図形の裁断を選択したのである。

しかし3-3-1の授業の流れ<Ⅰ>（ア）の導入方法では、方眼の目の数え方が代数的な証明方法（例えば 3-1-1 の<1-ア>図、<2-イ>図）の方に考えを流れ易くしてしまうのである。もちろんどんな方法であれ、C＝A＋Bとなることを演繹的に証明が出来ればよいので代数的に証明すること自体に問題はないのだが、本研究では正方形を裁断してそれらを組み合わせながら証明をしていこうとしているので今の導入の仕方では良くないのである。

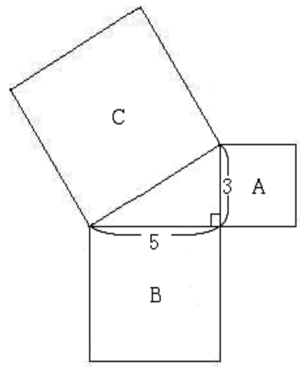
そこで次の3-3-2の授業の流れ<Ⅱ>では（ア）の段階での導入で、方眼を数えてC＝A＋Bが成り立つことを経験として持ってから（イ）に持っていくのではなく、C＝A＋Bが成り立つことを事実として教えてしまってから図形の裁断をさせる方式、つまり分割合同の考え方を利用しながら証明をしていく方法に持っていくことにした。従って課題を次のように投げかけることにする。

3-3-2　授業の流れの検討<Ⅱ>

(ア) 直角を挟む二辺の長さ（<31>図のaとbに当たる長さ）を3cm、5cmとする。この2辺の長さの下でAとBの裁断方法を探す。

<問題>

直角三角形の上に正方形を立てた時、直角をはさむ 2 辺からできる 2 つの正方形の和は、斜辺からできる正方形になることが知られている。それでは、2 つの小さな正方形を大きな正方形の中にはめ込んでみよう。ただし、隙間が出来てはいけないし、はみ出してもいけない。
<32>図

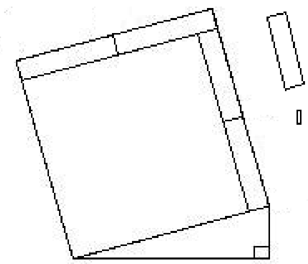


<32>図

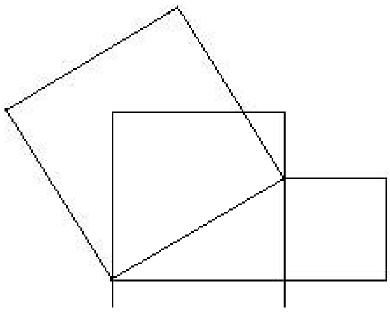
(イ)、(ア)で見つけた方法が任意の2辺の長さでも成り立つかどうかを考察する。

以下、この授業の流れ<Ⅱ>を見ていくことにする。

3-3-2-1　授業の流れ<Ⅱ>（ア）
（ⅰ）切り方を探る。
この課題に当面したときの生徒の考えとして、次の3通りを予想した。
① <33-1>図のようにB（またはA）の正方形をCの正方形の中に角を合わせるようにはめ込み、残りのスペースをA（またはB）の正方形でうめようとする。一番初めにこの考え方が出てきやすいと予想される。

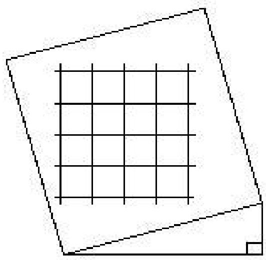

<33-1>図

② 正方形を直角三角形の底辺に合わせて<33-2>図のように立ててみる。はみ出た部分を切り空いたスペースにはめ込もうとする。



＜33-2＞図

③　＜33-3＞図のようにCの正方形のマス目を出来るだけ埋め、それから残りの空白を埋めようとする。



＜33-3＞図

＜33-2＞図や＜33-3＞図のような方法だと裁断方法を見つけられる可能性はあるが＜33-1＞図のような方法では残りの空白をうまく埋められず考えが止まってしまうのである。かといって＜33-2＞図や＜33-3＞図のような方法をとったとしても考え始めの段階では手が止まってしまう心配がある。最初の時点ではおそらく答えとなるような切り方をする生徒は出てこないだろうし、自力ではなかなか出てこない可能性があるので場合によってはここで助言をしなければならなくなる（授業が止まってしまう可能性がある）。

この助言の仕方については、4-4で「科学的精神の開発」を目指すための指導法についての考察として述べる。

（ⅱ）　正方形Aと正方形Bの裁断方法

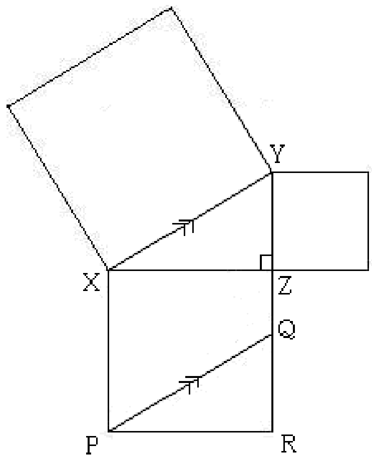
（ⅱ-ⅰ）　正方形Bの裁断方法

Cの正方形の＜直角＞と＜一辺の長さ＞をAとBの正方形から捻出しないと一つの大きな正方形は出来上がらないのであるがどのように切り出せばこの2つの要素が出てくるような切り方になるのか。＜33-1＞図の方法では、Cの正方形の＜直角＞に意識がいってBをCの正方形の中に直角を合わせるようにはめ込んでいるが、＜一辺の長さ＞をうまく作り出せないのである。ただ生徒にとっては三平方の定理の導入であるため、Cの一辺の長さが無理数になることを知らないのであるから、「＜33-1＞図の方法では＜一辺の長さ＞をうまく作り出せないから無理だ。」とはいかないため、この方法にこだわってしまい、ここで生徒の考えが行きづまってしまう可能性がある。

それではここからは裁断方法を探っていくことにする。例えば、AをCに埋めてしまう場合、残りの空白をBで埋めなければならない。だとすればこのBをCの一辺が現れるように切る、かつ直角が現れるように切るためにはどのような切り方をすればよいのだろうか。

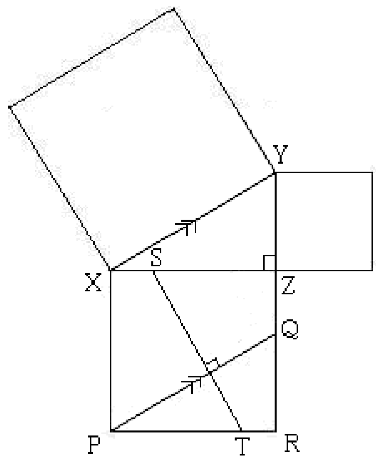
辺の保存、角の保存をするような切り方をしなければならない。

それには、辺の保存を平行線、角の保存を直線とその垂線で作る必要がある。そこで、点Pから直角三角形の斜辺XYに平行線を引く。この線分をPQとする。



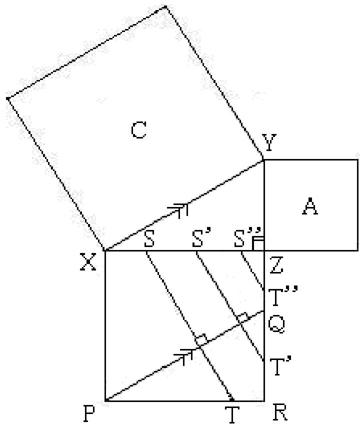
＜34＞図

＜34＞図のように切ると辺の保存（斜辺）ができる。そうするとXYQPが平行四辺形（XYとPQ、XPとYQが平行より）なのでXY＝PQとなる。しかしこれだけだと角の保存が出来ていないので、この平行線に対し垂線STを加えて角の保存をする。＜35＞図



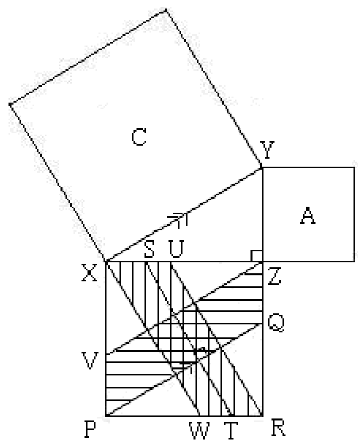
＜35＞図

しかし、この垂線STの加え方によっては正方形Aを切断せずに正方形Cを組み立てられる場合と組み立てられない場合がある。＜36＞図



＜36＞図

それはこの垂線 ST の長さに左右される。ST の長さが C の一辺の長さより短くなる時（＜36＞図の S'T'、S''T''）には、A を切断しなければならない。逆に、垂線の長さが C の一辺の長さと同じくなるように取ると正方形 A を裁断せずに済む。



＜37＞図

ここで、最初に引いた平行線 PQ と垂線 ST が C の一辺の長さを保存するような存在領域を考えると＜37＞図斜線部分である。この領域の求め方は次のようになる。

＜平行線 PQ の存在領域＞

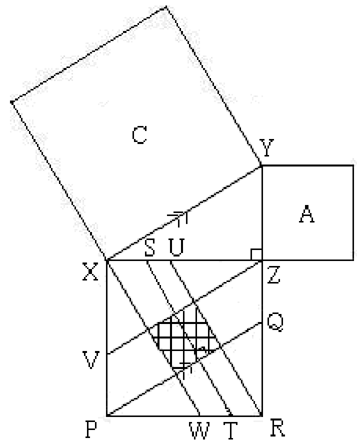
正方形 B の頂点 P と Z から XY の平行線を引き、それぞれ正方形 B の線分 RZ、PX との交点を Q、V とした時にできる平行四辺形 PQZV の内部領域である。

＜垂線 ST の存在領域＞

正方形 B の頂点 X と R から、XY の垂線を引き、それぞれ正方形 B の線分 PR、XZ との交点を W、U とした時にできる平行四辺形 XWRU の内部領域である。

この斜線部内に元の直角三角形の斜辺 XY の平行線やその垂線を取れば正方形 A を切断せずに済むのである。

ここで、平行線と垂線の 2 本の線分一組をその交点に置き換えてとらえ、正方形内の一点に対応させて見方を変えてみる。つまり「正方形 B の中に一点を取り、その一点に対して平行線 PQ と垂線 ST を引く」という見方に変える。そのようにして見直した場合の点集合は、＜38＞図のように平行四辺形 PQZV の内部領域と平行四辺形 XWRU の内部領域の共通領域となる。



＜38＞図

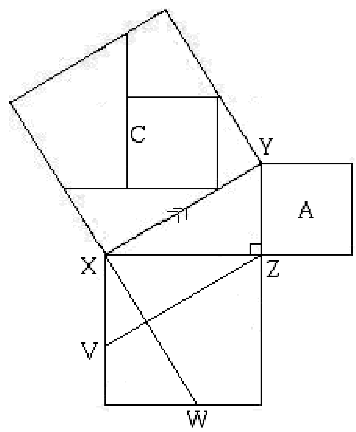
つまり、＜38＞図の斜線部分内に 1 点を取り、その点を通るように平行線PQと垂線STを引いて裁断すると正方形 A を裁断する必要がなくなり、この斜線部以外に一点をとって平行線と垂線を引くと正方形 A を裁断する必要性が生じてくるのである。

（ⅱ-ⅱ） 正方形 A を裁断する場合の方法

今までは正方形 B の裁断の方法を見てきたが、それに付随して正方形 A に裁断する必要性が生じた時、正方形 A をどのように裁断すればよいのかを述べる。

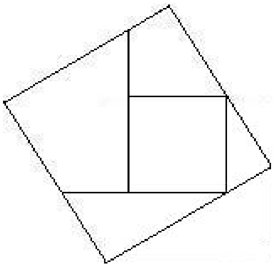
そこで、正方形 A を裁断しなくても済むような正方形 B の裁断方法を例にとり、正方形 C に A と B の断片を組み込んだ図を見ながら、正方形 A に裁断する必要性が生じた時の裁断の仕方を考察する。

＜39＞図のように正方形 B を XY の平行線 VZ と XY の垂線 WX で裁断した場合（＜38＞図の線分 VZ と WX の交点に 1 点を取った場合であるので、これは斜線領域内に含まれているので正方形 A を裁断せずに済む）を見ると＜39＞図の正方形 C の部分のように埋め込まれる。

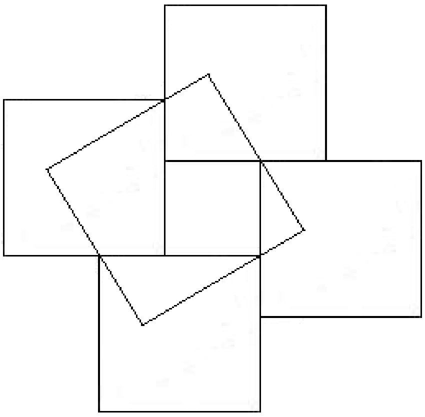


＜39＞図

裁断した断片の正方形Ｃへのはめ込み方は後で別に述べるとして、今は3-1-1の定理の証明＜4-ⅳ＞の時に用いた平行移動によってはめ込んだものとしておく。この＜39＞図から正方形Ｃの部分を抜き出すと＜40＞図のようになるが、これは正方形Ａに正方形Ｂの断片４枚が接合されている形なのでこの断片に元の正方形Ｂを合わせてみると＜41＞図のようになる。

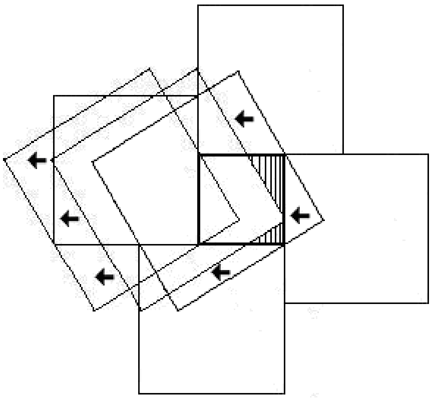


＜40＞図



＜41＞図

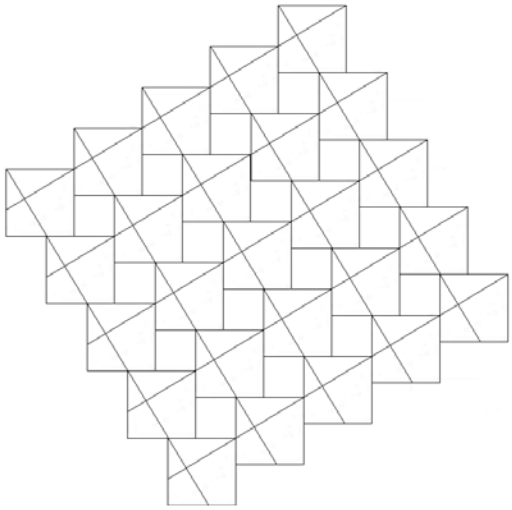
＜41＞図は、５枚の正方形の中（B4 枚と A1 枚）に正方形Ｃが納まっているのであるが、この正方形Ｃを＜42＞図のように平行移動させると、正方形Ａが正方形Ｃからはみ出してしまうのである（＜42＞図の斜線部)。この正方形Ｃからはみ出した正方形Ａの領域がそのまま正方形Ａの裁断箇所となり、正方形Ａ内部の線分がそのまま切り口となるのである。このように見ていくことによって、正方形Ａが正方形Ｃの内部に納まるような正方形Ｂ上の点の取り方や、正方形Ｃから正方形Ａがはみ出た時の正方形Ａの裁断方法などが見えてくるのである。



＜42＞図

しかし、正方形Ｃの平行移動のさせ方によってはこの５枚１組の図形から正方形Ｃがはみ出してしまい、正方形Ａの裁断方法が見えなくなってしまうのである。

そこで＜43＞図のように５枚を敷き詰めた平面と、正方形Ｃを敷き詰めた平面を考える。そうすれば、正方形Ｃをどのように平行移動させたとしてもすべての場合ついて検討ができる。



＜43＞図

このように見れば正方形Ｂの裁断の仕方や正方形Ａの裁断の仕方は、正方形Ｂの内部及び周上の一点の取り方で決まることがわかる。つまり、正方形Ｂの内部及び周上ならばどこに１点を取ろうとも大丈夫であるということがわかる。

(ⅲ)　裁断方法の結論

正方形 B の内部(または周上)ならばどこに一点をとっても良い。(ただしこの１点の取り方によってＡを裁断するかのかしないかが変わる)正方形Ｂの内部及び周上に一点を取る。これをＯとする。このＯを通るように直角三角形の斜辺に平行となるような直線とこの平行線に垂直な直線を引く。

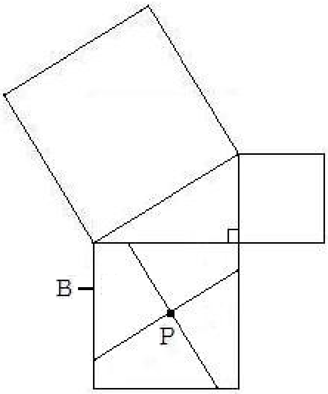
3-3-2-2　授業の流れ＜Ⅱ＞（イ）

今までは、直角を挟む２辺の長さを 3cm と 5cm で考えてきたが、これが直角三角形の大きさ（辺の長さ）を変えても通じるかどうか確かめてみる。各自好きな長さで直角三角形をかいてみて「(ⅲ)の裁断方法の結論」で示したような方法で出来るかどうかを確かめてみる。そうすると直角三角形の各々の辺の上に各辺を一辺とする正方形を立てるとどんな直角三角形でも A＋B＝C が成り立ちそうなことがわかる。

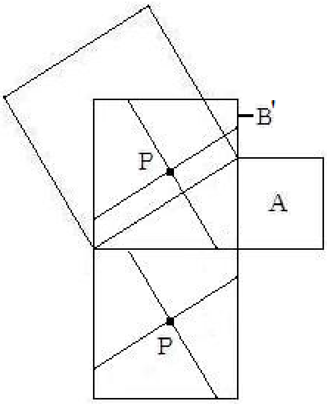
ここで直角三角形の一辺の長さをa,b,cとすれば直角三角形の面積はそれぞれ、A＝a^2、B＝b^2、C＝c^2、と表せるからa^2＋b^2＝c^2となるのである。

最後に正方形Ｃへのはめ込み方を付け加えておく。

① ＜44＞図のように正方形Ｂ上に適当に点Ｐをとり、その点を基準に直角三角形の斜辺の平行線とその垂線を引き、直角三角形の底辺に合わせるように正方形Ｂを平行移動させる。＜45＞図のようにこの正方形をＢ'とする。

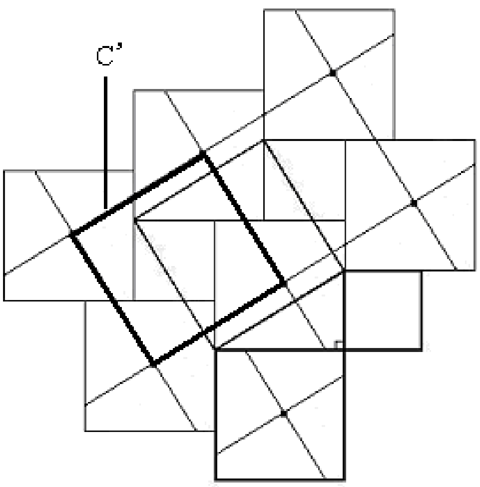


＜44＞図



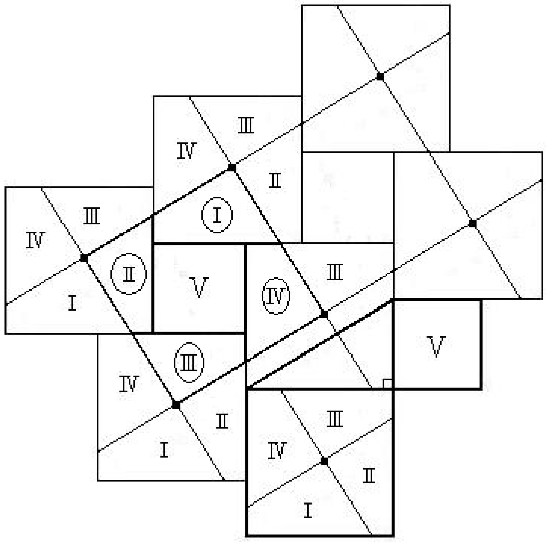
＜45＞図

② 次に＜45＞図の正方形のＢ'を基準にＢ'4枚とＡ1枚で前述の＜43＞図のように平面をしきつめ、＜46＞図のようにＢ'上の点Ｐに対応する点どうしを結ぶと正方形Ｃと同じ大きさの正方形が出来るのでこれをＣ'とする。



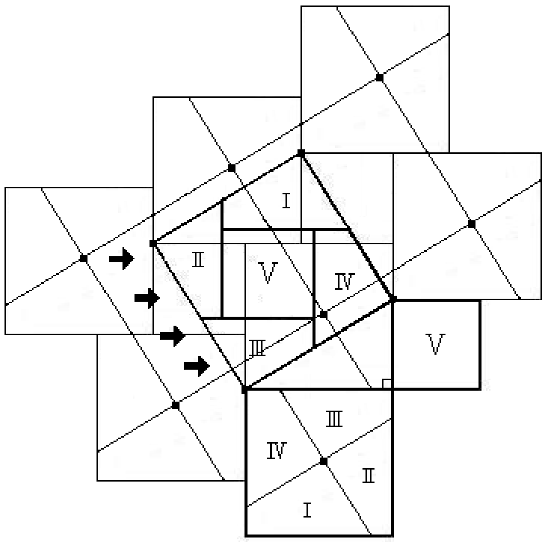
＜46＞図

③ ＜47図＞のようにＣ'の敷き詰め方がわかったら＜48＞図のように元の図形の正方形Ｃに平行移動させる。



＜47＞図

↓



＜48＞図

このようにすると前述した「（ⅲ）裁断方法の結論」のところで裁断した正方形をどのようにはめ込めばよいのかがわかる。

第4章
三平方の定理の証明を通して「科学的精神の開発」を目指すための指導法について事例的に考察する

本章の目的は三平方の定理の証明を通して「科学的精神の開発」を目指すための指導法について事例的に考察することである。これについては 2-3 をもとに、指導法を検討していく。

（α）「科学的精神の開発」を目指すための指導法を考察していく前段階として、学習指導要領における三平方の定理のねらいや位置づけ方について考察していく。（4-1）

（β）前章までの考察をもとに三平方の定理の証明を考えさせるための指導プランを考える。（4-2）

（γ）（β）のプランをもとに三平方の定理の導入部分で実験的に生徒に考えさせ、そこでの生徒の反応をもとに「科学的精神の開発」を目指す指導法を考察していく。（4-4）

考察の視点は次の通りである。

ア、三平方の定理を証明していく上で、どのあたりに科学的精神があらわれてくるのか。

イ、どのように授業（指導）を工夫すれば科学的精神が表れてくるような授業になるのか。つまり、「科学的精神の開発」を目指す指導につながるのか。

中学 3 年で扱われている三平方の定理は教科書では定理の証明から導入していっている。この導入で「科学的精神の開発」を目指すための指導法を考察していく。

4-1 学習指導要領にみる三平方の定理の証明の目標

三平方の定理の証明について、学習指導要領（平成 10 年）では次のように示されている。

> 三平方の定理について理解し、それを用いることが出来るようにすること。
> ア、三平方の定理を見出し、それが証明できることを知ること。
> イ、三平方の定理の意味を理解し、それを利用出来ること。[23]

これに対して次のように解説が加えられている。

> ① 三平方の定理について
> 三平方の定理は直角三角形の三辺の長さを表しており、数学において重要な定理である。指導に当たっては、様々な図形の性質を証明することの延長として三平方の定理を扱うのではなく、直角三角形の三辺の長さの関係としてその美しさに触れられるような工夫と配慮が望まれる。よく知られているように、三平方の定理は測量などの分野で応用される活用範囲が極めて広い定理である。
>
> ② 三平方の定理を見いだすこと
> 三平方の定理の導入に当たっては、例えば、古代エジプトでの縄張り師の話とか、古代ギリシャの数学者ピタゴラスによって定理としてまとめられたとされているとかいった、この定理にまつわる歴史的な背景や逸話の紹介等を通して、生徒の興味・関心を引き出す工夫をすることができる。
> さらには、方眼用紙のます目を利用して直角三角形をかき、その周りに出来る正方形の面積の関係に着目し、観察、操作や実験といった活動を通して三平方の定理を見いだすことも可能である。
>
> ③ 三平方の定理が証明できることを知ること
> 三平方の定理の証明方法としては、図形による方法、代数的な方法など、いろいろな証明方法が知られている。しかしながら、それらの証明の中には、生徒にとって技巧的ととられる向きのものも見受けられる。したがって、生徒の興味・関心に応じて取り扱うこととし、その結果として証明ができることを知る程度とする。
>
> ④ 三平方の定理の意味
> 三平方の定理は、先にも述べた通り、直角三角形の三辺の長さの関係を表したものである。また、直角三角形のそれぞれの辺を一辺とする三つの正方形の面積間には、常に一定の関係があるということを表している。つまり、三平方の定理は、長さの関係を表すとともに面積の関係を表すものと見ることができる。図形と数式を総合的に把握することが出来る場面の一つである。[24]

この目標を見ていくと、三平方の定理はその定理を見出したり証明したりすることよりも直角三角形の 3 辺の長さの関係として見ることができ、これを利用できることの方に重点が置かれているようにみえる。実際に教科書をみても定理を見出したり証明したりすることよりも定理を利用した計算や定理を含んでいるような図形の問題に多くのページ数が割かれている。例えば、東京書籍（平成 18 年）では三平方の定理に関するページが P130 ～p149 までであるが、そのうち三平方の定理に関する証明に対して割かれているページは P130～P133 と P149 である。この目標の中でも触れられている通り、三平方の定理の証明については「生徒の興味関心に応じて取り扱うこととし、その結果として証明ができることを知る程度とする。」[24] としており、

証明自体には深入りしないとなっているのである。その理由として「それらの証明の中には生徒にとって技巧的ととられる向きのものも見受けられる。」[24] からとなっているのである。序論の所でも述べた通り、三平方の定理の証明を本研究の題材として扱うにあたり手始めに今日たくさん知られている証明のうちでも 3-1 で挙げた十数個を証明してみたが、これだけみても目標の中に書かれてある通り技巧的な証明があり、中学３年の授業で扱うには難しいものがあることがわかる。3-3 で扱った定理の証明を例にとってみると

＜斜辺を一辺とする正方形の一辺を切り出すために斜辺と平行に切り出すこと＞

が技巧的であり、

＜斜辺を一辺とする正方形の一辺が無理数になってしまうこと＞

が中学３年の授業で扱うには難しいのである。

三平方の定理は直角三角形の三辺の長さの関係が $a^2+b^2=c^2$ となることを表しており、この等式の要素である＜a、b、c、a^2 、b^2 、c^2＞やひいては＜a^2+b^2＞や＜＋、＝＞の文字や演算の意味を考えることによって、この数式をいろいろな場面と結びつけることができ、総合的に把握することが出来る場面といえる。

定理の証明の際にはこの等式を〈a、b、c、a^2 、b^2 、c^2〉や＜a^2+b^2＞や＜＋、＝＞の文字や演算に含まれる意味を考えながら、線分の長さや正方形の面積などの事象に変換（置き換え）して証明をしていくのであるが、この定理の証明法自体がたくさん知られていることから、証明をしていく際に出てくる変換の方法はそれ以上に存在するのである。「科学的精神の開発」を目指すのは、あるもの（解決しようとしているがわからないもの）を他のもの（既知のもの）に変換（置き換え）していく過程で生じる思考を利用しながら陶冶を促すためであるが、この数ある証明法の中から証明法や変換していく方法を吟味していき、その選び方や扱い方さえ間違えなければ「科学的精神の開発」を目指せる要素が十分に含まれていると考えられるし、（学習指導要領の中で三平方の定理の証明を扱っていけないとは書いていないが）陶冶を促せる要素があるので、むしろ授業で扱うべきだと考える。

4-2　授業の計画
　ここには授業の指導案を載せておく。

数学科学習指導案

日時　H19 年 11 月 20 日(火)　19：10～19：40
対象　個人的に指導している中学校の生徒　2 名(女 2 名)
指導者　木野田　一也

1　主題　　三平方の定理の証明

2　目標　三平方の定理の証明を考えさせ、正方形の裁断方法を探っていく過程を利用して「科学的精神の開発」を目指す

3　授業について

①　この指導の特徴、実情、留意点
　学校ではなく個人的な指導の場で実施することにした。それほど時間がとれないため、少しの時間（30 分ぐらい）を頂いて三平方の定理の導入の授業を実施する。

②　生徒について
　中学校 3 年の 2 人の生徒を対象とするが、実施する場所が学習塾ということもあり 2 人とも通っている学校が異なっているため習っている学習事項に差が生じている。1 人は塾で学習している単元と同じか少し早い位で、もう一人は塾で学習している単元よりも 1 つ分ぐらい遅れている。この授業を実施するころには一人が三平方の定理を知っていて、もう一人は三平方の定理を知らないという状況を想定した。
　一人の生徒は春先（4 月ぐらい）から、もう一人の生徒は夏ごろ（7 月ぐらい）から 1 週間に 1 度ではあるが授業をしてきていて、授業の際にはなるべく問題を解く際にどのようにして考えたのかを発表させるようにしてきたため、発言することにはさほど抵抗を感じていないと思われる。2 人の間には既習事項に差が生じているために、授業の際には 1 人が予習で 1 人が復習となり、問題を解かせると 1 人が解けて 1 人が解けないという場面になることがある。そういう時は、なるべく復習や確認をさせる意味でも問題を解けた生徒に解説（解き方等）をさせている。それ故に 2 人で話し合うことについてはそれ程抵抗がないと思われる。

3　教材について
①　領主の土地を譲渡する場面を素材とした意味
　三平方の定理は直角三角形ならば直角を挟む 2 辺のそれぞれの平方の和が直角の対辺の平方となるという定理であるが、この素材ではこの 1 辺の平方を面積と捉えなおし、直角を挟む 2 辺でできる正方形の面積の和が斜辺でできる正方形になることを用いている。ここで、この定理の証明を課題として与える場面を考えてみると、唐突に「この定理の証明をしてください」

と与えるよりは現実の場面に即したほうが課題として取り組みやすくなるのである。そこで現実の場面とはいかないまでも領主の土地を譲渡する場面に当面させることにした。この場面では正方形の面積を土地として見てこの 3 つの土地を 2 人に等分する場面では不公平が生じやすく、この<不公平を避けるためにはどうしたらよいか>という心理が働くのである。一般に土地の譲渡に公平を期すには、土地の広さ以外にも日照時間や土地の形状、場所などのいろいろな要素が絡んでくるため、一概には土地の広さだけで等分というわけにはいかないが、今の課題では等分するのに広さ以外の要素は考えないことにしている。土地の譲渡に際して領主と家来の話を用いていること自体にはそれ程深い意味はないが、領主と家来とのやり取りにふれながら課題に取り組みやすくさせるために設定したものである。

② 「科学的精神の開発」について

本時で設定課題<2 つの正方形を大きな正方形にはめ込もう>であるが、この課題に当面したときにまず生徒がやることは、1 番大きな正方形に中ぐらいの正方形を 1 つの直角に合わせるようにして置き、残りのスペースを 1 番小さな正方形を裁断して埋めていくことであると予想される。これはうまくいかないのだがそれは本課題では直角を挟む 2 辺を有理数に設定していることに対し、斜辺を無理数に設定していることに起因している。ただ直角三角形の 1 辺の長さをそれぞれ 3cm、4cm、5cm のように 3 辺の長さが自然数になるように設定すれば今述べたような方法でもうまくいく可能性があるが、本時（1 辺の長さをそれぞれ 3cm、5cm、$\sqrt{34}$cm に設定してある。）ではうまくいかせることに目的があるのではなく今考えていることがうまくいかなかった、または答えがどうも導けないような場面に当面させることに目的があるため、本時では斜辺の長さを無理数になるように設定したのである。

答えが導けなくなるような場面に当面させるには 2 つの理由がある。1 つ目は問題点をはっきりさせ捉え方の変容を促すためである。答えを導けなくなった時にはまず自分がこの問題をどうして解けなかったのか、解くための条件を見落としてはいないか、問題点がどこにあるのかなど、一旦問題や行き詰った原因を見直す必要があり、このことによって<ではどうしたらよいのか>となり、捉える構造の変容が促されるのである。2 つ目はこのように構造の変容を促す場面でこそ（教育の目標である）陶冶につながるからである。それはその課題の適度な抵抗にあったときに初めてその課題を本当に考え出すからである。

5 準備物

- のり、はさみ、カッター、カッターマット、定規 …2 セット
- 領主の土地が描かれてある紙（資料 1） …2 セット
- 質問用紙（資料 2） …2 セット
- 正方形 3 枚（黄：一番大きな正方形、青：中ぐらいの正方形、赤：一番小さな正方形）を張り合わせたシート（資料 3） …10 セット
- 大、中、小の正方形を各 10 枚ぐらい

6　指導過程

<table>
<tr><th>指導項目、指導内容</th><th>予想される生徒の反応</th><th>備考</th></tr>
<tr><td>① 資料 1 を読み合わせる（3～5 分）</td><td>・　読む</td><td>・前回の授業のときに資料 1 を渡して目を通してもらってきている。

・この資料 1 に関して質問を 2 つ設けている。（資料 2）</td></tr>
<tr><td>② 資料 1 に関しての質問の答えの発表（2 分ぐらい）</td><td>・Q1 の答え
不公平、公平、わからない

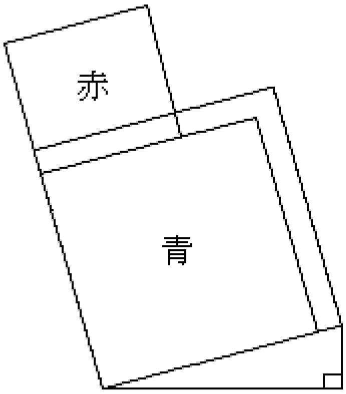
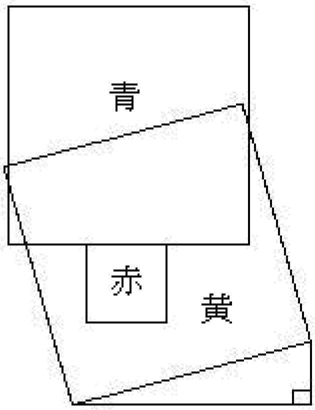
・Q2 の答え
（イ）、A と B の 2 つの土地をもらったほうが得だから。

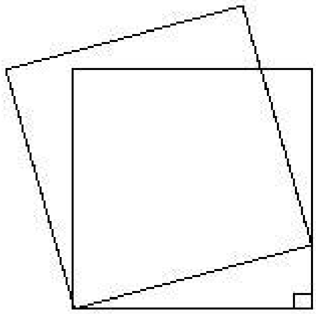
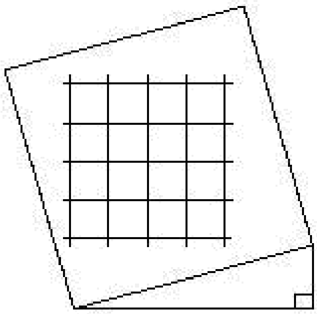
（ロ）、C の方が小さく感じる。

（ハ）、その他</td><td>・この資料 1 の問題は三平方の定理に関することであるが 2 人の生徒のうち 1 人が三平方の定理を習っていてもう一人は習っていないので Q1 の答えで”公平”だというかもしれない。

・Q1 も Q2 も直感で答えると思われる。</td></tr>
<tr><td>③ 解答

④ 問題（15 分強）</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">直角三角形の上に正方形を立てた時、直角を挟む 2 辺からできる 2 つの正方形の面積の和は斜辺から出来る正方形の面積に等しくなることが知られている。それでは、2 つの小さな正方形を大きな正方形の中にはめ込んでみよう。ただし、隙間が出来てはいけないしはみ出してもいけない。（資料 3）</td></tr>
<tr><td>問題についての補足や質問など</td><td></td><td>※以下、斜辺を一辺とした正方形を＜黄＞、中ぐらいの大きさの正方形を＜青＞、一番小さな正方形を＜赤＞と呼ぶことにする。</td></tr>
</table>

⑤　作業開始	(ア)、青を黄の四隅に置き残りのスペースを赤で埋めようとする。＜49＞図  ＜49＞図 (イ)、赤を黄のマス目（それぞれの正方形は方眼用紙を切って作っているので正方形の表面にはマス目が存在する。）に合わせておき、残りのスペースを青で埋めようとする。＜50＞図  ＜50＞図 (ウ)、青を平行移動させて青の上に置き、はみ出した部分を切り、残りのスペースを埋めようとする。＜51＞図	(ア)、(エ) は角（直角）を合わせると黄の大方のスペースが埋められるのですぐに目が付きやすい。 (イ)、は赤が黄の方眼にはまるので、まずそこにはめてから残りのスペースを青で埋めようとする。 (ウ)、は青を平行移動させればよいので目につく。

	 ＜51＞図 （エ）、（ア）の反対 （赤を四隅にあわせて置き、残りのスペースを青で埋める。） （オ）、マス目に沿って細かく切って埋め込もうとする＜52＞図  ＜52＞図 （カ）、その他	（オ）、この方法は（ア）や（エ）に次いで出てきそうな方法である。 ※（ア）～（オ）のやり方が予想されるがどの方法をとったとしても行き詰ってしまうことが予想される。（(ア)、（エ）のやり方ではうまくはめ込めないが（イ）、（ウ）、（オ）のやり方だとともするとはめこめるが偶然に過ぎない。）
⑥　作業終了 （25～30 分）	・作業している手が完全に止まってしまう。	・本時は時間がそんなに取れないのでここで考えること切り上げる。
⑦　はめ込み方の解説		・解説するときに変換を意識させるようにする。

4-3-1　授業全体の記録（生徒の発語のみ）

時間帯	主な活動や発言
19時10分	T　それじゃあ、授業を始めます。それでは早速、資料1を読んでみてください。S2さんお願いします。
11m18s	資料の読み合わせ →資料1の読み合わせ後
14m18s	T　ありがとう、わかった？（これは問題の意図を聞いている。） S2　ああ、なんか分かった気がする。 T　へぇー。 S1　なんか今の調子で読んだらたぶん最後の家来2だけなりきってないようにきこえるのだろうか。 T　やるきなさそう～ S2　不公平！！（読み直して） T　まあ、実際に土地をもらうわけではないからなあ～ S2　朗読は苦手だ。 T　あ、そうなの？ S1　大好きだ！あ、大好きじゃない。 T　うっし、
14m45s	S2　あ、ちょっとまってこれ計算できるんでないの？ S1　計算？ T　なんだ計算って？ S2　計算って三平方の定理使えないかと思って。 T　なにそれ？ S2　3対4対5って T　うふふふ、うふふふ、ふふ。 S2　あれ？使えないのこれ？ S1　がんばってね T　なんだ？三平方の定理って。 ここで生徒S2が計算を始める S1　何故計算しだすんだ？ T　うふふふ、うふふふ。 生徒S2が計算をしている様子を見ながら S1　でそれで俺いったいどうすればいんだろ。 T　いや、後でちゃんと解決できるし、う～とさ S2　（計算し終えた様子で）ほらほらほらほらいんだよ同じだよ。 T　どこがさ？ S2　ここ、（底辺をさして）4、4で、（斜辺の辺をさして）5で、2乗して T　じゃあ定規で測ってみて？定規ある？ S1　ありますけど T　じゃあ、測ってみて。 S2　（生徒S2が側辺を測って）ほら3㎝、（底辺を測って）あれ？こっち違うぞ？
	S1　はははは、先生がそうなるように作ったからだよ。 T　うっほー S2　そっかー S1　（生徒S2の発言を受けて）「そっかー」ってそっかー。（生徒S2が斜辺を測っているところを見ながら）そこは？ S2　5,8・・・微妙（→これは斜辺が$\sqrt{34}$だから。）
16m14s	T　微妙 S2　けど、3対4対5だったら、説明できるんだけど。 S1　（ここは、書き込んでいる紙が生徒S1のものだが、その紙に計算していることに対して）はっきり言ってもう自分のものにしてるってこと？ S2　あ、ごめん（計算したことを）消さなきゃ。 S1　あ、消さなくてもいいし、 T　いいよいいよ消さなくても。（後で回収するつもりだったので消して欲しくなかったという意味で。） S1　先生が今いいっつったし。 T　後で集めるから。 生徒S1が生徒S2から紙を返してもらいながら
16m42s	S1　2番は？（宿題には質問が二つあってその2つ目） T　2番。2番は後で（回収してから）見ておくよ。うっし、では解説するか。（問いの1の正解の発表）ま、公平なんよ。で、問題を整理するとこんな感じよ、うーんとさ要は直角三角形に（ここで生徒S2に呼ばれて）うっえー？ S2　そっち写さなくてもいいのこっちばっかで（ここは、生徒の方にカメラを向けていたので先生の方は写さなくてもいいのかという意味） ～中断約1分～
17m38s	T　直角三角形があって、で、これを（底辺）一辺とする正方形を立てるんよ。 S1　うん。 T　（底辺を指しながら）ここをね S1　ふんふんふん。 T　（側辺と斜辺を指しながら）ここもたてるんよ。そしたときにさ、（側辺を一辺とする正方形）ここA、（底辺を一辺とする正方形）ここB、（斜辺を一辺とする正方形）ここCとしたときに、Aの面積とBの面積を合わせるとCの面積になります。っていう話なんよ。 S1　なぜ？ T　それを今からやろうとしていたんだけどな。

	S1　あ、そすか。ごめん。
	T　んふふふ。（生徒 S2 に向かって）学校でやったの？
	S2　やってない。あ？やってない。うん？やってないな。うん。
	T　（正方形 A と B を指しながら）これとこれ足せば（正方形 C を指して）これになるのだとすればさ、（正方形 A と B を指しながら）これとこれとをさなんかこう、うまく、こう切ってさ、これとこれとをうまく切って、（正方形Cを指しながら）ここにはめこめばさ、ぴったりはめ込めるはずなんよ。言ってることわかるかな。
	S1　ふーん。
	T　要するに、（正方形 A と正方形 B を指して）これとこれを切って上手く切ってはめ込もう。はめ込んでみようっていう授業をこれからやろう、やろうっていうかやります。それで、あれか、問題を配ろう。
19m18s	ここで問題用紙を配る
	S1　（問題用紙が小さかったので）ちっちゃ。
	T　じゃ、（渡した問題を）読んでみてください。
	S1　きっ
	T　え？えへへへ、ちょ、「きっ」の後はなんなの？
	S1　ん？え？いやいやいや。
	〜この後問題を 10 秒ほど黙読〜
19m35s	
	S2　どやってはめこむの？
	S1　切る
	T　それを考えてもらうんだよ。
	S1　切ればいいじゃん。（2，3 秒して問題用紙を見ながら）最初に A はめ込んで･･･（5 秒ぐらいたってから）
19m50s	T　さてやってみよう。
	S1　A が、C の 2 倍だから、
	T　うん？
	S1　A が C の 2 倍じゃないの？
	T　A が C の 2 倍？なのかなぁ。
	S1　え、だってさっき、なんか（隣にいる生徒 S2 を指している）
	S2　いや言ってないよそれは。
	S1　いやそうじゃなくて、比で、比でさぁ、比が、比の数字が
	T　ああ、比が、でも（直角三角形の側辺を指しながら）ここさっき 3 ㎝で、（底辺を指しながら）ここ 5 だったよ。
	S1　で、C が約 6 じゃん。（これは先ほど 5，8 ㎝と出した。）

	T　約 6 だね。
20m36s	S1　だから、2 倍だから A をはめこんで、で、B を半分にして、で、隙間に埋め込む。
	T　おしやってみよう。（ここで実際に正方形を切ってはめ込んでもらうための道具が入った袋を取り出す。）
	S1　（この袋を見ながら）だからそれ持ってきたのか。なんか差し入れかなぁ〜と思ったんだけどさ、ものさししか入ってないからさ。
	T　差し入れってなんぞ？…うーんとさ実際に切ってもらうことにするか。
	S1　でもそれ失敗したら大変なことになるんでしょ。
21m16s	T　そんなことないよ。いっぱい作ってきたから。とりあえず 2 枚ずつ渡しておくか（直角三角形の上に正方形が 3 枚貼り付けてある図<資料 3>）じゃあ、はめ込んでみてください。（渡した紙の正方形を生徒 S1 がはがそうとしていたので）ああ、それはがさないで。
	S1　切るのめんどくさい。
	〜ここで準備した正方形を机の上に出す。〜
	S1　じゃあ、（資料 3 を指しながら）これ切らなくていいじゃん。
	T　（机に置いた正方形を指しながら）これを今渡した台紙にペタって貼ってくれればいいから。
	T　カッター持ってる？
	S2、S1　ない！
22m09s	S1　黄色意味ないじゃないですか？（黄色の正方形の上に二つの正方形を貼り付けてと指示したが、その黄色い正方形は渡した台紙の上に貼り付けてあるのでこのことを指して意味がないといっている。）
	T　そう、黄色意味ないね。
22m41s	〜正方形を切ったり貼ったりするための道具を渡す〜
	T　（渡し終わった後）じゃあ、始めてください。
	S1　あ、ちょっとだめ。（生徒 S1、1 つ目の作業開始：最初に議論していたことを実行。）
	S2　あ、これなんか失敗する気がする。（生徒 S2、1 つ目の作業開始。）
23m07s	S1　あ、だめだ。
	S1　重なっちゃうんだけど。（ここで生徒 S2 を覗き見）
	S1　おお〜。
	S2　無理だろこれ。
23m26s	S1　あ、あきらめたよ。いいや、切って切って切りまくろう。これ紙の無駄遣いだ。地球の温暖化が進んでしまう。（生徒 S1、1 つ目の作業終了）
23m36s	

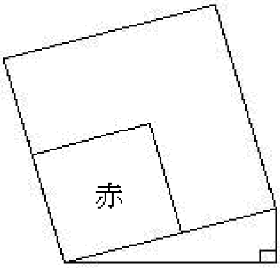
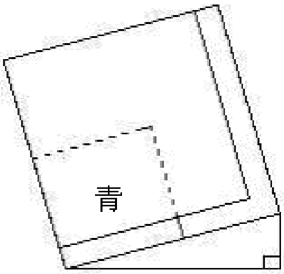
	S2　あ、ちがうなあ。
	S1　無理だろう。
	S2　わざとこれずらしてる。（黄色の正方形を指差しながら。）
23m52s	S1　これ（赤と青の正方形を持ちながら）全部バラバラにすんげーバラバラにすればはめ込める。一つずつ四角をさ。
	S2　そうそうそう。
	S1　それするが。（生徒 S1、2 つ目の作業開始。青の正方形を切り始める。）
	S2　がんばれ。
25m18s	S1　うわー、すごい切りやすい。（カッターが新品なので。）
	S1　あー、くそ、時間掛がる。（切り始めてから 20 秒ぐらい）
25m25s	S1　さ、これを一生懸命はめ込むんだ。（1 分 20 秒かけて青の正方形を切り終えてから。）
	S1　あ、これバラバラにする必要ないんだ。（細かく切った正方形の一つ目をはめ込んだ時）
	S2　ああ、これなんか疲れてきそうな感じ。これはやめとこ。(2 つ目の作業を切り上げて新しい青の正方形を取る。）
25m43s	S1　ああ、俺疲れてるよ。これ切ったとき、すでに。
27m01s	S2　ほんとにやったの？（生徒 S1 が青の正方形をバラバラにしたことに対して。）それ、並べるまでに大変じゃないの？
	S1　はぁー！
27m49s	S1　あ〜、こんなにあるー。（小さい正方形を 3 つ貼ってから）これは俺にいったい何を求めてるんだ？って感じに思えてきた。
	S2　あー、おしい、合わない。（生徒 S2、2 つ目の作業終了、そして小考）
	S1　これ合ってなかったら結構ショックだよね。
28m04s	S1　結構はみ出してるんだけどね、ちょっと。（小さい正方形を 3 つ横に並べて貼ったらほんの少しはみ出した。）
	T　それ（生徒 S1 の作業を見ながら）はみ出してるんじゃないの？
	S2（生徒 S2、3 つ目の作業開始）
	S1　そこはアバウトに（T の質問に対して。）
	T　アバウト？
	S1　そういうことは気にしない。
	T　はみ出してはいけないって書いてあるよね。(問題用紙にということ）

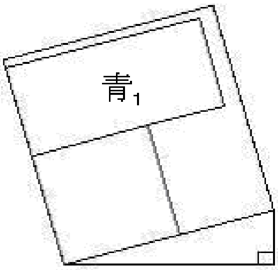
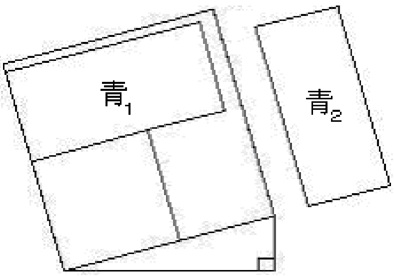
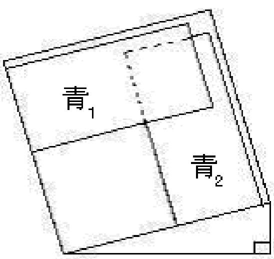
	S1　大丈夫！
	T　大丈夫？はみだしてない？
28m41s	S1　こっちが（赤い正方形をさして）こっち（小さい正方形を貼ったほう）に寄ってるから。それに四角（貼り付けた小さい正方形）が横になったり、縦になったりしてるから、すごい汚い。
29m00s	
31m08s	S2　そーか、これ（黄色の正方形の一辺の長さ）5,8（cm）なんだよね。あわねぇじゃん。
	S1　もう、いや（小さい正方形を貼り続けている。）
	S1　（小さい正方形を貼り終えて）2 つ足りねぇー！！いじめだ！
31m19s	T、S2　はははははは。
	S1　はみ出た部分全部はめ込んだら埋まるから多分大丈夫。
31m31s	S2　これって一緒じゃない？
	S1　はみ出てる部分を切る。
	T　一緒だよね。
	S2　ああ、これどうやって切ろう。
	S1　（あきらめる、生徒 S1、2 つ目の作業終了。）ああ、もういい。はっきりいってこれは精神的に答えました。
	T　うふふふ。
	S1　なんか、出来ないっていうより、もういやです。
	T　いや、でも理屈からいけばさぁー、当てはまるんでしょ。
32m10s	S1　A＋B＝C ですから入るんではないでしょうか。
	T　ね。
	T　でも、それ（生徒 S1 が正方形をはめ込んだシートを指して）だとはまってないよね。
	S1　これ（小さい正方形が）2 個足りないんだって。（ここで生徒 S2 のやっていることを見る。）
	T　全部はめた？
	S1　うん。（うなずく）
32m44s	S2　先生間違ったんじゃない？
	T　え？そんなことないよ。（生徒 S1 が青の正方形を数え始める。）
	S1　（きちんと確認して）そんなことない。
	S2　あ、何ミリか足りない気がする。
33m18s	S1　1、2、3、4、5。8？ここ(黄色の正方形の一辺を指しながら)8 なわけないじゃん。
	S2　あああ、何ミリか足りない。
	S2　うわーおしい、何ミリか足りねー。
	S1　これは先生ひどいよ。…あ、わかったー！わかったー。
	T　え？

	S1　テンション高くなる。
	T　わかったの？
	S1　わかったと思う。
	S2　あ、ショックだー（隣の生徒の反応に対して。）
	S1　だからこれがあるんだー。（黄色の正方形はもともとシートに貼り付けてあり別個に用意した黄色の正方形は意味がないのではないか。という話を授業のはじめにした。）
33m50s	S1　全部違うし、こういうときに限って全部違うし。（シートに貼り付けてある黄色の正方形の方眼の 5cm ごとに引いてある太い線の場所が黄色の正方形ごとに違う。）
	T　ははははは。
35m58s	S1　もう～。（生徒 S1、3 つ目の作業開始。）
	S2　これは難しい。
	T　難しい？
36m10s	
	S1　この中途半端なくしたら大変なことになりそうだな。（最初に後の切った切れ端）
	S2　それはそうだね。
	S1　おお、頑張ればいくんじゃね？
36m34s	S1　いやーこれはどうだろ。（赤い正方形をはめ込みながら。）
	T　いろいろ試してごらん。
	S2　なんだ、楽しいんだ。
37m48s	S2　う～ん、（顔を抱え込みながら）むかつくなぁこれ。
	S2　ちゃんと切らないとだめとかいうやつか。
38m58s	T　あああああ。
	S2　あああ、なんだこりゃあ。
	S1　こういうのってちょうむかつくなぁ。
	T　ははははは。
	S1　いいんだよ。まだ余ってるから。
	T　まだ余ってる？
	S1　頑張って切って入れるんだ。
	S1　精神的に参ってしまいそうだ。
	S2　これってパズル？
	T　ある意味パズルだね。
	S2　いや。
40m12s	S1　なんで否定するの？
	T　パズル問題に出てくるような問題だね。
40m54s	S2　そしたら絶対やらないといけない。
	S2　はあ、なんかいかなそう。
44m36s	S1　たりねんじゃね？

	T　どうかねぇ。
	S1　あ、これは…
45m23s	
	S1　（生徒 S1、作業終了。）これでいいや
	T　それでいいの？
	S2　あ、なんか合いそうで合わなさそうだ。 生徒 S1 はこの間生徒 S2 の作業を見ている。
	S2　てか、すごい複雑な切り方してると思う。
	S1　みしてみしてみして、うわ～～～～～。（生徒 S2 の切り方を見て。）ぞっとした。
46m00s	T　すごいことになってんなぁ。
	S2　自分でもすごいことになってんのに気が付いた。
	S1　真ん中ぐちゃぐちゃだ。俺は端っこがぐちゃぐちゃだ。
19 時 46 分	S2　あれ、余ったぞ。あ、違う、これきっと上手にやれば入るんだよ。
	～ここで作業終了～
	T　はい、お疲れ様。じゃあ答え合わせでもするか。っていうか答えを言ったほうが早いな。
	T　切り方の解説を始める。

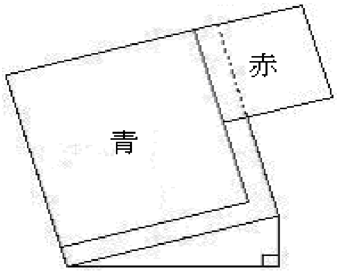
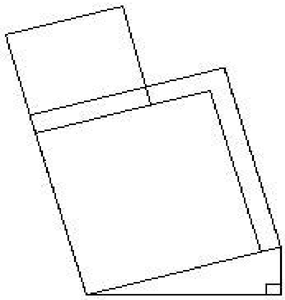
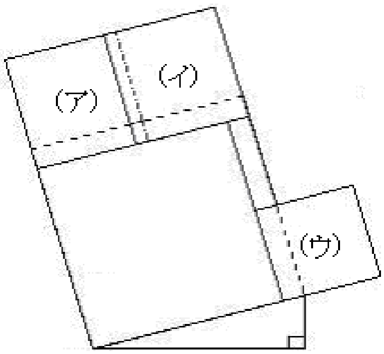
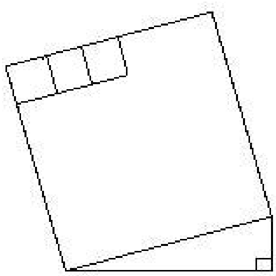
4-3-2　生徒 S1 の作業と発言の抽出

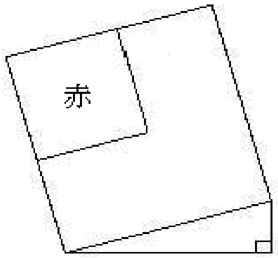
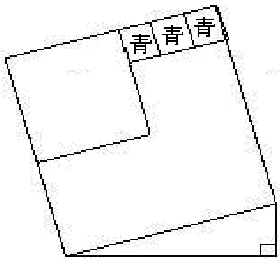
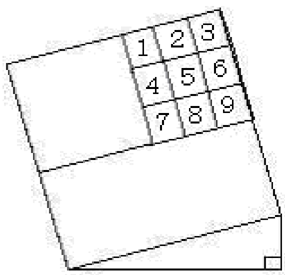
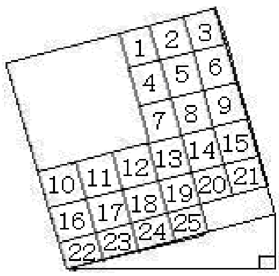
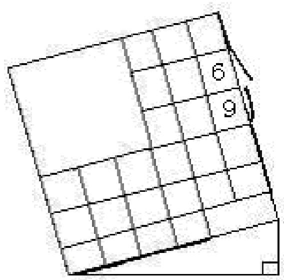
<table>
<tr><th>切り方の手順･推移</th><th>時間帯</th><th>生徒 S1 の作業と発言</th></tr>
<tr><td>・作業 1</td><td>22m09s</td><td>・19m50s の所でのやりとりを実行する。</td></tr>
<tr><td>1、＜53＞図

</td><td></td><td>1、最初に赤色の正方形（以降、赤と記す）をはめ込む。
＜53＞図</td></tr>
<tr><td>2、＜54＞図

</td><td></td><td>2、赤の上に青色の正方形（以降、青と記す。）を置き
＜54＞図
S1「へ～へ～ー、これうまくいく。」

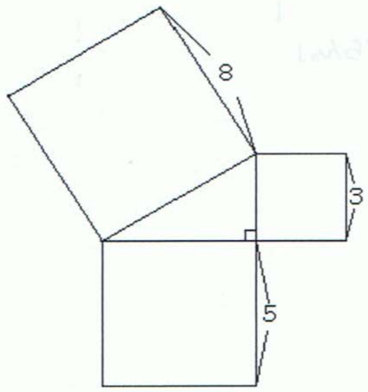
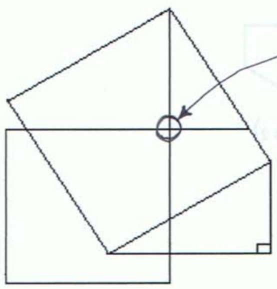
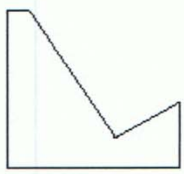
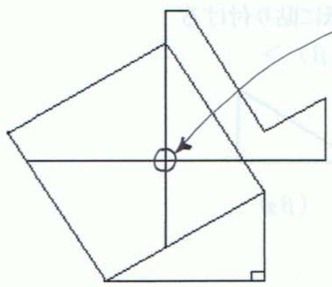
3、青を半分に折って切る。</td></tr>
<tr><td>4、＜55＞図

</td><td></td><td>4、青の半分を赤の上に重ね＜55＞図
S1「あ、ちょっとだめ。」</td></tr>
<tr><td>5、＜56＞図

</td><td></td><td>5、青の残りを黄色の正方形の（以降、黄と記す。）隣に置き、＜56＞図
S1「あぁ、だめだ～。」</td></tr>
<tr><td>6、


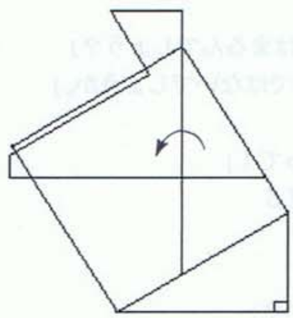
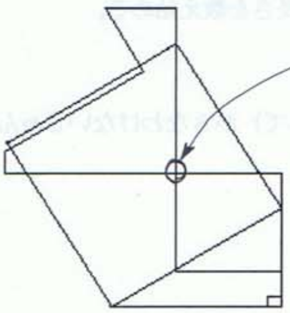
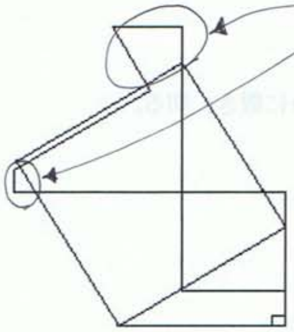
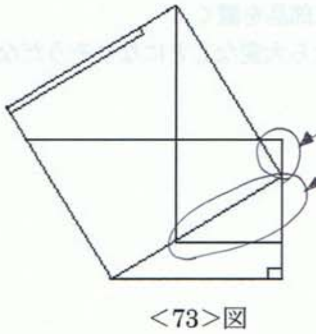
＜57＞図</td><td></td><td>S1「い～や、はめちゃえ！」といいながら青 $_1$ に青 $_2$ を重ねておく。＜57＞図

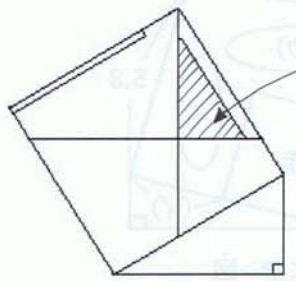
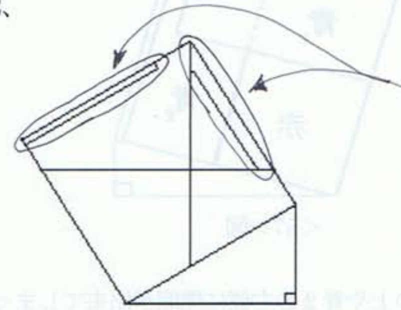
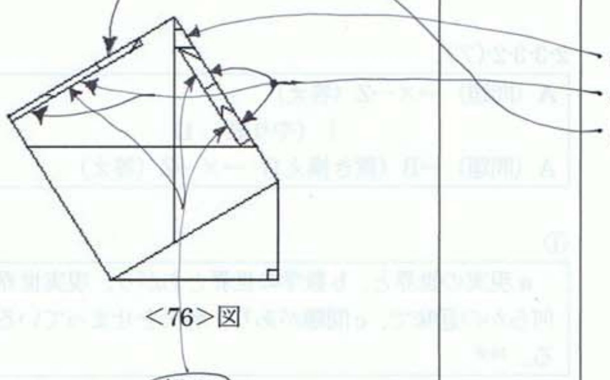
＜57＞図を見ながら
S1「重なっちゃうんだけど。」</td></tr>
</table>

生徒S2の作業  ＜58＞図	 23m07s	ここで隣の生徒S2（以降、S2）を覗き見。 S1「おお〜。」＜58＞図 ↓ S1「いいや、切って切って切りまくろう。…」 （ここで作業1の終了） *・青$_1$、青$_2$、赤をどかしてから5秒ぐらい考える*
7、  ＜59＞図		7、青を黄の左下に合わせて置き、赤をその上に重ねながら考える。＜59＞図
8、  ＜60＞図	 23m36s	8、7の状態で10秒ぐらいしてから（イ）の位置に置き、（ウ）の位置に置き、 S1「無理だろう。」 といいながら両方の正方形を取り除く。 ＜60＞図 *・赤と青を持ちながら* S1「これ全部バラバラに、すんげーバラバラにすればはめ込める。１つずつ四角をさ。」 S2「そうそうそう。」 S1「それするが。」
・作業2	 23m52s 25m10s	*・青を1cm角に切り始める（フリーハンドで）* ↓ *・青を1cmに切り終える* S1「さ、これを一生懸命はめ込むんだ。」
9、  ＜61＞図		9、1個目をはめ込み S1「あ、これバラバラにする必要ないんだ。」 *・そこから2個はめ込み終え　＜61＞図* ↓

10、  ＜62＞図		10、置いた3個の正方形を取り除き、赤を黄の左上に置く。＜62＞図
11、  ＜63＞図	25m49s 26m44s	11、Aの右横に小さい正方形を3つ並べる。そして貼り付ける。＜63＞図 11、小さい正方形の3つ目を貼り終える。 ↓ *・残りの正方形を見て* S1「あー、こんなにあるー。これは俺に一体何を求めてるんだ？」
12、  ＜64＞図	 28m37s	12、9個目を貼り終えてから＜64＞図 S1「結構はみ出してるんだけどね。ちょっと。」 T「はみ出してるんじゃないの？それ？」 S1「そこはアバウトに。」 T「アバウト？」 S1「そういうことは気にしないことに。」 T「はみ出してはいけないって問題用紙に書いてあるよね。」 S1「大丈夫！」 T「大丈夫？はみだしてない？」 S1「こっち（赤を指して）が、こっち（小さい正方形を貼った方）によってるから。しかも、四角（小さい正方形）が横になったり、縦になったりしてるからすごい汚い。」 ………………
13、  ＜65＞図	31m08s 31m19s	13、25個の正方形を貼り終えて<65>図 S1「2つたりねー。いじめだ！」 T、S2「はははははは。」 S1「はみ出てる部分を全部入れたら大丈夫。」 S1「というわけで、はみ出てる部分を切る。」 ↓
14、  ＜66＞図	 31m31s 31m56s	14、正方形の6から下にカッターではみ出した部分を切り始める。 ↓ *・6と9のはみ出た所を切ってあきらめる＜66＞図* S1「ああ、もういい。はっきり言ってこたえました。」 （ここで作業2の終了） T「どう？いけそう？」 S1「もういやです。出来ないというよりもういやです。」

		・ここで14を貼り付けた台紙を他に置き、新しい台紙を取り出す。
		T「でも理屈からいけば当てはまるんでしょう？」
		S1「A+B=Cですから入るんではないでしょうか。」
		・＜66＞図を指しながら
	32m10s	S1「これ2個足りないんだって！」
		・ここで隣の生徒の作業を見る
		T「全部はめた？」
		S1「うん。」
		S2「先生間違えたんじゃない？」
		T「そんなことないよ。」
		・S1 *が青の方眼を数え始める*
		S1「うん、そんなことない。」
15、	32m35s	15、赤と青の正方形の一辺の長さを数え始める。
＜67＞図		＜67＞図
		S1「1、2、3、1、2、3、4、5・・・？」
	32m56s	S1「8？ここ（黄の一辺を指して）が8なわけないじゃん。」
		・これを記入
	33m10s	*・そして「3+5=8」と計算*
	33m13s	S1「これは先生、ひどいよ。」
	33m18s	S1「あ！わかったー！わかったー。」
・作業3		
16、		16、青をここに合わせるように置き、切る。
＜68＞図		＜68＞図 ＜残り部品＞ 
17、		17、ここに合わせるように部品を置く。
	35m58s	S1「この中途半端なくしたら大変なことになりそうだな。」
＜69＞図		＜69＞図

18、  <70>図	36m10s	18、次に残り部品を置き換える。 S1「お、頑張ればいくんじゃね？」 <70>図
19、  <71>図		・ここに合わせるように赤を置きながら S1「いやーこれはどうだろう。」 ↓ T「いろいろ試してごらん。」 <71>図
20、  <72>図		20、この部分を切り取る。<72>図 ↓ 台紙に貼り付ける <残りのピースー（青：α）>  （α_1）　（α_2）
21、  <73>図		21、この部分を切り取る<73>図 ↓ 台紙に貼り付ける <残りのピースー（赤：β）>  （β_1）　（β_2）

22、  <74>図	 38m58s	22、この部分にβ_2を置く。<74>図 S1「これちっちゃい。」 ↓ 貼り付ける ↓ ・*<74>図を見ながら* S1「こういうのってちょーむかつくなあー。」 T「ははははは･･･。」 S1「いんだよ。まだ余ってるから。」 (残りの部品を集めながら) S1「頑張って切っていれるんだ。」
22、  <75>図		S1「はぁ～、なんかこういうのって精神的に参ってしまいそうだ。」 ・*この後いらいらしながらもなんとか残りのピース α_1、α_2、β_1を切って* ・*この部分にはめ込んで終了<75>図*
23、  <76>図 裏返し	44m36s α_1、 α_2、 β_1	23、投了図<76>図 (ここで作業3の終了)

4-4　三平方の定理の証明を通して「科学的精神の開発」を目指すための指導法についての考察

本研究で行った授業をもとに「科学的精神の開発」を目指すための指導法を考察していく。そこで始めに 4-4-1 で生徒 S1 の思考活動を 2-3 にあてはめて考察を加える。次に 4-4-2 で 4-4-1 での考察をもとに「科学的精神の開発」を目指すための指導法についての考察をしていく。

4-4-1 生徒 S1 の活動の思考活動

この問題を解いていく生徒 S1 の過程は大きく分けると次の 3 つに分類できる。

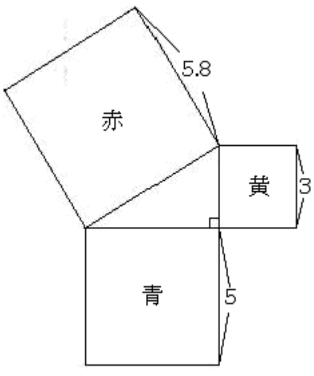
Ⅰ、19 分 50 秒のところでのやり取りを実行　…作業 1
Ⅱ、青を 1cm 角に 25 個にして黄をはめ込む　…作業 2
Ⅲ、ふと黄に引いてある黒い線に気付いて青を合わせて置くようにして切る　…作業 3

4-4-1-1　作業 1 への考察

<作業 1 の概要>

・課題を出してから作業に取り組むまでのやり取りを実行。

資料を読み終えた後に、生徒 S2 のやり取りで資料 1 にかかれてある図の正方形の長さを定規ではかり、3 つの正方形の長さを知っていた。



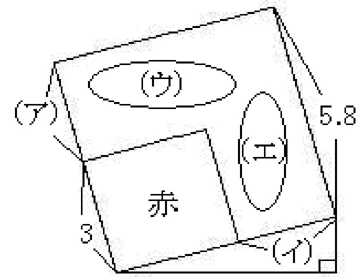
<77>図

前回（授業をした日の 1 週間前）の授業まで相似の単元をやっていた。しかし、面積比が相似比の 2 乗に比例するということを扱った授業はやっていない。

○この時の生徒 S1 の思考 1

・赤を<78>図のようにはめ込むと残りの長さ（ア）と（イ）が 5.8－3＝2.8 となる。

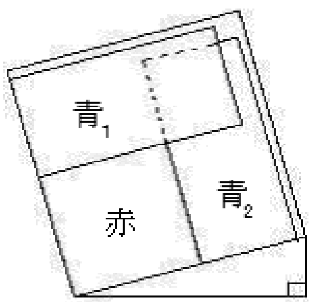
・青の正方形の一辺が 5cm なので、半分に折って切れば 2.5cm の長方形が 2 つ出来るから（ウ）と（エ）にはめ込めばうまくいく。と考えたのではなかろうか。



<78>図

○作業 1（実際にやってみて）

青の正方形を 2 つに折って<78>図の(ウ)と(エ)に<57>図のようにはめ込んだ。



<57>図

しかし、青 1 の上や青 2 の右側に隙間が出来てしまったため「だめだぁ～」といいながら隣の生徒 S2 の作業をのぞき見る。

ここまでが生徒 S1 の作業 1 の活動である。この作業や思考を 2-3-3-2 で引用した思考活動の過程に当てはめていくと次のようにとらえることができ、広く解釈すれば以下の①～⑤に相当する活動としてみることができる。

2-3-3-2-(ア)

A（問題）→×→Z（答え） ↓（やり直し 1） A（問題）→B（置き換え1）→×→Z（答え）

①

a 現実の世界と、b 数学の世界とあがり、現実世界には何らかの意味で、c 問題があり、解決をせまっているとする。[16-2)]

<問題>

直角三角形の上に正方形を立てた時、直角を挟む 2 辺からできる 2 つの正方形の面積の和は斜辺から出来る正方形の面積に等しくなることが知られている。それでは、2 つの小さな正方形を大きな正方形の中にはめ込んでみよう。ただし、隙間が出来てはいけないしはみ出してもいけない。

②の前半部

> ｃの問題に対しては、現実の世界の経験からその、ｆ条件・仮説を設定し、さらに数学の理論が適用可能になるように、条件・仮説を抽象化、理想化あるいは簡単化して、数学の言葉によっていいかえる。[16-3)]

「ｃの問題に対しては、現実の世界の経験から[16-3)]」は＜正方形を裁断してはめ込むという課題に当面した時、この課題は面積（広さ）に関することである（経験）＞に相当する。

「ｆ条件・仮説を設定し、さらに数学の理論が適用可能になるように、条件・仮説を抽象化、理想化あるいは簡単化して、数学の言葉によっていいかえる。[16-3)]」は＜3つの正方形の長さを測ったら＜77＞図のようになったことがわかった（条件）ので、赤を＜78＞図のようにはめ込み、青の正方形を2つに折って＜78＞図の(ア)と(イ)にはめ込んだらうまくいく（仮説）。＞に相当する。（長さがわかったということに関して補足をすると、この課題に当面した時に実際に長さを測り始めたのは隣の生徒である。それは、この時点で隣の生徒S2は学校で三平方の定理を習っていたので、辺の長さの比が3:4:5ならば証明できると思っていたからであって、生徒S1が自分で測る必要性が生じたから3辺の長さを測ったというわけではない。ただ、ここは推測になるがこのやり取りがなくても裁断してはめ込んで証明していくには、辺の長さは不可欠なので3辺の長さを自分から測ったように思える。）

③の部分

> ｇの段階でまとめられた命題群は、一応検討を要する。これで当面の問題に対する解答を導くに十分なだけの条件がそろったであろうか。いいかえると
> ・現実の世界の中の命題はすべてｇの公理系の中の命題に翻訳可能であろうか。もしそうでなければ、ｆの条件・仮説に追加を要する。[16-4)]

課題の解決のためには＜赤を＜78＞図のようにはめ込み、青を2つに折って＜78＞図の(ア)と(イ)にはめ込めばよい＞が、これを検討すると＜赤を＜78＞図のようにはめ込むと残りの長さ（ア）と（イ）が5.8−3＝2.8となり、青の正方形の一辺が5cmなので、半分に折って切れば2.5cmの長方形が2つ出来るから（ウ）と（エ）にはめ込めばうまくはめ込める（(ウ）と（エ）の部分と等積になるから大丈夫。）と考えた＞に相当する。

④の前半部

> ｇとしての公理的なものがまとまれば、それから、現実の世界についての命題と対応するｇの中に命題が作れる。
> ・後者の命題の真偽は、ｇの公理系からの演繹によってのみ決定される[16-5)]

＜つまり、正方形を裁断してはめ込むという課題に対しては赤の正方形を先に埋め込み、青の正方形を半分にして残りのスペースに埋め込めばよい。＞と変換ができ、このことが正しいかどうかを検討する。

⑤の部分

> 演繹によって導いた、ｊ結論は、これに対応して、ａの現実世界で経験的に収集した、ｋデータと、ｌ照合させられる。
> データと結論がf→gの際に認めた近似の範囲に合えばｆの仮定は否定されず、一応そのまま保持、許される範囲を越えてくいちがえばｆの仮定が誤りであるとしてｍ仮説の修正ということになる。くいちがった場合に、ｆにのみ責任負わせるにはｅの数学の理論からｊの結論の間が演繹論理で一貫していなければならない。[16-6)]

「ａの現実世界で経験的に収集した、ｋデータと、ｌ照合させられる[16-6)]」は＜57＞図に相当する。＜実際に2つの断片を残りのスペース(ウ)と(エ)にはめ込んでみたが断片どうしが重なってしまったことと、上部と右側にスペースができてしまったことから生徒S1はこの方法では無理と判断した。＞(しかし、ここでは重なってしまった部分を切って上部と右側のスペースに埋めようとはしなかった。）

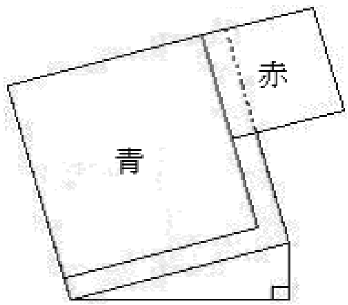
〜ここで作業の1が終了する。〜

4-4-1-2　作業2への考察

＜作業2の概要＞

・青を1cm角に25個にして黄をはめ込む

これは、作業1の終了後に隣の生徒S2のやっている方法＜58＞図をのぞいて見た後に＜58＞図を自分でも実際に試してみて無理だとわかり、正方形を1cm角に切ってはめ込んでいく方法に切り替えて試した方法である。作業1で詰まってしまった生徒S1は何か他の方法がないかを探していく上で隣の生徒S2の作業を見るが、この時S2は＜58＞図のように正方形の黄を正方形の青で埋めてしまって残りを正方形の赤で埋めようとしていた。



＜58＞図

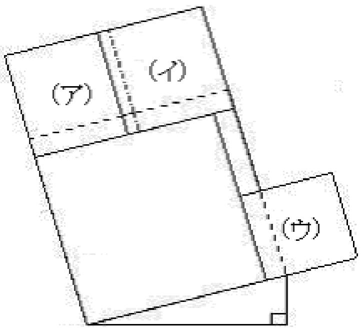
しかし、この方法は4-2でも述べたとおり裁断方法としてはうまくいかない方法なのである。結局S2はこの後この方法は「無理だろこれ」と言って他の方法に移るのである。

○生徒 S1 の思考 2-1（正方形青を切り終えるまで）

初め隣の生徒 S2 の方法を見たときに出来そうだと考えていた。これは生徒 S1 の「切って切って切りまくろう」といっていることからわかるとおり、正方形の青を先に埋め込んで残りのスペースを赤で埋めていけばうまくいくと思い、「切って切って切りまくろう」といっていたように思える。しかし、これを実際にやろうとしたがうまくいかないように思えた（＜60＞図）。でも、この方法でうまくいかない理由は、現時点では正方形が大きいままだからうまくいかないのであって、この方法をつかっているからうまくいかないと思っていたのではない。だから細かく切っていけばうまくいきそうと考えたように思える。

○作業 2-1（実際やってみて、正方形青を切り終えるまで）

生徒 S2 がやっていた方法を見た後に生徒 S1 は同じ方法を試すのである＜60＞図。



＜60＞図

そこで＜60＞図のように赤を(ア)→(イ)→(ウ)と置き変えていった。そして「無理だろう」とつぶやいている。その後、正方形の赤と青を見ながら少し考える。そして「これ（赤と青の正方形）を全部バラバラにすんげーバラバラにすればはめこめる。一つずつ四角をさ」と言った後、生徒 S2 がこの発言に対して「そうそうそう。」と同意している。これを受けて生徒 S1 は正方形の青を 1cm 角に切り始める。

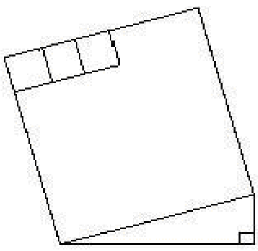
○生徒 S1 の思考 2-2(切った正方形をはめ込み終えるまで)

正方形を細かく切ってはめ込んでいけばうまくいくと思っている。

○作業 2-2（実際やってみて）

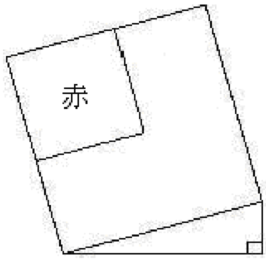
(切った正方形をはめ込み終えるまで)

最初＜61＞図のように正方形の青を 25 個に分けたうちの 3 つを正方形の黄の左上にはめ込んだ。



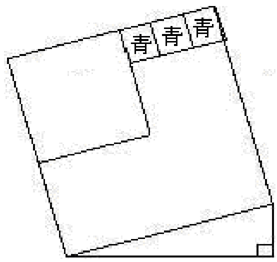
＜61＞図

「あ、これ（赤の正方形）ばらばらにする必要ないんだ」と気付き、＜62＞図のように今置いた 3 つの正方形を取り除き、正方形の赤を置き直す。



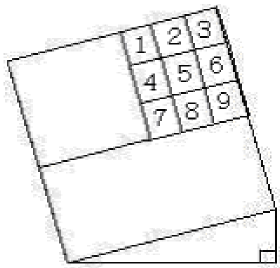
＜62＞図

この後、＜63＞図のように赤の右隣にバラバラにした正方形を並べていく。



＜63＞図

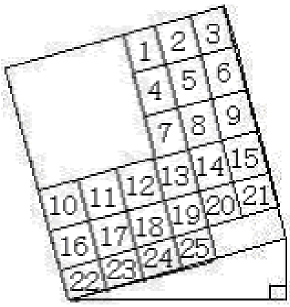
しかし、＜64＞図のように 9 つ並べたところで 3 つ目の小さい正方形が下地の黄の正方形からはみ出していることに気付き、「結構（下地の黄から）はみ出してるんだよね、ちょっと。」と言っている。



＜64＞図

ここで授業者が「はみ出しているんじゃないの？」と聞き直してみた。(というのは赤が一辺 3cm と小さい正方形が 3 つ分で 3cm なので合計で横が 6cm となるのであるが、下地の一辺がおよそ 5.8cm($\sqrt{34}$)なので 0.2 ミリ程はみだすのである。）そうすると「こっち（赤を指して）が、こっち（小さい正方形を貼った方）によってるから。しかも、四角（小さい正方形）が横になったり、縦になったりしてるから、すごい汚い。」と答えた。つまり、はみ出したのは小さい正方形が少し曲がったりしながら貼ってあるせいで、正方形の長さの関係ではみ出すということではないのである。この青の正方形を切り出す時、最初の大まかに分ける時は定規を使っていたが、1cm に切り出す時は定規を使わずに切り出していたのでこの事も正方形に張り付ける時の歪みの一因となっている。

この議論はこれで終り、残りの正方形を貼る。



＜65＞図

25 個貼り終えた後＜65＞図のように 1cm 角の正方形 2 つ分のスペースが残ってしまい、困って悩んだ末に、はみ出したところを切り出して足りない部分を補完しようとするが途中で断念してしまったのである。

ここまでが生徒 S1 の作業 2 の活動である。この作業や思考を 2-3-3-2 で引用した思考活動の過程に当てはめていくと次のように捉えることができ、
これは広く解釈すれば以下の③～⑤に相当する活動としてみることができる。

2-3-3-2-(イ)

A（問題）→B（置き換え 1）→×→Z（答え）
↓（やり直し 1）
A（問題）→B（置き換え 1）
→C（置き換え 2）→×…→Z（答え）

④の後半部

・演繹には g の公理系とともに、e 数学の理論が全面的に駆使される。しかしそれでもうまく演繹が進められないという場合には、「i 新理論の開発」に進むことが必要である。[16-5)]

この部分は＜正方形を裁断してはめ込むという課題に対しては赤の正方形を先に埋め込み、青の正方形を半分にして残りのスペースに埋め込めばよい（数学の理論）と考え、実際に正方形青を 2 つに切ってはめ込んでみたがうまくいかなかったので、別の方法を考えようとして隣の生徒 S2 を参考にし、黄正方形を青正方形で埋めてしまい残りを赤正方形で埋めればうまくいく（新理論）と考えた。＞となる。

③の部分

g の段階でまとめられた命題群は、一応検討を要する。これで当面の問題に対する解答を導くに十分なだけの条件がそろったであろうか。いいかえると ・現実の世界の中の命題はすべて g の公理系の中の命題に翻訳可能であろうか。もしそうでなければ、f の条件・仮説に追加を要する。[16-4)]

ここは＜しかし青を先に置き＜60＞図のように赤を(ア)→(イ)→(ウ)と置き変えて検討をしてみたがどうもうまくいきそうにないように思える。それは正方形青が元のままだからうまくいかないのであって、正方形を小さく(1cm 角)に切り、はめ込んでいけばうまくいく。＞に相当する。

④の前半部

g としての公理的なものがまとまれば、それから、現実の世界についての命題と対応する g の中に命題が作れる。 ・後者の命題の真偽は、g の公理系からの演繹によってのみ決定される [16-5)]

つまり今の場合は＜この課題に当面した時は正方形の赤と青を小さく切ってはめ込めばうまくいく。＞となる。

⑤の部分

演繹によって導いた、j 結論は、これに対応して、a の現実世界で経験的に収集した、k データと、l 照合させられる。 データと結論が f→g の際に認めた近似の範囲に合えば f の仮定は否定されず、一応そのまま保持、許される範囲を越えてくいちがえば f の仮定が誤りであるとして m 仮説の修正ということになる。[16-6)]

＜しかし実際に切ってはめ込んでみると＜65＞図のようになり、小さな正方形 2 つ分ぐらいのスペースが残ってしまってうまくいかなかった。そこで先に話に上がった少しはみ出している部分（＜65＞図の正方形の 6 番目と 9 番目の境目辺り）を切り取って埋めようとするがうまくいきそうにないと感じたのか途中で断念してしまった＞

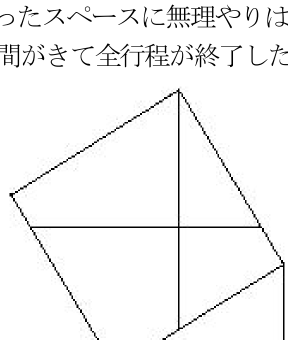
結果として作業 2-2 でうまくはめこめなかったのは、作業 2-1 でやろうとしていた方法と同じ理由で「黄の正方形の一辺が切り出せていない」ことにある。しかし現時点ではこのことに気づいていないのである。

～ここで作業の 2 が終了する～

4-4-1-3　作業 3 への考察

＜作業 3 の概要＞

ふと黄に引いてある黒の十字線（＜68-1＞図）
に気付いて青を合わせて置くようにして切る。以降、残りの切れ端や赤の正方形をこの黒の十字線を基準において切っていき、余ったスペースに無理やりはめ込んで終了した。ここまでで時間がきて全行程が終了した。



＜68-1＞図

この黒十字線に当てはめるように切り出す方法は作業２の＜65＞図で挫折してしまい、どうしたら良いのかわからなくなっていた時にふと見つけた方法である。作業２の後、生徒 S1 は時間をかけて正方形を小さく切ってはめ込んでいったにもかかわらず成功しなかったため「はっきり言って精神的にこたえました。」といってやる気が減退していった。そこから少しの間授業者とのやり取りが続き「わかったー！！」と言うに至るのだが、このやり取りの中にはこの生徒が何故この方法に気付いたのかということに関する事柄は見当たらないのである。以下、作業２から生徒 S1 が黒十字線に気付くまでのやり取りを述べておく。

○作業２の終わりから気付くまでのやりとり

< S1：生徒 S1　S2：生徒 S2 (隣の生徒)　T：授業者>

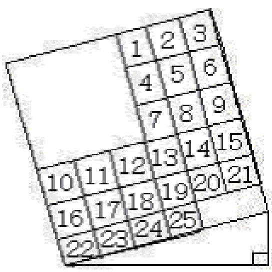
作業２の後、どうすればよいのかわからなそうだったので声を掛ける。

T「どう？いけそう？」
S1「もういやです。出来ないというよりもういやです。」
T「でも理屈からいけば当てはまるんでしょう？」

ここは授業の初めに直角三角形だと A+B=C が成り立つという話をした。

S1「A+B=C ですから入るんではないでしょうか。」

＜65＞図を指しながら



＜65＞図

S1「これ２個足りないんだって！」

ここで隣の生徒 S2 の作業を見る。

T「全部はめた？」

２ つ足りないといっていたので忘れている欠片がないかどうかを確認させた。

S1「うん。」
S2「先生間違えたんじゃない？」
T「そんなことないよ。」

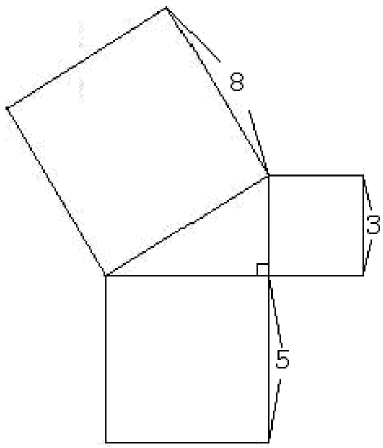
S1 が青の方眼を数え始める。

S1「うん、そんなことない。」

この後、生徒 S1 が正方形の一辺の長さを測り始める（＜67＞図）

S1「1､2､3､1､2､3､4､5･･･？」
S1「8？ここ（黄の一辺を指して）が８なわけないじゃん。」

これを記入



＜67＞図

そして「3＋5＝8」と計算。

S1「これは先生、ひどいよ。」
S1「あ！わかったー！わかったー。」

○生徒 S1 の思考 3-1

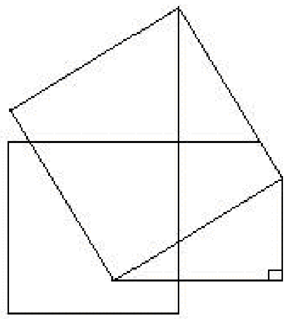
（黒十字線に気づいてから最初の切り出しまで）

やり取りの前半部分(大半)が＜65＞図での方法に関することで正方形の辺の長さを測り始めてから「わかったー！！」と言い出すまではおおよそ 30 秒ぐらいである。この間に思考の変容が起きたのであるが、このやり取りだけでは何故正方形の黄の中の黒十字線(＜68-1＞図：方眼用紙から切り出したため線が残っている)に正方形の青の角をあてはめようとしたのかを読み取れなかった。

＜67＞図を見ながらそれぞれの正方形の長さを測り直し、赤と青の正方形の一辺の長さを加えて８とし、黄の一辺の長さと比べて長さが違うと判断して黒十字線を発見した。ここは推測となるが、3+5=8 と計算をして黄正方形の一辺が８なわけはないと言っていたのは「２つの正方形を横に並べて貼り付けていく方法は実は上手くいかないのではないか」と考えたからではないだろうか。

○作業 3-1（実際にやってみて）

初めに正方形の青を正方形の黄に描かれてある黒十字線に角を合わせて置き、カッターで切断する。（＜68＞図）


＜68＞図

ここでのポイントは、＜今まで正方形の黄の四隅に正方形赤や青の四隅を合わせるようにして置いていたのが四隅どうしを合わせなくても組み合わせられるような裁断方法があることに気付けたこと＞にあるといえる。3-3 で述べたことであるが、この裁断のポイントは 2 つありそのうちの一つ「大きい正方形の四隅をどのようにして作るか」である。＜68＞図では四隅に合わせるように切っているのである。

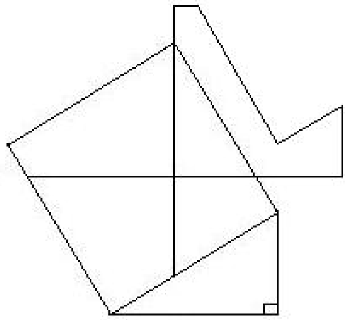
～ここまでが生徒S1の作業3-1である。～

○生徒 S1 の思考 3-2（作業 3-1 から最後まで）

作業3-1で黒十字線に正方形の頂点を重ねておくことに気付いた後は、正方形の大きさや欠片の大きさを見ながら平行移動させたり回転させたり反転させたりして、出来るだけうまく埋められるように残りの欠片と相談をしながら、この黒十字線に対して正方形の頂点を合わせて置いていく作業が続いていった。この作業3の始めの頃はうまくいくと思って作業をしていたが、だんだんと疑問になっていき最後のほうはうまくいかないと感じてしまったようである。

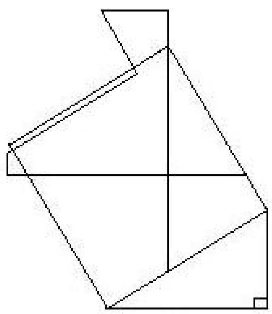
○作業 3-2（実際にやってみて）

作業3-1で残った欠片を＜69＞図のように黒十字線に残りの正方形の直角を置いて少々考える。ここでの生徒S1の考えは、「この時点で欠片を切りだしてしまうと残りの形が空いているスペースの形に合わなくなってしまうのでこの置き方はまずい。」と推測できる。



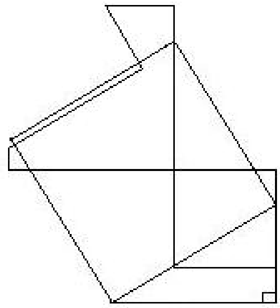
＜69＞図

次に残りの欠片を反時計回りに回転させ図形を睨めっこしながら「お？頑張ればいくんじゃね？」といっていることから、この置き方は生徒S1にとっては一応の成功とみたようである。（＜70＞図）



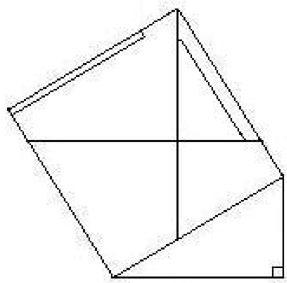
＜70＞図

そこで欠片が置いてある右下にさらに赤の正方形を黒十字線に頂点を重ねるように置いた。（＜71＞図）



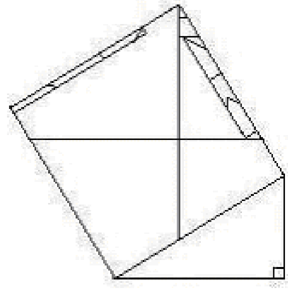
＜71＞図

しかし、この図を眺めながら「いやー、これはどうだろう。」とつぶやいていた。これは「この状態から（＜71＞図）から切り出される欠片と残りのスペースを見比べてみるとどうも合わない感じがする。」と考えたことで出てきたつぶやきと推測できる。この後、残りの欠片と赤の正方形はこの位置に置いたまま、黄の正方形からはみ出した部分を切り取った。そして、残りの欠片のうちで赤の正方形から出た大きいほうの欠片を＜71＞図の右上の空白に黒十字線に合わせるように置いた。（＜74＞図）



＜74＞図

この状態では残りの欠片と見比べてもうまくはめ込めそうにないと感じていたものの、残りの欠片を＜74＞図の隙間にはめ込んだ。結局、隙間が出来てしまいうまくいかなかった。ここで作業3-2を終えた。（＜76＞図）



＜76＞図

ここまでが生徒S1の作業3の活動である。この作業や思考を2-3-3-2で引用した思考活動の過程に当てはめていくと次のように捉えることができ、
これは広く解釈すれば、以下の④と⑤に相当するとみることができる。

2-3-3-2-(ウ)

A（問題）→B（置き換え 1）
→C（置き換え 2）→×…→Z（答え）
↓（やり直し 2）
A（問題）→D（置き換え3）→×→Z（答え）

の部分でありこれは。

④の後半部

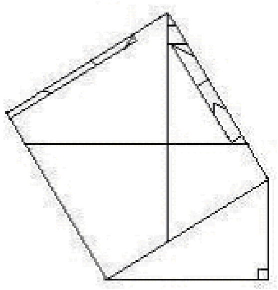
・演繹には g の公理系とともに、e 数学の理論が全面的に駆使される。しかしそれでもうまく演繹が進められないという場合には、「i 新理論の開発」に進むことが必要である。[16-5)]

ここは＜この課題に当面した時は正方形の赤と青を 1cm 角に小さく切ってはめ込めばうまくいく。＞と命題を設定して実際に切ってはめ込んでみたが合わないことがわかり、「新理論の開発」をせまられた。しかし簡単には見つからず、しばらく授業者とのやり取りが続いた中で＜青正方形を黄正方形に描かれてある黒十字線に青正方形の頂点を合わせて置き、はみ出た部分を切ればいい＞という具合に命題を設定し直すことができた。

⑤の部分

演繹によって導いた、j 結論は、これに対応して、a の現実世界で経験的に収集した、k データと、l 照合させられる。[16-6)]

＜青正方形、赤正方形を黒十字線を基準に置いて切り、残りの欠片を隙間に埋め込んでみたが隙間がだいぶ残ってしまいうまくいかなかった。（＜76＞図）＞となる。



＜76＞図

ここまでが生徒 S1 の課題に対する思考の流れや活動の経過である。そこに思考の流れや活動の経過を 2-3 を基に考察を加えてきた。次にこの考察をもとに「科学的精神の開発」を目指すための指導法について考察していく。

4-4-2　「科学的精神の開発」を目指すための指導法について

2-3 で科学的精神を開発するとはどういうことなのかを結論付けた。もう一度確認しておくと、

＜課題に当面しこれを解決していく際、与えられた条件や仮説などを元に対象を抽象化、理想化、簡単化しながら集合として捉え、この集合を解決に都合のよい適切な数学的構造をもった集合へ置き換えて課題を解決に導いていくという思考活動が出来るようになっていく事。＞である。

このことが出来るようになっていくように指導していくのである。それでは、科学的精神を開発するための指導法を探っていく。

4-4-1 では生徒 S1 の思考活動を作業の 1～3 で分け、各作業ごとに分析を加えながら 2-3 で論じた思考の流れや、数学的活動の枠組みを広く解釈して各々の場面にのせていった。

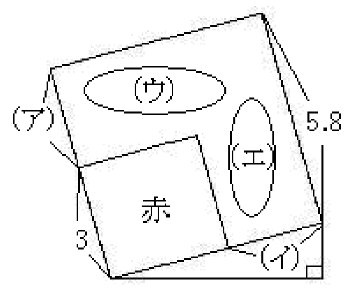
・思考の流れ

A（問題）→B（置き換え 1）
↓（やり直し 1）
→C（置き換え 2）→×…→Z（答え）
↓（やり直し 2）
A（問題）→D（置き換え 3）→×→Z（答え）

・思考の流れに生徒 S1 の思考活動をのせる

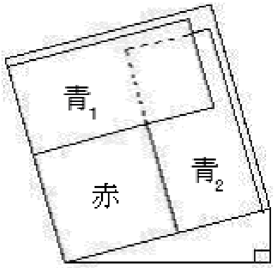
A（問題：直角三角形の上に正方形を立てた時、直角を挟む 2 辺からできる 2 つの正方形の面積の和は斜辺から出来る正方形の面積に等しくなることが知られている。それでは、2 つの小さな正方形を大きな正方形の中にはめ込んでみよう。ただし、隙間が出来てはいけないしはみ出してもいけない。）

→（赤正方形を＜78＞図のようにはめ込むと残りの長さ（ア）と（イ）が 5.8－3＝2.8 となるが、青の正方形の一辺が 5cm なので、半分に折って切れば 2.5cm の長方形が 2 つ出来るから（ウ）と（エ）にはめ込めばうまくいく。）



＜78＞図

B（置き換え 1：＜57＞図のように青の正方形を 2 つに折って＜78＞図の(ウ)と(エ)にはめ込めばよい。）

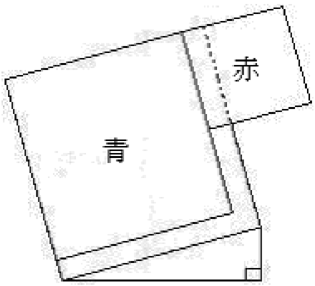


＜57＞図

（実際に2つの断片を残りのスペース(ウ)と(エ)にはめ込んでみたが、断片どうしが重なってしまったことと、上部と右側にスペースができてしまったことからこの方法では無理。）

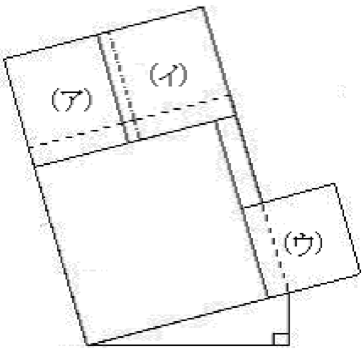
↓（やり直し 1）

→（何か他の方法がないかを探していく上で隣の作業を見るが、この時、＜58＞図のように黄正方形を青正方形で埋めてしまって残りを赤正方形で埋めようとしていた。



＜58＞図

この方法を自分でも試してみよう。赤を(ア)→(イ)→(ウ)と置き変えていった。

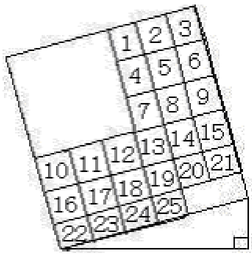


＜60＞図

試したけど無理だろう。その後、正方形の赤と青を見ながら少し考える。「これ（赤と青の正方形）を全部バラバラにすんげーバラバラにすればはめこめる。一つずつ四角をさ。」生徒 S2 も「そうそうそう。」と同意。）

C（置き換え 2：正方形を 1cm 角に細かく切ってはめこんでいけばうまくいく。）

→（×：実際に切ってはめ込んでみると＜65＞図のようになり、小さな正方形 2 つ分ぐらいのスペースが残ってしまってうまくいかなかった。少しはみ出している部分（＜65＞図の正方形の 6 番目と 9 番目の境目辺り）を切り取って埋めようとするがうまくいきそうにないと感じたので断念。）

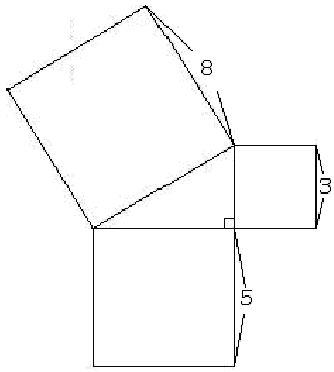


＜65＞図

…→Z（うまくいかなかった。）

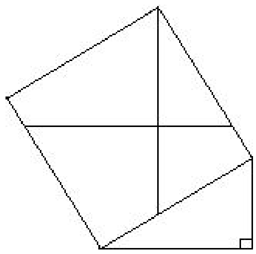
↓（やり直し 2）

→（1cm 角に切ってはめ込んでみたけどうまくいかなかった。どうしたらよいのだろう…。もう一度正方形の長さを測ってみるかぁ。青が 5cm で赤が 3cm だから合わせると 8cm。あれ？黄が 8cm？そんなわけないじゃん。（＜67＞図）



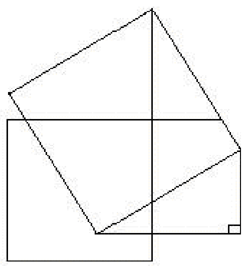
＜67＞図

ん？おお？！もしかしてこの黄に引いてある黒十字の線（＜68-1＞図）に正方形の頂点を合わせて切ればうまくいくんじゃない?）



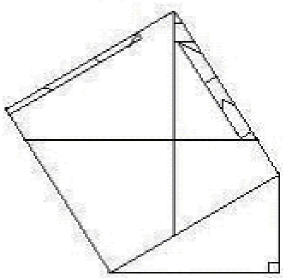
＜68-1＞図

D（置き換え 3：＜68＞図のように正方形の青を正方形の黄に描かれてある黒十字線に角を合わせて置いて裁断していけばうまくいく。）



＜68＞図

→（×：黒十字線に正方形の頂点を重ねて置いていけばよい。＜76＞図のように正方形の大きさや欠片の大きさを見ながら平行移動させたり回転させたり反転させたりして、出来るだけうまく埋められるように残りの欠片と相談をしながら、この黒十字線に対して正方形の頂点を合わせて置いていくが、隙間がだいぶ残ってしまった。）



＜76＞図

→Z（うまくはめ込めなった。）

これを見ると生徒S1の思考活動は2-3-1で述べた思考の流れにのせられることがわかる。このことは「集合を解決に都合のよい適切な数学的構造をもった集合へ置き換えて課題を解決に導いていく」ことを意味する。ここでいう数学的構造とはS1の思考活動でいえば、作業1の＜赤の正方形を先に埋め込み、青の正方形を半分にして残りのスペースに埋め込む＞、作業2の＜青を1cm角に25個にして黄をはめ込む＞、作業3の＜黒十字線に青を合わせて置くようにして切る＞に相当する。次に、解決方法に至るまでの思考過程（①：A（問題）→B（置き換え1）に至る思考過程　②：B（置き換え1）→C（置き換え2）に至る思考過程　③：C（置き換え2）→D（置き換え3）に至る思考過程）をみていく。

① A（問題）→B（置き換え1）に至る思考過程
「赤正方形を＜78＞図のようにはめ込むと残りの長さ（ア）と（イ）が5.8－3＝2.8となるが、青の正方形の一辺が5cmなので、半分に折って切れば2.5cmの長方形が2つ出来るから（ウ）と（エ）にはめ込めばうまくいく。」

② B（置き換え1）→C（置き換え2）に至る思考過程
「黄正方形を青正方形で埋めてしまって残りを赤正方形で埋めよう。赤を(ア)→(イ)→(ウ)と置き変えていったけど無理だろう。でも、このままだと無理だけど、赤と青の正方形を一つずつ四角に全部バラバラにすればはめこめる。」

③ C（置き換え2）→D（置き換え3）に至る思考過程
「1cm角に切ってはめ込んでみたけどうまくいかなかった。どうしたらよいのだろう…。もう一度正方形の長さを測ってみるかぁ。青が5cmで赤が3cmだから合わせると8cm。あれ？黄が8cm？そんなわけないじゃん。ん？もしかしてこの黄に引いてある黒十字の線（＜68-1＞図）に正方形の頂点を合わせて切ればうまくいくんじゃない？」
をみていくと、

①では、正方形の長さなどを把握しながら考察を加えているのに対し、②や③では、②の「赤を(ア)→(イ)→(ウ)と置き変えていったけど無理だろう。」といった感覚で捉えていたり、③の「青が5cmで赤が3cmだから合わせると8cm。あれ？黄が8cm？そんなわけないじゃん。」といった問題点を表層的に見ているように見受けられる。

この部分に「課題に当面しこれを解決していく際、与えられた条件や仮説などを元に対象を抽象化、理想化、簡単化しながら集合として捉え」といった課題を見極めて正確にとらえていこうとする場面での思考活動をあてはめると、＜課題をきちんと捉えようとしているところも見受けられるが、感覚で捉えているところも見受けられるため、結果として思考の流れ全体の中で振り返る活動が弱くなっている＞といえる。つまり＜生徒S1の思考活動は科学的精神を開発するような思考の流れ自体にはのっているものの、課題を見極め、正確に捉えていこうとする場面においては思考活動の中で振り返る活動が弱くなっているところもあるため、思考活動全体が弱くなってしまった＞といえる。

このことをふまえると科学的精神を開発するための指導法として見えてくるのは「集合を解決に都合のよい適切な数学的構造をもった集合へ置き換えて解決に導いていくという思考活動の流れを意識しながら、その各々の場面での課題に対する思考活動をはっきりさせていくように意識を持たせること」ということである。

この「各々の場面での課題に対する思考活動をはっきりさせていくように意識を持たせること」であるが、これは「作業1、作業2、作業3と解決方法を変容させていく際に何故うまくいかなかったのか、どの点に問題があったのか、何か条件を忘れていないか等をふり返りながらその時点での課題をはっきりさせていくように努めること」ということである。今の問題でいえば2つの正方形を1つの正方形にはめ込む時の着眼点として＜一辺の切り出し方＞と＜正方形の直角の作り出し方＞の2つのことを挙げたが、これがこの課題を解決していくための最初の到達地点である。作業1、2、3、の各段階で「何故うまくいかなかったのか、どの点に問題があったのか、何か条件を忘れていないか」などを振り返りながら課題をはっきりさせていき、徐々に2つの着眼点に近づいていけばよいのである。課題をはっきりとさせていくために指導をしたり助言をしたりしていくことが必要である。

＜結論＞

「科学的精神の開発」を目指すための学習指導のありかたとは次のように考えることができる。

課題を解決していく際、捉えた集合を解決に都合のよい適切な数学的構造をもった集合へ置き換えて解決に導いていくという思考活動の流れを意識しながら、その各々の場面での課題に対する思考活動をはっきりさせていくように意識を持たせ、課題の解決を目指していかせること。

第 5 章　本論のまとめと今後の課題

5-1　本論文のまとめ

本研究の目的は生徒の科学的精神を開発するためにはどのように学習指導したらよいのかを明らかにすることであった。

この課題を解決するには 2 つの事が必要である。1 つ目は、科学的精神を開発するとはどういうことかを明らかにすることであり、2 つ目はどのようにして生徒に学習指導をするかである。

まず1つ目の科学的精神を開発するとはどういうことかに対しては2つの文献をもとにまとめ、「課題に当面しこれを解決していく際、与えられた条件や仮説などを元に対象を抽象化、理想化、簡単化しながら集合として捉え、この集合を解決に都合のよい数学的構造をもった集合へ置き換えて課題を解決に導いていくという思考活動が出来るようになっていく事。」とした。次に2つ目のどのように学習指導をしていくかであるが、これを考察するために実際の授業場面を用いることにした。本研究では三平方の定理の導入場面を用いているが、今では数多く知られている三平方の定理の証明の中でも特に分割合同を利用して証明している証明方法に焦点をあてた。ここでは直角三角形の上に各々の辺を一辺とする正方形を3つ立て、一番大きな正方形Cに残りの2つの正方形A、Bを裁断してはめこんでいくという課題を与えた。結果として2人ともうまくはめ込めなったが、正方形を切り出していく過程においていろいろな思考活動を見ることが出来た。この生徒の思考活動を追いつつ2-3の視点で分析を加え、科学的精神を開発するとはどういうことなのかを吟味しながら学習指導のありかたを明らかにしていった。その結果、本研究での「科学的精神の開発」を目指す学習指導のありかたを「A+B=Cを証明する際にAとBの断片とCのそれぞれの断片が合同となるように裁断していく上で自分の取った方策がうまくいかなかった時に取った方策を見直し、等しい長さ、等しい角をどのように作っていくかに意識を持たせる（気づかせる）こと」と結論づけた。

5-2　今後の課題

本来、科学的精神を開発するような学習指導は一過性のものではなく、全単元を通じて行われなければならない。そうしなければ生徒の科学的精神がなかなか開発されていかないのである。したがって今後は、毎時間毎時間とまではいかなくとも授業の際に、出来るだけ科学的精神を開発するためにいろいろな教材で具体的に検討し、集合Xで発生している問題をどのように集合Yに置き換えるのか、また、その対応 f は何かを明らかにすることである。

参考・引用文献

序章
1）文部省　中学校学習指導要領（平成 10 年 12 月）解説　数学編　平成 11 年　p.98
2）小倉金之助　小倉金之助著作集　第 4 巻　数学教育の根本問題　勁草書房　1973
pp.111-113

第 1 章
3）小倉金之助　小倉金之助著作集　第 6 巻　数学教育の歴史　勁草書房　1974　pp.291-292
4）～8）
小倉金之助　小倉金之助著作集　第 6 巻　数学教育の歴史　勁草書房　1974
pp.312-321
9）小倉金之助　小倉金之助著作集　第 6 巻　数学教育の歴史　勁草書房　1974
pp. 389-391
10）小倉金之助　小倉金之助著作集　第 4 巻　数学教育の根本問題　勁草書房　1973　pp.16-19
11）松原元一　日本数学教育史Ⅳ数学編（2）　風間書房　昭和 62 年　pp.289-290
12）小倉金之助　小倉金之助著作集　第 4 巻　数学教育の根本問題　勁草書房　1973
pp.111-113

第 2 章
12-1）小倉金之助　小倉金之助著作集　第 4 巻　数学教育の根本問題　勁草書房　1973
p.239
13）教育学鋼要　篠原助市　1930 年　pp.1728-1729
14）日本数学教育学会第 82 号　第 7.8 号　特集号 2000 年　pp.48-49
15）島田茂　算数・数学科のオープンエンドアプローチ　みずうみ書房　昭和 52 年
p.10
16-1）～16-11）
島田茂　算数・数学科のオープンエンドアプローチ　みずうみ書房　昭和 52 年
pp.14-17
17）松原元一　数学的見方考え方　現代教育 101 選　国土社　2001　p.190
18）松原元一　数学的見方考え方　現代教育 101 選　国土社　2001
pp.156-158
19-1）松原元一　数学的見方考え方　現代教育 101 選　国土社　2001　pp.166-167
19-2）松原元一　数学的見方考え方　現代教育 101 選　国土社　2001　pp.171-172
19-3）松原元一　数学的見方考え方　現代教育 101 選　国土社　2001　pp.175

第 3 章
20-1）～20-19）
大矢真一著　ピタゴラスの定理　東海大学出版会　2001　pp.35-51
21-1）～21-13）
ヒルベルト　幾何学の基礎・D.HILBERT　寺阪英孝･大西正男訳・解説
第Ⅶ版　1930　pp.64-74

22）中村村幸四郎他　ユークリッド原論（縮刷版）　共立出版株式会社　1996
p.28　第一巻命題 39

注 1：定理 1 から定理 6 までの証明は幾何学の基礎、ユークリッド原論などを参考にしながら証明をしていった。

第 4 章

23）中学校学習指導要領（平成 10 年 12 月）　解説－数学編－　文部省　平成 10 年
p.97
24）中学校学習指導要領（平成 10 年 12 月）　解説－数学編－　文部省　平成 10 年
pp.98-100

注 2：本文中の引用や参考は次のように分けた。
・引用　＜実線：~~〜○）~~　囲み：$\boxed{〜^{○)}}$　＞
・参考　＜破線：〜○）＞

＜謝辞＞
論文作成にあたり多くの方々に助言や指導を賜りました。おかげさまで論文を完成させることができました。特に指導教官の太田先生には長きにわたり指導を賜りました。ありがとうございました。半田先生、中野先生、そして諸先輩方、長尾さんに小野さん、ありがとうございました。この場を借りて深謝いたします。