研究題目

算数授業における数学的な考え方の育成に関する実践研究
～コミュニケーション的観点による指導に着目して～

平成 22 年度入学
教育学研究科　教科教育専攻　数学教育専修
学籍番号 10ＧＰ208　　氏名　　宮　崎　研　也

目　次

序章　本論文の概要

1　はじめに（研究の背景と動機）

知識基盤社会の到来や，グローバル化の進展など急速に社会が変化する中，次代を担う子どもたちには，幅広い知識と柔軟な思考力に基づいて判断することや，他者と切磋琢磨しつつ異なる文化や歴史に立脚する人々との共存を図ることなど，変化に対応する能力や資質が一層求められている。一方，近年の国内外の学力調査の結果などから，我が国の子どもたちには思考力・判断力・表現力等に課題がみられる。また，課題発見・解決能力，論理的思考力，コミュニケーション能力や多様な観点から考察する能力（クリティカル・シンキング）などの育成・習得が求められているところである（文科省，2011）。

上記の課題を受け，小学校では，平成23年度より新学習指導要領（文科省，2008）が完全実施となった。新学習指導要領では，「生きる力」をはぐくむことを目指した教育活動が求められている。学習に関する取り組みとしては，基礎的・基本的な知識及び技能を習得させること，それを活用して課題を解決するために必要な思考力，判断力，表現力等をはぐくむこと，主体的に学習に取り組む態度を養うこと，が示されている。それとともに，これらの学習活動の基盤である言語の能力の育成，つまり，言語活動を充実させた学習活動に取り組むことが重要であると指摘されている。

このような中，算数科の授業に目を向けると，形式的な段階を踏み，子ども自らが問題意識をもつことなく教師の指示した手順で問題解決が進められる授業，分かりやすく問題を解くことだけに力点が置かれた教師の解説を中心とした授業等，主として子どもの思考活動が伴わない授業が少なくない。本来，算数科の目標として取り組むべき子どもの考える能力の育成につながっていない授業が見られる。加えて，問題を解き終えると基礎・基本の徹底のスローガンの下，数値を変えただけで思考を伴わない繰り返しの練習や計算のドリル学習に時間を費やすことに価値を見出す授業観が幅を利かせている。

また，その一方では，一見子どもが悩み，試行錯誤を繰り返し，思考活動を進めているように見える授業であっても，授業のねらいとはまったくかけ離れた活動になっている場合もある。本来，教師の意図すべき思考活動に向かっていないにも関わらず，教師が子どもの主体性を重視するあまり，教えることを躊躇し，いわゆる這い回る学習になっている授業も見られる。そこには，実は真の学びは無く，課題を解決するための思考力，判断力，表現力も身につかないのである。

筆者は，これまで小学校教員として算数科の授業を20年近く行っている。授業では子どもの思考活動の重要性を感じ，いかに子どもの考えを引き出し，教材の本質に迫るかという意識をもって日々の授業に臨んできた。しかし，改めてこれまでの日々の実践や研究授業等の授業実践を振り返ると，一見，意欲的な学習態度で子どもたちが活発にコミュニケーションを進め，学習のねらいが達成できたと感じる授業であっても，授業後のビデオ記録や参観者との協議から省察を加えると，教材の本質に迫るコミュニケーションの質的高まりが問われる課題を残すことが多かった。

これらのことから，社会の変化に対応し，筆者が日頃から抱いている課題を解決するためには，コミュニケーション活動を充実させ，子どもの考える力を伸ばすための授業に関する研究を進めることが必要となると考えた。

2　研究の目的

本研究は，算数授業において数学的な考え方を育てるためにコミュニケーション活動が有効であることを実証し，子どもの考える力を伸ばす指導法の改善の一端を担うことを目的とする。

3　研究の方法

本研究では，まず，理論研究として数学的な考え方とコミュニケーションに関わる先行研究から，次のことを整理する。

①数学的な考え方のとらえを明確にする。

②授業におけるコミュニケーションの役割と指導に関わる研究を整理する。

③数学的な考え方をとらえる研究の枠組みをコミュニケーションを視点に設定する。

次に実践研究として，(「整数をなかま分けしよう」「比例と反比例」「仕事算」の指導)の授業実践をおこない，授業におけるプロトコルと子どものノート記録をもとにコミュニケーションを視点とした数学的な考え方をとらえる研究の枠組みで授業の考察を行う。

その結果，何が子どもの数学的な考え方を引き出す要因となったのか実証的に明らかにするとともに，子どもの考える力を伸ばすための指導法についての示唆を得る。

4　本論文の構成

第１章では，数学的な考え方を育成するための指導とその意義について先行研究及び文献の調査を行い，数学的な考え方について整理するとともに筆者の数学的な考え方についてのとらえを明確にした。

第２章では，コミュニケーション的観点による指導について，先行研究及び文献の調査を行い，熊谷（1989)，江森(1993)，古藤（1998）の研究を参考にながら，コミュニケーション的観点の指導の在り方について，理論的研究の枠組みを設定した。

第３章では，実践事例Ⅰとして，授業実践をおこない，第２章で設定した研究の枠組みをもとに授業の考察をおこなった。そして，そこで得られた成果と課題を明らかにした。

第４章では，実践事例Ⅰで得られた課題をもとに授業実践をおこない，実践事例Ⅱとして，第２章で設定した研究の枠組みをもとに考察をおこなった。そして，そこで得られた成果と課題を明らかにした。

第５章では，実践事例Ⅱで得られた課題をもとに授業実践をおこない，実践事例Ⅲとして，第２章で設定した研究の枠組みをもとに考察をおこなった。そして，そこで得られた成果を明らかにした。

終章では，本研究のまとめとして第１章，第２章の理論研究をもとに第３章，第４章，第５章の実践研究を考察して得られたことを研究のまとめ（成果と課題）として示した。

第１章　数学的な考え方を育成するための指導とその意義

１　数学的な考え方の変遷の概観

長崎は，数学的な考え方に関わる変遷と議論について歴史的に整理した。本節では，長崎の数学的な考え方に関わる研究(長崎，2007)を引用し，以下にまとめてみることにした。

日本の算数・数学科の目標として「数学的な考え方」が初めて明示的に述べられたのは，1955年（昭和30年）の高等学校学習指導要領数学科編においてであった。そこでは，数学的な考え方は，数学を構成していく考え方であり，その内容を具体的に例示するものとしての「中心概念」が挙げられていた。その後，1958年（昭和33年）には，小学校学習指導要領の算数科の目標として数学的な考え方が明示的に示された。

1960年代後半になると，学習指導要領の改訂を迎え，算数・数学教育の専門雑誌で，数学的な考え方について，多彩な論議がなされた。その中で，1969年から1971年にかけて東京都立教育研究所の研究員が，それらの考え方を整理して，数学的な考え方が，数学の流れをつくるという数学の方法に関する考え方と数学の内容に関する考え方からまとめられた。

その後，1977年には，島田茂が数学的モデル化を含む数学的活動を提唱し，松原元一が思考の体制化による数学的見方考え方を提唱した。また，1981年に中島健三は数学的な考え方の創造的な面を強調した。さらに1988年，片桐重男は，1969年から1971年に発表された東京都立教育研究所の研究成果を精緻化して具体化を図った。そこでは，数学的考え方・態度が提唱され，数学を発展させていくものとしての数学的な考え方が，数学の方法と数学の内容の２つの面からとらえられている。

このように，数学的な考え方の中心的な発想は，算数・数学を構成していく考え方，または，算数・数学を創り出していく考え方であった。これは，事象を数学化し，その上で，算数・数学を発展させていくというものであった。

数学的な考え方の概念は，日本の多くの数学者，算数・数学教育者が，約30年をかけて創り上げてきた。そして，それは，小中高校の実践例に支えられている。ここでの数学的な考え方は，算数・数学を生み出し，算数・数学を創り出し，算数・数学を発展させる考え方として，その内包を精緻にするとともに，その外延を広げ具体化を図ってきた。数学的な考え方は，万国共通のものと考えられるが，日本においては，それを算数・数学教育の目標として発展させてきた。それは，日本の算数・数学教育の貴重な財産と考えられるものである。

日本の戦後の算数･数学教育における「数学的な考え方」の変遷の概略をその誕生期・発展期・成熟期・精緻化期に分けてまとめると，表１の通りである。

表1　日本の算数・数学教育における「数学的な考え方」の変遷

特徴	年	事項
誕生期	1955年 1958年	・昭和30年発行『高等学校学習指導要領数学科編』の目標 に「数学的な考え方」。そしてその具体例「中心概念」 が示される。 ・昭和33年告示『小学校学習指導要領算数』の目標に 「数学的な考え方」が現れる。
発展期	1966年 1968年 1969年	・東京教育大学附属小学校初等教育研究会『教育研究』における特集「数学的な考え方」 ・教育総合研究所『算数と数学』における特集「数学的な考え方とは」 ・米山国蔵の「数学的精神活動」 ・清宮俊雄の「発見的研究法」 ・川口廷・中島健三らの「数学的な考え方」 ・秋月康夫の「数学的な考え」 ・菊池兵一の「数学的な考え方」 ・東京都立教育研究所（片桐垂男・桜井隆道・高橋栄治・大島富明）の「数学的な考え方」
成熟期	1977年 1981年	・島田茂の「数学的活動」 ・松原元一の「数学的見方考え方」 ・中島健三の「数学的な考え方」
精緻化期	1988年	・片桐重男の「数学的な考え方・態度」

（長崎2007のＰ182より）

2　数学的な考え方の具体

本節では，長崎が表１に示した日本の算数・数学教育における「数学的な考え方」について，数学的な考え方について記述した代表的なもの，昭和30年発行『高等学校学習指導要領数学科編』及びその具体例「中心概念」，昭和33年告示『小学校学習指導要領算数』，東京教育大学附属小学校初等教育研究会『教育研究』における特集，川口廷・中島健三らの「数学的な考え方」，秋月康夫の「数学的な考え」，菊池兵一の「数学的な考え方」，東京都立教育研究所（片桐重男・桜井隆道・高橋栄治・大島富明）の「数学的な考え方」，松原元一の「数学的見方考え方」，中島健三の「数学的な考え方」，片桐重男の「数学的な考え方・態度」について，次に詳しく示し，まとめていくこととする。

（１）戦後の学習指導要領に関して

日本の算数・数学科の目標として「数学的考え方」が始めて明示的に述べられたのは，1955年(昭和30年）に発行された高等学校学習指導要領である。その目標を示した記述には，次の表２に示した数学的な考え方の記述が見られる。(下線は筆者による。)

表２　戦後の学校教育で初めて目標に明示された数学的な考え方（1955)

高等学校の数学科は，中学校数学科の教育をもとにして，これを発展させたものである。すなわち数学科全般として，生活を合理化し，向上させていくのに基礎となるような数学的な教養を生徒に与えることをねらうとともに，これを通じて，各生徒の個性と進路に応じた基本的な数学的な能力や態度を養うことをめざすものであって，主として，次のことを目標とする。 １．数学の基本的な概念・原理・法則等を理解し，これを応用する能力を養う。 ２．数学が体系的にできていることと，その体系を組み立てていく考え方とを理解し，その意義を知る。 ３．数学的な用語や記号の正しい使い方を理解し，これらによって数量的な関係を簡潔明確に表現し，処理する能力を養う。 ４．論理的な思考の必要性を理解し，筋道を立ててものごとを考えていく能力と習慣とを身につける。 ５．<u>数学的な物の見方，考え方</u>の意義を知るとともに，これらに基づいてものごとを的確に処理する能力と態度とを身につける。

ここでは，数学的な考え方の導入の理由として，「数学が構成されていくときの中心となる物の考え方」は，「広い適用場面をもっており，その考え方を身につけることは，小学校や中学校で学習した算数・数学を利用する場合にも，いっそう高い程度の見通しと統一とをつけることになり，生活を合理化し，向上させていく上の基礎になる」として，その適用の広さと，学習したことの見通しと統一を与えることが挙げられている。

そして，数学的な考え方の内容を具体的に例示するものとしての「中心概念」が挙げられていた。例えば，「数学I」(高等学校の第１学年で学ぶ数学）においては，表３の中心概念が例示されていた。

表３　数学的な考え方の具体例としての「中心概念」(1955)

a．概念を記号で表すこと
b．概念・法則などを拡張すること
C．演繹的な推論によって知識を体系だてること
d．対応関係・依存関係をとらえること
e．式や図形について不変性を見いだすこと
f．解析的方法と図形的方法の関連

数学的な考え方については,「数学が構成されていくときの中心となる物の考え方」,「数学をもとにした考え方」,「数学全体の根底に流れている考え方」などと表現されている。このことから，1955年(昭和30年）に発行された高等学校学習指導要領では，数学的な考え方は数学を生み出す考え方であるととらえることができる。

その後，このような数学的な考え方は，小中学校の算数・数学科の目標へと引き継がれた。戦後の算数教育で「数学的な考え方」を初めて明示的に示しているのは，1958年（昭和33年）告示の学習指導要領の目標である。算数教育の目標を挙げると，表４の通りになる。(下線は筆者による。)

しかし，この学習指導要領，及び，その後発行されたこの学習指導要領に伴う「小学校算数指導書」（文部省，1960）の両者において，数学的な考え方とは何かという概念規定は明確にはなされてい。

表４　戦後の算数教育で初めて目標に明示された数学的な考え方（1958）

１．数量や図形に関する基礎的な概念や原理を理解させ，より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出すことができるようにする。 ２．数量や図形に関する基礎的な知識の習得と基礎的な技能の習熟を図り目的に応じ，それらが的確かつ能率的に用いられるようにする。 ３．数学的な用語や記号を用いることの意義について理解させ，具体的なことがらや関係を，用語や記号を用いて，簡潔・明確に表わしたり考えたりすることができるようにする。 ４．数量的なことがらや関係について，適切な見通しを立てたり筋道を立てて考えたりする能力を伸ばし，ものごとをいっそう自主的，合理的に処理することができるようにする。 ５．数学的な考え方や処理のしかたを，進んで日常の生活に生かす態度を伸ばす。

（２）東京教育大学附属小学校初等教育研究会『教育研究』における特集

東京教育大学附属小学校初等教育研究会が発刊している教育雑誌「教育研究」（1966）に，数学的な考え方について特集号がある。そこでは，数学者（表５）と算数・数学教育者（表６）の見解の違いを見ることができる。

表５　数学者の「数学的な考え方」

秋月康夫（東京教育大学教授）「数学的な考え方とその指導」 「数学的な考え方」とは何であるかを，数学におけると同じように定義しようとすることは，数学的ではないと私は第一に断じたい。・・・・・・数学的な考え方と称するものは，数学活動―表現された数学だけではなく，数学を創り出していく，思考も含めて―のすべてを通して体験的に総合的にむしろ直観的に捉えられるものではないかと思っている。 （『教育研究』第21巻5号．ｐ8～9）
平野智治（東洋大学教授）「数学教育学の中の用語（数学的な考え方ということばに関連して）」 数学の体系を組み立ててゆく数学自身の思考と，いろいろの事実現象を数学の用語を使って表現してゆく思考とには違いがある。このあとのものを数学的思考という。この数学的思考，数学的な考え方を実証できるようないい表わし方にかえれば「数学の用語を使った表現」となる。 （『教育研究』第21巻5号．ｐ11）
赤摂也（東京教育大学教授）「数学的な考え方とは何か」 可能なことは，せいぜい，個々の教師が「数学的な考え方」の何たるかを「体得する」という類のことしかないように思われる。･･･一番大切なことは，さきにも述べたように，数学的な考え方を言葉でいうことはむずかしいということを，十分に認識することである。･･･そのために一番役立つことは，もっともオーソドックスな仕方で数学を実際に勉強してみることである。「オーソドックス」とは，独習ではなく，立派な数学者に接し，その人の数学の研究の仕方を観察することである。……その際注意しなければならないのは，数学的な考え方は「数学」をうみ，それを発展させる原動力であるということである。 （『教育研究』第21巻5号．ｐ25）

表６　算数・数学教育者の「数学的な考え方」

原弘道（横浜国立大学教授）「数学的な考え方とは何か」 数学が他の学問とちがう点から，数学的な考え方を考察する立場 １　公理を掲げて推論の根拠とする事がらを決めるようにすること。 ２　数学の学習を通して「数学の構造」を創り出すように導くこと。 ３　用語の定義を明確にし一義的に解釈されるようにしておくこと。 ４　思考の対象となるものを抽象化・記号化できるようにすること。 ５　概念や法則を，いつも拡張していくような構えを作ること。 研究対象と研究方法の両者から，数学的な考え方を考察する立場 １　どの領域にも必要な考え方としての集合の考えを用いること。 ２　どの領域にも必要な考え方としての関数的な考えを用いること。 ３　方程式関係，不等関係，相関関係など関係的な考えを用いること。 （『教育研究』第21巻5号．ｐ16～17）
伊藤武（埼玉大学教授）「数学的思考について」 小学校に立場をおいた数学的思考を，次の二つの面から考えている。算数を学習しているときに働く思考と，数学を使って問題解決をするときに働く思考にわけてみた。前者を思考の様式，後者を思考の内容ということにする。 １．思考の様式 （1）概念形成のときに働く思考。抽象したり，具体化する思考，一般化して考えたり，特殊。 （2）文章題の解決に働く思考。直観的思考，類推，洞察（見通し），検証・実証，観点の変更などの働きや，総合的思考と解析的思考，演えき的思考と帰納的思考，構造的把握と同型の考え方など，①適用のときに働く思考，②応用のときに働く思考 ２．思考の内容 ①可逆的な考え方，②量不変の考え方，④全体と部分の考え方，④量の質的変換の考え方，⑤対応の考え，⑥集合の重なりの考え方，⑦代入の考え方，⑧伸縮の考え方。 （『教育研究』第21巻5号．ｐ20～21）
小西勇雄（東京教育大学教授）「数学的な考え方とは」 数学的な概念や処理方法を必要とし，それを生み出していく母体ともなると思われる物の見方，考え方を「数学的な考え方」の内容と解して，その一・二の例をあげてみよう。一．問題の処理に際しては，資料などに基づいて自ら納得のゆく判断し，それを他の人にも理解してもらうこと，二．原理や法則に基づいて考察処理し，知識を体系づけ処理を能率化しようとすること･･･三．まず試案的な解決処理を施こし，その反省を通してより適切な解決処理を考え出そうとすること。 （『教育研究』第21巻5号．ｐ23）

これらを見ると，数学的な考え方が多彩であり，数学者と算数・数学教育者では微妙な相違が見られる。数学者は，数学的な考え方は直観的・体験的なものであり定義できるものではないとし，算数･数学教育者は，数学的な考え方を分析・総合して定義しようしている。

（３）川口・中島の研究に関して

川口・中島は，「数学的な考え方」を「算数の指導を通して，形式的な内容以外で，こどもの能力として開発していきたいことで，しかも，なるべく算数において特にねらうべき性格のものを，包括的にさしている」としている（川口・中島，1968)。

そして，数学的な考え方として，次のようなことを挙げている。

ア　数学で用いる特有の考え方

イ　数学特有のものではないにしても，数学でよく用いる考え方

ウ　数学の基盤をなすような考え方

エ　事象の考察処理に，数学を積極的に用いようとする考え方

ただし，エの数学を用いることを数学的な考え方に入れることについては，「ことばの上からは問題はないわけではないが，算数の指導のねらいから考えた場合には，ぜひ入れたいことである」と若干の躊躇をしている。そして，数学的な考え方を表７のように説明している。

表７　川口・中島の数学的な考え（1968)

第1部		
Ⅰ　集合の考え	Ⅱ　数と記号化	Ⅲ　計算と論理的な考え方
Ⅳ　測定の考え	Ⅴ　空間のとらえ方	Ⅵ　関数の考え
Ⅶ　統計的な考え方	Ⅷ　確率の考え	
第2部		
Ⅸ　一般化と拡張の考え	Ⅹ　帰納・演繹の考え方と発見学習	
XI　構造的な考え方	XII　問題のいろいろな考え方	

そして，このような数学的な考え方を入れた背景を次のように述べている。

「算数で，数学的な考え方の育成を目指すというのは，形式的な知識・技能の習得だけを目標としたのでは，社会や学問の発達につれて習得すべきことが多くなる一方であり，しかも，技能的なものの性格からいって，それほどの応用性ないしは転移が期待できない。これに対して，「考え方」の育成で期待しようとしていることは，集約された内容を基礎にして，広い適用を求めることであり，社会の発展に即応して創造的な考察・処理ができる可能性を期待してのことであるということができる。」（川口・中島，1968)

これは，算数・数学教育で身につけたことが広く社会で適用できるようにということを示していると考えられる。

また，中島は，当時文部省教科調査官であり，川口とともに小学校学習指導要領（文部

省，1968）の作成に直接関わっている。そのため，算数科の学習指導要領にも２人の意向が反映されていると考えられる。そこには，総括的な目標として「日常の事象を数理的にとらえ，筋道を立てて考え，統合的，発展的に考察し，処理する能力と態度を育てる。」が掲げられ，その目標を達成するための具体的な目標として「1　数量や図形に関する基礎的な概念や原理を理解させ，より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出すことができるようにする。」と示されている。

（４）「数学的な考え」と「数学的な考え方」

秋月は，数学の問題の解決過程に働く数学的な考えについて，「考える力をつけるには何より“良い問題”を提供してやることである。ことに，まだ数学化されていない生の問題を，数学化（数学的に表現する）する力をつけるには，これは最良の方法であろう。」と述べ，数学的な考え方における数学化の観点から生の問題の重要性に触れている（秋月，1968）。

また，菊池は，数学的な考え方とその指導についてまとめている。数学的な考え方を，数学を創り出すこととして，数学を創り出す様相として，「そのひとつは，数学的な概念を形成したり，数学的に問題を構成したり，それを解決したりすることによって，個々の数学的な事実を見出していく過程である。その第二は，個々の数学的事実を反省することによって，それらを論理的に組織立てたり，体系化をはかったり，また，数学的な方法を自覚したりする過程である。」としている（菊池，1969）。

日本の算数・数学教育の実践者・研究者の研究団体である日本数学教育会は，数学的な考え方の解説書を出している（日本数学教育会編，1969，1970，1971）。その「はしがき」は，次のことが述べられている。

1969年（高校編）「“数学的な考え方”という表現の中には，むろん，‘‘数学的な考え”が含まれているであろうが，“考え方”という言葉からは手法，手段，手順，手続きといった方法論的なもののみが強調されることが懸念される。われわれのねらいの一つにはそのような方法論的なものもあるが，むしろ重要なのは“考え”そのものであることを明らかにすることである。」

1970年（小学校編）「ここ数年来，『数学的な考え方』または『数学的考え』の問題は，全国的に非常な真剣さで研究討論されてきている。しかし，この『考え（考え方)』には決定的な定義がくだされているわけではない。いわば，幅広い『数学的考え（考え方)』を，ある研究者は『態度』として見，また他の研究者は『内容的に分析』し，また『研究対象と研究方法からの考察』としてとらえようとしている。さらに，『思考の様式』と『思考の内容』の面から研究を進めてきてもいる。」

1971年（中学校編）「数学的な考え方は，大海の如く，広くかつ深いものであり，そのため多岐多様にわたるものであるので，それは多種多様に受けとられ，解釈されやすいものである。このことが，数学的な考え方の字句の解説やその分類整理の研究に拍車をかけたのも，その深化の過程の一断面としてやむをえないことかも知れない。しかし，この段階に終始していたのでは，これを知識としてとらえ，それを伝授するという域を脱することはできまい。ここに，これからの進展，充実の必要性が痛感されるのである。」

上述のことは,「数学的な考え」と「数学的な考え方」の違いについて議論があることが示されている。そこには,数学的な考えが内容にかかわるものであり,数学的な考え方が方法にかかわるものであるとのとらえからくる対立を見ることができる。秋月が「考え」,菊池が「考え方」と表現していることに対応していると考える。

(5)東京都立教育研究所の示す数学的な考え方

東京都立教育研究所の研究員が,数学的な考え方を整理して,紀要にまとめた。(片桐,桜井,高橋,大島ら,1969,1971,1971)

そこには,数学者である秋月康夫,正田健次郎,掛谷宗一,ポアンカレ,ポリア,算数・数学教育者である和田義信,菊池兵一,川口延,戸別青,前田隆一,佐藤良一郎,全米数学教師協議会などの考えが,ほとんどすべて収集され分類されて整理された。それをもとに数学的な考え方を表8の通り示した。

表8　東京都立教育研究所による数学的な考え方(1969)

Ⅰ. 数学的な考え方を生み出す背景となる考え方
(1) 自主的に行動しようとする
(2) 合理的に行動しようとする
(3) 内容を明確にし,これを簡潔明確に表現しようとする
(4) 思考,労力を節約しようとする
Ⅱ. 数学の流れをつくる数学的な考え方
(1) 数学のねらいともいわれる数学的な考え方
帰納的考え方,逐次近似的考え方,類推的考え方,演えき的考え方,統合的考え方,拡張的考え方,公理的考え方
(2) 思考の対象に対する数学的な考え方
抽象する考え,数量化したり固形化したりする考え,記号を用いたり読んだりする考え,理想化する考え,単純化する考え,一般化する考え,特殊化する考え,形式化する考え
Ⅲ. 数学の内容からみた数学的な考え方
(1) 数・式における考え　(2) 測定における考え
(3) 図形における考え　(4) 統計における考え
(5) 関数における考え　(6) 集合における考え

ここでは,数学的な考え方が,数学の流れをつくるという数学の方法に関する考え方と数学の内容に関する考え方とからまとめられている。

（６）松原の数学的見方考え方

松原は，算数・数学教育において子どもの心理と考え方の関連を重視した。そして，数学的な見方考え方を心理的に思考の体制化・構造化であるとした（松原1977)。

数学的にものを見，考えるとは，「課題に当面しこれを体制化し構造化する思考段階」において，集合と写像により表９のことがなされることを示している。

表９　思考の体制化・構造化から見た数学的な考え方（1977)

一，対象を集合としてとらえる。ここで先の方をすでに見直した第一段の抽象化がある。
二，その集合に対し，別に都合のよい数学的構造をもった第二の集合へ変換する。つまり関数を設定する。ここで飛躍的な抽象化がなされることが多い。
三，第二の集合の特性を使って解決に導く。その後でその結論を第一の集合またははじめの課題に当てはめて課題自身の具体的な言葉に直すことも多い。

そして，数学的な考え方は，「いま考えている問題を実際に解決する過程でおのずから体得する」ものとしている。

（７）中島の数学的な考え方

中島は，1950年代から1960年代にかけて文部省において小学校学習指導要領の算数科に数学的な考え方を導入した。

中島は，「『数学的な考え方』の育成とは，『算数・数学にふさわしい創造的な活動が自主的にできるようにすること』である」として，その創造的な側面を強調している。そして，「数学的な考え方」の構造と創造のための論理（表10）を挙げている（中島，1981)。

表10「数学的な考え方」の構造と創造のための論理（1981)

1．課題を，簡潔，明確，統合などの観点をふまえて把握すること
2．仮想的な対象の設定と実在化（実体化）のための手法
3．解決の鍵としての「数学的なアイデア」の存在とその意識づけ
4．「構造」の認識と保存－特に拡張・一般化による創造の手法と論理－
5．評価－解決の確認とその真価の感得，残された課題と問題への志向－

（８）片桐の数学的な考え方・態度

片桐は，東京都立教育研究所における成果を精緻化してより具体化を図った（片桐，1988)。

そこでは，数学的考え方・態度とは，「自主的に算数・数学の内容を理解し，算数・数学的問題を形成し，解決，発展させていくことができるために大切な考え方・態度」として，表11のような内容を示している。

ここでは，数学を発展させていくものとしての数学的な考え方が，数学の方法と数学の内容の２つの面からとらえている。

表11　数学的な考え方の精緻化（1988）

Ⅰ．数学的な態度
1．自ら進んで自己の問題や目的・内容を明確に把握しようとする
2．筋道の立った行動をしようとする
3．内容を簡潔明確に表現しようとする
4．よりよいものを求めようとする
Ⅱ．数学の方法に関係した数学的な考え方
1．帰納的な考え方　2．類推的な考え方　3．演繹的な考え方
4．統合的な考え方　5．発展的な考え方
6．抽象化の考え方－抽象化，具体化，理想化，条件の明確化の考え方－
7．単純化の考え方　8．一般化の考え方　9．特殊化の考え方
10．記号化の考え方－記号化，数量化，図形化の考え方－
Ⅲ．数学の内容に関係した数学的な考え方
1．単位の考え　2．表現の考え　3．操作の考え
4．アルゴリズムの考え　5．概括的把握の考え
6．基本的性質の考え　7．関数的な考え　8．式についての考え

3　長崎の算数･数学の力

長崎は，２節で見た数学的な考え方の歴史的考察を踏まえ，更に広い視点で見ている。現代の要請に応える算数･数学の目標を「算数･数学の力」と定義して，その力を育成していくことが重要であることを主張している。そして，これまで数学的な考え方の中に含まれていなかった算数・数学教育の形式的な目標である問題解決能力,数学的モデル化能力,コミュニケーション能力などを含めてより広く，とらえる立場に立つ(長崎，2007)。

算数の力のとは，次の表12の４つの力であるとしている。

表12　算数の力（2007）

1「算数を生み出す力」→「数学的な考え方」に関連
2「算数を使う力」　→「問題解決」「数学的モデル化」に関連
3「算数で表す力」　→算数における「表現」「読解」に関連
4「算数で考えあう力」→算数における「伝え合う」「コミュニケーション」に関連

4　数学的な考え方のとらえ

長崎の研究及び２節及び３節から，数学的な考え方は，次のように整理できる。

・数学的な考え方は，数学を生み出す考え方である（文部省，1955)。
・学習指導要領（大蔵省印刷局，1958）及び，小学校算数指導書（文部省，1960）では，数学的な考え方とは何かという概念規定は明確にはなされていなかった。
・数学的な考え方が多彩であり，数学者と算数･数学教育者（表５，表６）では微妙な相違が見られる。
・数学者は，数学的な考え方は直観的・体験的なものであり，定義できるものではないとし，算数･数学教育者は，数学的な考え方を分析・総合して定義しようしている。
・川口・中島（1968）は，「数学的な考え方」とは，「算数の指導を通して，形式的な内容以外で，こどもの能力として開発していきたいことで，しかも，なるべく算数において特にねらうべき性格のものを，包括的にさしている」としている。
・数学的な考え方の議論として「数学的な考え方」と「数学的な考え」を前者は方法，後者は内容という対立を見ることができる。(秋月，1968)，(菊池，1969)，(日本数学教育会編，1969，1970，1971)
・東京都立教育研究所から，数学的な考え方が，数学の流れをつくるという数学の方法に関する考え方と数学の内容に関する考え方とからまとめられた表８が示された。(片桐，桜井，高橋，大島ら，1969，1971，1971)
・松原（1977）は，数学的な考え方を思考の体制化・構造化（表９）からとらえ，数学的な考え方は，「いま考えている問題を実際に解決する過程でおのずから体得する」ものとしている。
・中島（1981）は，「『数学的な考え方』の育成とは，『算数・数学にふさわしい創造的な活動が自主的にできるようにすること』である」としている。
・片桐（1988）は，数学的考え方・態度を「自主的に算数・数学の内容を理解し，算数・数学的問題を形成し，解決，発展させていくことができるために大切な考え方・態度」とし，数学を発展させていくものとしての数学的な考え方が，数学の方法と数学の内容の２つの面からとらえている。
・長崎（2007）は算数の力（表13）の中にこれまで数学的な考え方の中に含まれていなかった算数・数学教育の形式的な目標である問題解決能力，数学的モデル化能力，コミュニケーション能力などを含めてより広くとらえている。

上記のことから，数学的な考え方について次の２点が明らかになってくる。

まず第一に，数学的な考え方は，算数・数学の目標の一つとして誰もが位置づけるものである。しかし，各研究者の考え方によってその主張は様々であり，明確な定義付けが容易にはされにくい。その一方で誰もが伸ばさなければならない能力の一つであると考えられる。

第二に，数学的な考え方は，数学の内容，数学の方法，数学を学ぶ態度を含んだものである。時としてその軽重の違いで議論がなされ，その結論がいまだに出ていない。

つまり，数学的な考え方のとらえは多様であり，数学を創り出すという方向性さえ見失わなければ，自由に定義してよいものと考えられる。したがって，筆者は，次のように数学的

な考え方をとらえることとした。

授業では当面する問題を実際に考えることで子どもたちの数学的な考え方が育つ。そのため，考える時間を与えることが大事であり，そこで思考が働く。思考が働くとは，問題場面を生活経験や既習事項に置き換えて解決策を探ろうとすることである。このような過程の繰り返しが，思考の働きを鍛え，数学的な考え方が育成されていく。

上述の筆者の主張は，次に示す松原の研究にも見られる（松原，1987)。

「必然的に生き生きと活動させる授業が，考えさせる授業である。」とし，「単元ごとの指導内容があるように考え方（統合的な考え，発展的な考え，帰納的な考え，演繹的な考え等,）を直接内容として指導することはできない。子どもに考えさせることが大事であって，思考の過程に表れる考え方や手法が直接の指導になってはならない。考えさせることは，課題に当面させ，それに集中させることである。その課題解決の過程で，直観や理論が働き，数学的な考え方も使われる。その結果，関連する既習事項が思い出され解決に至るのである。そこには，思考の方法とでもいわれる一般的な思考過程の型は存在しない。」

これは，数学的な考え方は，それを直接指導することができない，つまり，子どもが必然的に解決しなければならない課題を解決する過程で指導がなされることを示している。そして，教師は子どもの自己活動を促し，創意を働かさせることが肝要であり，その過程で，結果として使われるものだということも示している。

また，松原は，考える場面では暗示や洞察により体制化がおこなわれ，さらには構造化がなされ「わかった」となることも主張している（1977，松原)。

「はじめ課題に当面すると直ちに直観が考える方向を示す。『こうすればできそうだ』と。課題によっては，しばしば五里霧中のこともあろう。観察し続けていくうちは絶えず直観が働く。やがてその対象に与えるべき体制を洞察してくる。そして対象に構造を与える。苦心はすべてこの過程の中にある。構造を与えては壊す。また与えて壁に突き当たる。そのうち全体が一つの構造の下に調和的に見えてくる。これは瞬間であって，思わず「わかった」と叫ばせるのである。」

この思考活動を整理すると図２になると考える。

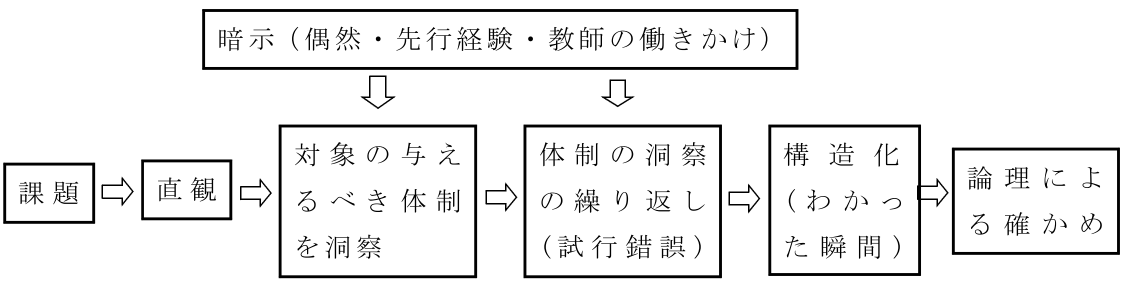


図１

更に松原は，先の２節６項に示した，数学的にものを見，考えるとは，「課題に当面しこれを体制化し構造化する思考段階」において，表９のような第一の集合から第二の集合へと関数を設定し写像がなされることであるとしている。

表９　思考の体制化・構造化から見た数学的な考え方（1977）

一，対象を集合としてとらえる。ここで先の方をすでに見直した第一段の抽象化がある。 二，その集合に対し，別に都合のよい数学的構造をもった第二の集合へ変換する。つまり関数を設定する。ここで飛躍的な抽象化がなされることが多い。 三，第二の集合の特性を使って解決に導く。その後でその結論を第一の集合またははじめの課題に当てはめて課題自身の具体的な言葉に直すことも多い。

これは，子どもが当面する課題に対して都合のよい数学的構造をもった別の第二の集合へ変換することを示している。そして，このことは，自分の知っている既習内容や生活経験に置き換えて解決していくこととに相当すると考えられる。

以上のことから，本研究では数学的な考え方を松原（1977）の数学的見方考え方をもとに，「いま考えている問題を実際に解決する過程でおのずから体得する」ものであり，数学的にものを見，考えるとは，「課題に当面しこれを体制化し構造化する思考段階」とすることとした。そして，そのときの起こる第一の集合から第二の集合への写像，つまり，置き換えであるととらえ，研究を進めることとした。

筆者は，このような置き換えは，授業においてコミュニケーション活動を展開することで活性化がおこなわれると考える。なぜなら，自力解決で見られる個人の置き換えが相互理解のコミュニケーションにより検討されることで，新たな置き換えとなり質的な高まりを見せるものと考えるからである。コミュニケーションの詳細については第２章で述べることとする。

第２章　コミュニケーション的観点による指導

本研究では,授業におけるコミュニケーション的観点による指導に関わる先行研究として，次の熊谷，江森，古藤の研究を取り入れることとする。

１　熊谷の研究に関して

熊谷は，相互作用を前提とした算数･数学の授業の基本モデルが共有プロセスとその関係によって構成されることを明らかにしている(熊谷，1989)。

授業における教師と子供，子供同士の相互作用に着目し，相互作用を前提として考察するとき，教師と子供の両者の立場から，重要な概念として「共有」ということを指摘している。

「共有するとは，個々の子供の個人的な経験･知識を公的なものへ，さらに，数学的なものへと発展させていくために，教師と子供が，子供たち同士がそれらについて比較･検討していく相互作用を行うことが可能となるような基盤を確立することであり，また，相互作用の相として共有の繰り返しを通じて，個人的経験･知識が，公的，数学的経験･知識へと発達していく。共有するということは，次の相互作用を行うための基盤を確立することであるから，共有の繰り返しということは相互作用が次々と生じていることを示している。」(ｐ8)

「共有するという相互作用の相は，一方で一斉授業の流れを考察するてがかりを与えるだろうし，他方で，教師，個々の子供がどのような相互作用を与えるのかについて考察するためのてがかりを与える。そして，特に，関係づけられている経験･知識が子供どうしの間で異なることは，新しい概念やアイディアなどを生じさせたり，それらを明確にしていくことを可能にする。」(ｐ8) と述べている。

この「共有」という概念をもとに授業の基本モデルを構成するために「共有プロセス」を次のように定義している。

「共有するときは，教師と子供，子供どうしの間で共有しようと目指しているものがある。それを，共有することと呼び，ｓ と略記する。そして，共有することに関連づけられている経験・知識がある。これを同意の内容と呼び，ｒ と略記する。特に，共有が成立したときは，共有することに対して，同意の内容の正当性が教師と子供，子供どうしの間で認められたことになる。さらに，個々の子供が共有する過程に参加していくためには，子供自身がその前提となる経験・知識を有していたことが必要となる。または，経験・知識を得るための活動がある。これを共有するときのてがかりと呼び，ａ と略記する。共有するときのてがかりは，共有することに対して固有のものである。「共有するときのてがかり(a)」「同意の内容(r)」「共有すること(s)」が関係づけられたとき，共有が成立する。そして，共有が成立するまでの相互作用を共有プロセスと呼び，S(a, r, s)と書く。」(ｐ10)

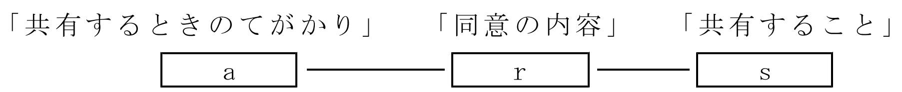


図２　共有プロセス

更に，共有プロセスの関係を６つの型を同定し，共有プロセスＳ１から共有プロセスＳ２へ共有プロセスがどのような関係性をもつのか，その関係をもとに関係Ⅰ・関係Ⅱ・関係Ⅲを問題構築プロセス，関係Ⅳ・関係Ⅴ・関係Ⅵを問題解決プロセス，として，その関係性を共有プロセスの関係Ⅰ～関係Ⅵとして基本モデルとして示している。

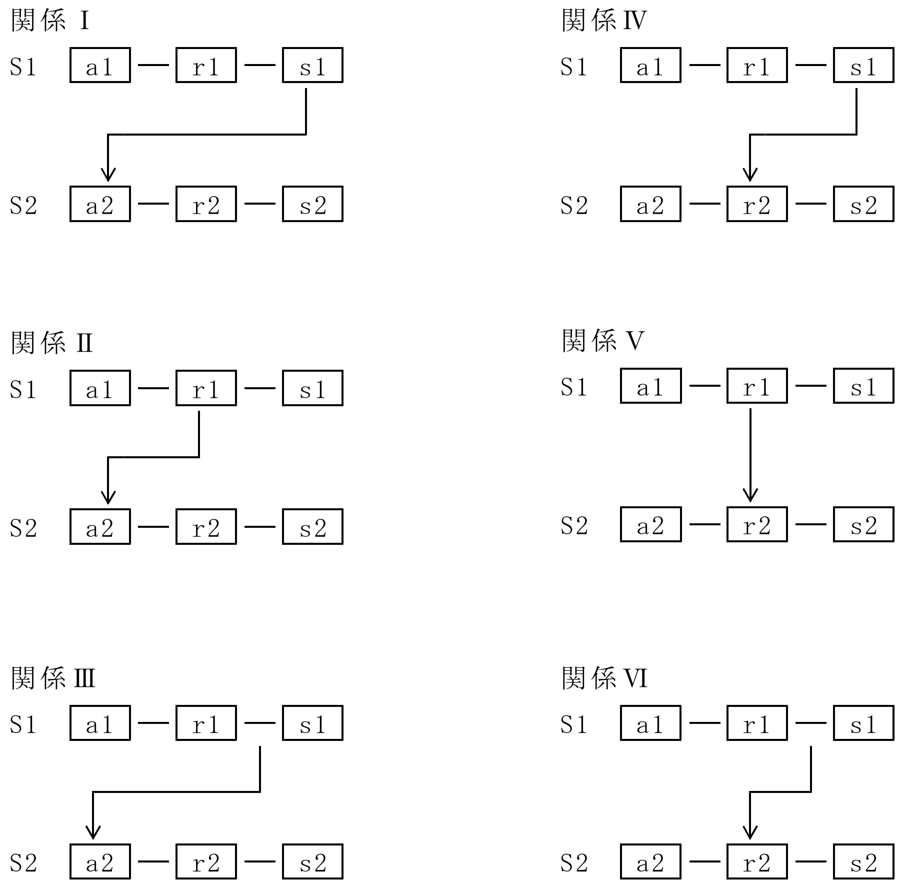


図３　共有プロセスの６つの基本モデル

熊谷の主張する教師と子供，子供どうしの相互作用を前提とした授業の基本モデルでは，共有プロセスの単位化を図り，それらの関係を６種類の基本モデルの枠組みで授業を指導過程に沿って段階的に考察しようとするものである。

共有プロセスＳ１においては「共有するときのてがかり」「同意の内容」「共有すること」の関連と内容の明確化を図り，次の段階の共有プロセスＳ２との関係性をフローチャート的に表現し，６種類の共有プロセスの枠組みでとらえようとするものである。ここでの関係性を表示したフローチャート的な図に記述される内容は，子どもの具体的な学習活動であり，押さえるべきポイントとその理由が記述される。これは，実践現場の学習指導案を前後の関係を数学的な視点で明確にしながら図的に構造化したものといえる。

熊谷の共有プロセスを明確にすることによって個々の子どもの個人的な経験･知識を公的なものへ，さらに，数学的なものへと発展させていくことができる。共有していく過程で数学的な考え方（置き換え）がノートや発言，発表として表出させることができると考える。

筆者が，３章において実践・考察した授業の共有プロセスは次のような構成と考えられる。（図４）

		共有するときのてがかり	同意の内容	共有すること
導入	S1	a1 具体的に確かめる １番目は「こぶた」 ２番目は「たぬき」 ３番目は「きつね」 ４番目は「ねこ」	r 1 ５番目は「こぶた」 ７番目は「きつね」 順番にきまりがある	s 1 番号により動物が決まる 50番目は何になる？
展開	S2	a2 ①順番に書き出して ②表をつくる ③きまりを見つけて ④式・計算により	r2 ①②順番に書き出すと必ず見つかる ③④４で割った（４の倍数）から，あまりに注目すると見つかる	s2 どれも50番目は「たぬき」
	S3	a3 ①②の関連を考える ③④の関連を考える ①②と③④の関連を考える	r31 順番に書き出す→表 （見やすくした） ⇕ r32 きまり→式・計算 （簡潔に表した）	s3 剰余により，４つの集合に分けている あまり１が「こぶた」，あまり２が「たぬき」，あまり３が「きつね」あまりなし（割り切れる）が「ねこ」
	S4	a4 番号を大きくした， 75番目 100番目 を調べる	r4 表と式・計算から 75÷４＝18あまり３ なので「きつね」 100÷４＝25あまり０ なので「ねこ」	s4 どんな番号でもあまりを見れば求められる
整理	S5	a5 カレンダーや干支の並びをみると	r5 ７と12の剰余により分けているもの	s5 生活の中にも剰余類として見ることができるものがある
	S6	a6 カレンダーと干支の問題	r6 r4を適用して求める	s6 整数は剰余によって類別することができる

図４　授業の共有プロセス

2　江森の研究に関して

江森は，数学の学習場面におけるコミュニケーション・プロセスの分析を行い，その基本的なメカニズムを解明している（江森，1993)。

江森は，その研究においてメッセージ解釈の主観性という認知的側面に焦点を当てた調査を行い，数学の学習場面における実際のコミュニケーション場面を観察･記録し，その場面の分析を行った。そして，言語コミュニケーションのフィードバックによる社会的相互作用の基本サイクル（ 図５）を明らかにした。

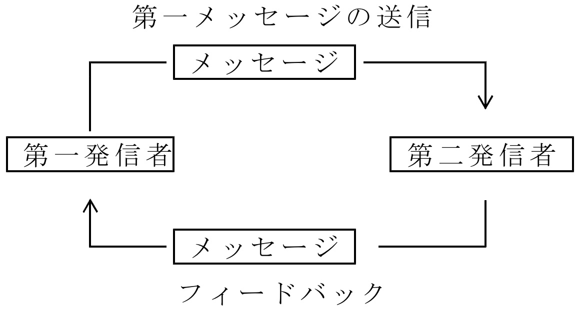


図５　社会的相互作用の基本サイクル

江森は，社会的相互作用の基本サイクルの循環が２人のコミュニケーションと３人のコミュニケーションでは，その様相の違いを指摘し，２人のコミュニケーションでは，送り手と受け手という線形関係が基本となり，次に示すように，前言者へ作用するのみであり，２人の参画者間で行われるフィードバックを「ダイアド（２人１組の)・フィードバック」と呼んでいる。

図６　２つのダイアド･フィードバック

さらに，江森は２つのダイアド･フィードバックを結び合わせて，第３発話者の発言が第１発話者へもフィードバックとして作用していると考え，２つ以上のダイアド･フィードバックの連鎖として，第Ｎ発話者の発言（Ｎ≧３）が第１発話者へのフィードバックとして作用しているとき，このフィードバックを「連鎖的フィードバック」（図７）としてモデルを示している。

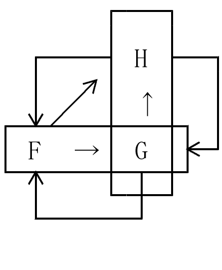


図７　連鎖的フィードバック

そして,「連鎖的フィードバック」作用が発現する要因として「認知的不協和」の状態を指摘している。

認知的不協和（theory of cognitive dissonance）とは，Festingerにより,「認知的不協和の理論」の中に定義づけられている社会心理学用語である(Festinger, 1965)。Festingerは，不協和の定義を次のようにしている。

「考察の対象になっている２つの要素だけを考えて，１つの要素の逆の面が他の要素から帰結されるとき，これらの２つの要素の関係は不協和である」また,「いずれか一方が他方から帰結されるとき，２つの要素の関係を協和であるといい，この２つにのいずれかの場合にもあてはまらない場合，２つの要素は無関連である。」(ｐ13)

そして，認知に不協和が存在すると，人間はその不協和を低減させるために，なんらかの圧力を起こし,不協和を低減させる圧力の強度は,不協和の大きさの関数であるとしている。

このことから，認知的不協和の理論とは獲得した認知と目の前の事象との間に相違やその矛盾（不協和関係）が存在すると，それを低減するように動機付けられるという理論と考えられる。

江森は，認知的不協和を連鎖的フィードバックにより低減することで，知識の再構成（既存の知識を並べ変え，関連づけるだけでなく，既存の知識の一部をも書き換え，新規の知識構造を確立すること）が行われていくと述べている。

この考えに従えば，授業場面において，認知的不協和を子ども同士及び教師との連鎖的フィードバックによって低減させる努力をおこなうことで，内容豊かなで創造的な学習活動が行われていくと考えられる。

３　古藤の研究に関して

古藤は，「授業における１時間の指導を見通しのあるものにし，指導を効果的にするには，授業のねらいや子供の実態を的確にとらえるとともに，子供の考えを大切にした指導過程を構成しなければならない。そして，それぞれの段階における指導法について工夫することが大切である。―中略―　実際の授業では，それぞれの段階で，教師は子供にどのような資料を掲示し，どのように発問していくのか，予想される子供の反応に対して教師はどのような配慮のもとで，どう対応していくのか。『子どもの多様な考えを生かし，まとめる』という観点から明らかにしておかなければならない。」と述べている（古藤，1990)。

古藤による多様性には，次のものがある。

Ⅰ．独立的な多様性　　　：それぞれの考えの妥当性に着目して
Ⅱ．序列化可能な多様性　：それぞれの考えの効率性に着目して
Ⅲ．統合化可能な多様性　：それぞれの考えの共通性に着目して
Ⅳ．構造化可能な多様性　：それぞれの考えの相互関係に着目して

このように多様性を分類することにより，練り上げの方向性が生まれ，話し合い活動の終着点が明らかになると考える。

その一方で，古藤は比較検討がうまくいかない場合として，次の２点を指摘している。

・子供から出される質問や意見を適切に処理できず，いわゆる這い回る状態になってしまう。
・出された考えが生かされず，いつの間にか教師の意図にあった考えだけが“いい考え”として取り上げられる結果になってしまう。

そして，その改善策として“比較検討する”段階を３つのステップに分けておこなうことを提案した。

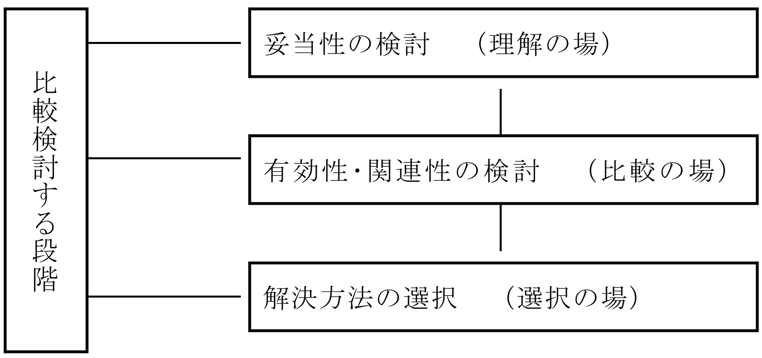


図８　３つの比較検討する段階

比較検討する段階を３つのステップに分けて行う指導は，単に数学的な考え方や知識･技能を高めるだけのものではない。〔理解〕―〔比較〕―〔選択〕の過程は，人が自分の身の回りの諸問題に的確に対処していくための大切な思考の筋道であり，このステップは，思考の仕方そのものを指導することになると考えられる。

更に，古藤（1998）は，比較検討する段階を４つのステップ（上述の３つのステップの比較の場を細分化して）に分けておこなう指導を主張するとともにコミュニケーション活動の意義とその果たす役割として次のことを指摘している（古藤，1998)。

「算数科における表現力の指導においては，問題場面に当面したとき，子どもたちが主体的に，過去の経験や既習事項または解決の方法などを：具体物の操作，または図，表，式などで表して考えるなどの多様な算数的なアイデアを駆使して，筋道を立てて考え，自分が納得した上，相手をも説得できる能力と態度を育成することが大切である。したがってここに，新しい算数科の学習指導でそれぞれの子どもの多様な考えによるコミュニケーション活動を導入する一つの意義が存在していると考える。」（p16）

「もともとコミュニケーションとは，算数の問題解決に関するクラス討議などの場面で，当面した問題の意味に関する情報，及び，その解決の方法などに関する数学的なアイデアを共有し，お互いが合意に達しようとする目的で，それぞれの考えを相手に筋道を立てて的確に伝達したり交換したりする子どもたち同士による練り合いの過程であると定義することができよう。」（p20）

そして，古藤が示す指導の要点，授業改善の視点としてのコミュニケーション活動，考えの多様性の類型化に応じたまとめ方の３つの視点を整理すると表13になる。

表13

	指導の要点	コミュニケーション活動	独立型	序列型	統合型	構造型
妥当性の検討	・多様な解法個々について，その解法の前提となる考えや着想は何か，またその前提に誤りはないかを問う。 ・着想と解決過程とが整合しているかどうかを問う。 ・論理的に筋道立っていれば，一つの考えとして尊重する。 ・考えが正しいかどうかは，適宜具体的な操作なども取り入れ，確かめさせる。 ・できるだけ多くの解法を体験させる。（追体験）	（考えのたずね合い）真意をたずね合うコミュニケーション	○	○	○	○
関連性の検討	・多様な解法全体を射程におき，個々の解法について着想や操作などの特徴（差異）に着目させ，そのことが表れるネーミングをさせる。 ・関連性の視点から見つめ直し，比較検討させる。（関連・並列化，統合化，構造化など） ・できるだけ実際に問題を解かせ，それぞれの考えの特色（長所，弱点）をとらえさせる。	（考えのつなげ合い）つなげ，くくり，つけたし合うコミュニケーション	○長短・特徴	○長短・特徴	○統合化	○構造化
有効性の検討	・有効性の視点から見つめ直し，比較検討させる。（簡潔性，明確性，効率性，発展性などの観点から考えのよさや不十分さを検討する） ・特殊な場面を想起させ，その場面でも解法が適用できるかどうかを吟味させる。 ・それぞれの立場から自由に検討させるが，無理にまとめようとはしない。	（ずれの練り合い）ずれを意識し，こだわり（自分の考え）をぶつけ合うコミュニケーション		○		○
自己選択	・ねらいにせまる解法が有効に働く問題を提示し，複数のやり方で実際にやらせる。 ・自分なりに最もよいと思う解法を選択させる。 ・なぜその解法を選択したのかの根拠をはっきりさせておく。	（よさの認め合い）よさを認め合うコミュニケーション	○	○	○	○

筆者は，古藤の多様な考え方の４分類（独立的な，序列化可能な，統合化可能な，構造化可能な多様性）によるコミュニケーション活動の視点によって，検討（妥当性・関連性･有効性・自己選択）をおこなうことによって，数学的な考え方に関わる議論がなされるものと考える。

4　３つの研究（熊谷，江森，古藤）と本研究との関連

熊谷の主張する授業の共有プロセスでは，共有プロセスの単位化を図り，それらの関係を６種類の基本モデルの枠組みで授業を段階的に考察しようとするものである。これは，前後の共有プロセスとの関係を数学的な視点で明確に示し，図的に構造化したものといえる。

ここでの共有プロセスに記述される内容は，子どもの具体的な学習活動であり，授業において共有が成立するための「共有するときのてがかり」「同意の内容」「共有すること」が記述される。これは，実践現場の学習指導案と同様の役割を果たすだけではなく，これを活用することで，そこでなされるコミュニケーション活動を文脈をたどって構想することが可能となる。そのため，学習展開を立案する段階で活用されるものであると考えることができる。

江森の主張する社会的相互作用の基本サイクル（図５）の循環は，１問１答式の受け答えについて述べているのではない。文脈として関連しあう言語コミュニケーションより，「認知的不協和」が「連鎖的フィードバック」を発生させ，その連鎖がコミュニケーションの質を高めていくことを示している。

このことは，言語コミュニケーションにより，いつでも「連鎖的フィードバック」が起きているのかということに留意しなければならない。連鎖的フィードバックは日常会話でも起こる可能性はあるが，それは意図したものではない。一方，授業では，教材研究を通して組織的に構成された展開において意図的に連鎖的フィードバックを発生させることができる。その意味では，教材及び目標の設定には特に注意が必要であると考える。

この江森のコミニケーション･プロセスの分析は教科の枠にとらわれない分析の手法であり，応用範囲が広い。しかし，算数･数学の研究として据えるのであれば，数学的な内容のコミュニケーションが発生し，かつ「連鎖的フィードバック」が起こるような素材を教材として用意する必要がある。更に，指導の目的・方法・ねらいから「どのような話し合いをどのように連鎖させていくのか」というコミュニケーションの方向性と授業構成をある程度明確にして授業に臨む必要が求められる。そのため，江森の研究は授業構成にまで踏み込んだ研究にはなっていないことが指摘できる。

この点について示唆を与えているのが古藤である。古藤は，コミュニケーションの方向性を授業構成の枠組みで整理している。それは，コミュニケーションとして何を検討し，どのように話し合わせるのかを明確に示しているといえる。これは，「授業構成をどのようにすべきかを考えるためのもの」と考えられる。そして，子どもの多様な考え方をコミュニケーションを通して，何（妥当性，関連性，有効性，自己選択）を検討するのか，更には，どのような（独立的な，序列化可能な，統合化可能な，構造化可能な）方向性にまとめていくのかを明確にすることの重要性を主張している。

以上のことから，次の３点が明らかとなる。

・熊谷は，「教師と子供，子供どうしの相互作用を前提とした授業の基本モデル」を共有プロセスとその関係を用いて授業構成を考察した。そのため，実践授業をおこなう際には，事前の授業展開を整理する上で有効である。
・一方，江森は，認知的不協和が連鎖的フィードバックによって低減されていく過程を考察対象としている。その過程では，コミュニケーションの質を高めることが期待できる。しかし，授業構成としての議論ではない。
・他方，古藤は授業構成として学習過程でなされるコミュニケーション活動の視点に示唆を与えている。

したがって，実践授業をおこなう際には，熊谷の共有プロセスの関係を用いて授業展開を整理し，江森の主張する認知的不協和を起こし，古藤の示すコミュニケーション活動の視点で授業構成することが重要となってくると考える。

上述したことにより，３人の研究の枠組みを活用することで以下に示す授業を展開することが可能となる。

共有プロセス（熊谷）をもとに事前に授業の流れを構造化することができる。そして，どの場面で認知的不協和とそれを低減する連鎖的フィードバック（江森）を起こし，どのような方向性のコミュニケーション活動（古藤）を成立させていくのかを授業の共有プロセスをもとに想定することができる。

その後，想定した共有プロセスをもとに，実際に授業を行い，授業に考察を加えることで，子どもがどのような数学的な考え方（置き換え）をしていたのかを示すことができる。そして，教材の，授業構成の，指導法の工夫等について，その有用性を明らかにしていくことができる。

5　研究の枠組みと考察の視点

本研究では，４節で述べた熊谷，江森，古藤の研究の枠組みを活用することで，コミュニケーション的観点による指導を取り入れる。そして，授業実践を第１章３節で述べた松原の主張に依拠した子どもの数学的な考え方（置き換え）が生起したかを省察する。

そのために，まず，授業の共有プロセスを明確にした授業構成を考える。それにより，認知的不協和とコミュニケーションによる連鎖的フィードバックを起こす場面を明確にする。

次に，実際の授業では，コミュニケーションの方向性（本研究では特に妥当性や関連性の検討）を考慮しながら認知的不協和とそれを低減するために既習事項や生活経験に置き換えて考える場面が見られるような活動を仕組む。その場面こそが数学的な考え方を育成する最適な場面であると考えられる。

最後に授業のプロトコルとノート記録をもとに認知的不協和と数学的な考え方(置き換え)の視点で考察し，数学的な考え方がコミュニケーション活動によって育成されていくことを示す。

上述のことから，研究の枠組みと考察の視点を表14に示す。

表14

研究の枠組み	①数学的な考え方とは自分の知っていることに置き換えて考えることである。 ②認知的不協和によって子どもの置き換える活動が活性化する。 ③認知的不協和はコミュニケーションの連鎖的フィードバックにより低減される。
考察の視点	①授業の中に認知的不協和が見られるか。 ②その低減のための連鎖的フィードバックを伴ったコミュニケーション活動が見られるか。 ③そこで，置き換える活動が起こっていたか。

なお，この後の実践研究で使われる「知識の構造化」と「知識の再構成」の用語については，江森（1993）に従う。したがって，前者は，既存知識の内容を変容させることなく，それぞれの知識間の関連づけを行うことを意味し，後者は，既存知識の変容を含めた知識の構造化を意味するものと定義する。

第３章　指導事例の実践と考察　（実践事例Ⅰ）

１　実践事例Ⅰについて

本実践は，平成 23 年 7 月 26 日に弘前大学教育学部附属小学校において 5･6 年 4 組 16 名を対象にした授業である。

（１）単元名　　「整数をなかま分けしよう」

（２）本時の目標

整数を４の剰余に着目して類別し，整数の見方や数についての感覚を豊かにし，整数の性質について理解を深める。

（３）本時の問題

> ４種類の動物が次のように繰り返されていきます。
> こぶた→たぬき→きつね→ねこ→こぶた→たぬき→・・・
> ○番目の動物はなんでしょう。

（４）授業の共有プロセス

	共有するときのてがかり	同意の内容	共有すること
導入 Ｓ１	a1 具体的に確かめる １番目は「こぶた」 ２番目は「たぬき」 ３番目は「きつね」 ４番目は「ねこ」	ｒ１ ５番目は「こぶた」 ７番目は「きつね」 順番にきまりがある	ｓ１ 番号により動物が決まる 50 番目は何になる？
Ｓ２ 展開	a2 ①順番に書き出して ②表をつくる ③きまりを見つけて ④式・計算により	r2 ①②順番に書き出すと必ず見つかる ③④４で割った（４の倍数）から，あまりに注目すると見つかる	s2 どれも 50 番目は「たぬき」 認知的不協
Ｓ３	a3 ①②の関連を考える ③④の関連を考える ①②と③④の関連を考える	r31 順番に書き出す→表 （見やすくした） ⇕ r32 きまり→式・計算 （簡潔に表した）	s3 剰余により，４つの集合に分けている あまり１が「こぶた」，あまり２が「たぬき」，あまり３が「きつね」あまりなし（割り切れる）が「ねこ」 認知的不協
Ｓ４	a4 番号を大きくした， 75 番目 100 番目 を調べる	r4 表と式・計算から 75 ÷ ４ ＝ 18 あまり ３ なので「きつね」 100 ÷ ４ ＝ 25 あまり ０ なので「ねこ」	s4 どんな番号でもあまりを見れば求められる

整理Ｓ5	a5 カレンダーや干支の並びをみると	r5 7と12の剰余により分けているもの	s5 生活の中にも剰余類として見ることができるものがある
Ｓ6	a6 カレンダーと干支の問題	r6 r4を適用して求める	s6 整数は剰余によって類別することができる

・Ｓ２では，ｓ２（どれも50番目がたぬきになる）を共有する過程で妥当性の検討をおこない，子どもそれぞれの置き換えの違いが明らかになり，認知的不協和が起こる。

・Ｓ３では，ｓ３（剰余により，４つの集合に分けている）を共有する過程で関連性の比較検討の際に認知的不協和が起こる。

２　授業の実際

（１）授業のプロトコル

Ｔ１：早速ですが，日にちと番号はこれでいいですか。（7/26　No61を確認）

Ｃ：はい。

Ｔ２：問題をかきますから，みなさんもノートに写してください。

Ｃ：はい。

Ｔ３：板書「４種類の動物が次のように繰り返されていきます。」

Ｔ４：何の動物だと思いますか。

Ｃ：ぞう，ありくい，かものはし，プレーリードック，ライオン…

Ｔ５：じゃあ，最初の動物をかきます。かわいい動物です。板書「こぶた」

Ｃ：うさぎ

Ｃ：あっ，たぬき，きつね，ねこ

Ｃ：あぁ。（歌があると認識）

Ｔ６：なに，みんな知ってるの。じゃあ，歌ってごらん，さんはい。

Ｃ：こぶた→たぬき→きつね→ねこ・・・

Ｔ７：何種類出てきた？

Ｃ：４種類。

Ｔ８：はい。それじゃあ，その４種類を書きましょう。板書「こぶた→たぬき→きつね→ねこ」

Ｔ８：ねこの次はなんですか。

Ｃ１：こねこ。

Ｃ：えっ？

Ｃ：こぶた。

Ｔ９：何でこねこじゃないの？Ｃ１さん。

Ｃ１：何て言えばいいのかなあ。やべえー。

Ｔ 10：じゃあ，他の人。
Ｃ２：４種類の動物だからだと思います。
Ｃ３：４種類の動物だからです。
Ｃ４：問題に書いているからだと思います。
Ｔ 11：Ｃ１さん，問題に書いてる？書いてるよね。繰り返されるんだから，（板書を示し）１，２，３，４と来たんだから，次は，こぶただよね。板書「こぶた」そこで，その次は，板書「たぬき」というふうに繰り返されていきますだから，「…」
Ｔ 13：今日みんなに考えてほしいのは「〇番目の動物は何でしょう。」
Ｔ 14：では，ノートに書いたのを読みましょう。
Ｃ：（問題文を読む）４種類の動物が，…
Ｔ 15：何か先生に聞きたいことはありますか。
Ｃ：ありません。
Ｃ５：〇番目の中に入る数字はなんですか。
Ｃ６：同じです。
Ｔ 16：〇番目のここさえわかれば，何の動物か言えますか。
Ｃ：はい。
Ｔ 17：では，７番目は。
Ｃ７：きつねだと思います。
Ｃ：同じです。
Ｔ 18：どうして，きつねなんですか。
Ｃ７：こぶたが１番目で，次にたぬきが２番目っていう感じに行くと，
Ｔ 18：番号を書くか。こぶたが１でたぬきが２で
Ｃ７：きつねが３でねこが４で，そして，また繰り返されるので，こぶたが５で，たぬきが６できつねが７になります。
Ｃ：同じです。
Ｃ５：計算でやりました。
Ｔ 19：計算でやった。計算で出せるんだ。ちょっと待って，Ｃ７さんは今どうやって考えたの？
Ｃ：順番に考えた。
Ｔ 20：順番に考えていけば，まず，出てきそうですね。
Ｃ８：でも，大きい数だと順番でできないじゃん。
Ｔ 21：では，無理なことに挑戦してもらおうかな。この番号が（板書）50 番目の動物が何か調べる方法を考えましょう。
Ｔ 22：確認します。まず動物が何かを調べます。それから，調べる方法だから，どうやって調べたのか，そのやり方を他の人にも分かるように工夫してください。

では，自力解決に入りますが，何か困っている人いますか。

Ｃ：自力解決（６分）
Ｔ 23：はい，途中でもやめてください。

動物は何か答えは出ましたか。

Ｃ：はい。
Ｔ 24：実は答えがみんな一致しています。それが何かまず確認します。言えますか。さんはい，

Ｃ：たぬき

Ｔ25：何かというのは，（板書）たぬきですね。調べる方法をこの後確認していきますが，どんな方法をとったか簡単に説明できますか。

Ｃ５：式と図と説明です。

Ｔ26：式は何算になるの。

Ｃ５：わり算ですね。

Ｃ：同じです。

Ｔ27：Ｃ５さんと同じわり算を使った人はここに名前を張ってください。

（10名がネームプレートを張る）

Ｔ28：まだ名前のないＣ３さんは？

Ｃ３：きまりを見つけました。

Ｔ29：きまりを見つけてやった。

Ｔ30：Ｃ９さんは？

Ｃ９：かけ算です。

Ｔ31：式の中にかけ算を使った。

Ｔ32：これで全員だけどここに出ていない考え方でもやっている人いますか。

Ｃ：反応なし

Ｔ33：Ｃ１さんは？

Ｃ１：表でやりました。

Ｔ34：他に表を使った人は？Ｃ10さんは？

Ｃ10：表を使いました。

Ｔ35：Ｃ９さんもだよね。

Ｃ９：はい。

Ｔ36：Ｃ９さんは，表を使いながらかけ算を使った。Ｃ10さんは，表を使いながらわり算を使った。

Ｔ37：では，これから詳しく話を聞いていきますが，誰の話から聞きたいですか。

Ｃ：多数派

Ｔ38：では，多数派から行きましょう。多数派のＣ８さんお願いします。話が終わってから付け足しや，違うところがあったら話してください。

Ｃ８：（板書）50÷４＝12あまり２　答え　たぬき

あまりが２なので，こぶた，たぬきと続いているので，こぶたが１番目で，たぬきが２番目なので，１，２とくるとたぬきです。

Ｃ：同じです。

Ｃ：ちょっと違います。

Ｃ10：12あまりというのは，12周目の２番目ということなので，こぶた，たぬきとなって，たぬきになりました。

Ｃ６：式は同じなんですけど，ぼくと考え方が違って，50のなかで４の倍数を探して，50の中で一番大きい４の倍数が48なので，50－48をやって，

Ｃ１：あぁ，すげぇ

Ｔ39：いま，なんですごいっていった？

Ｃ１：求める数が50でその中の一番近い48をひいたら求められるといったので，わり算とひき算ではひき算のほうが簡単に求められると思ったからです。

T 40：Ｃ６さん続けてください。

Ｃ６：50 － 48 をやって，２が出て，この２というのは，こぶた１，たぬき２とかの２なので，こぶた１，たぬき２，きつね３，ねこ４なので２に当てはまるのはたぬきなので，答えはたぬきになりました。

Ｃ：ああ，（理解した声）

Ｃ：今までと一緒じゃん

Ｃ４：（板書）こ　た　き　ね

　　　　　　　１　２　３　４

　　　　　　　５　６　７　８

50 は偶数なので奇数では絶対割れないのでここは消して（こぶたときつね）

（板書）50 ÷ 2 ＝ 25，50 ÷ 4 ＝ 12 あまり２で，たぬきの方はわれたけど，ねこのほうはわれなかったので，たぬきになりました。

T 41：どお，Ｃ４さんに質問はないですか。

Ｃ：反応なし

T 42：じゃあ，先生，ここ（50 ÷ 2 ＝ 25）よく聞き取れなかったのでもう一回説明してくれる。

Ｃ４：ここ（板書の問題文を指して）に書いている通り，こぶた１，たぬき２，きつね３，ねこ４なので，まず，１と３が奇数だったので消して，たぬきは２番目なので 50 ÷ 2 ＝ 25 と番号÷２をして，

T 43：番号÷２をして，つまり，25 というのは何を意味しているの？

Ｃ４：25 は，えーと…　25 というのは，たぬきのところに 50 がくる 25 番目のところ。

T 44：どうゆうこと？Ｃ９さんも首をかしげているけど，

Ｃ：反応なし

T 45：じゃあ，ちょっと置いておこう。

T 46：じゃあ次，Ｃ 11 さん。

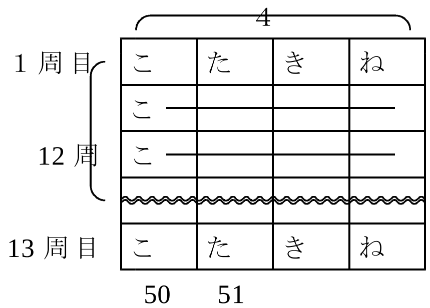
Ｃ 11：Ｃ 10 さんの書いている 12 周目の２番目じゃなくて 13 周目の２番でじゃないですか？ 12 で割り切れているので，12 周目は最後まで行っていて，その次の 13 周目が２番目で途切れているから，12 周目の２番目ではなくて 13 周目の２番目です。

T 47：13 周目の２番目ね。何，Ｃ 10 さん

Ｃ 10：ぼくが言いたいのは 12 周目の後の２番目ということです。

T 48：わり算の考え，もっとありますか。じゃあ，かけ算，Ｃ９さん。

Ｃ９：表を作成しながら説明



4 × 12 ＝ 48

50 － 48 ＝ 2

「こ」「た」「き」「ね」と４つ並んでいるのを４として，１週目，２週目と考えていきました。まず最初は，４の倍数を探して 48 までがここ（12 周目）までで，あと，残った

２は 13 周目のはじめから２をとればいいので，ここの 13 周目の２つ目が，たぬきなので 50 番目がたぬきとなります。

C：納得です。

T 49：C３さん，きまりは？

C３：ねこは４の倍数ずつ順番が増えていって，こぶたは４ずつ増えていって，たぬきも４ずつ増えていって，きつねも４ずつ増えていって，それぞれ 50 に近いものを考えて，50 になったのがたぬきです。

T 50：この考え（板書にある表を示す）と同じかな。

C３：はい。

T 51：C１さんの表は，どんな表かな。

C１：それ（C９の表）を横にした感じ。

T 52：それをここに作ってくれますか。

C１：表作成

こ	1	5	9	13	17	21	25
た	2	6	10	14	18	22	
き	3	7	11	15	19	23	
ね	4	8	12	16	20	24	

○番目÷種類＋あまり＝求める動物

T 53：今の場合は？

C１：５０番目÷４＋２＝14 だから，たぬきです。

T 54：え？今の分かる？

C：？？？？？？？

T 55：今のでいいの？

C６：その公式が成り立つ理由がいまひとつわかりません。

T 54：たまたま合ったんだ。

C：はい。

T　56：では，この表を見て，今までやってきたことと関連させて見た時に何か言えることありますか。

C：反応なし

T　57：じゃあ，この表は，ここで終わっているけど最後までやる必要があるのないの。

C：ない。

T 58：なんで？順番にやらないと分からないのではないの？

C６：順番に出すと時間がかかるから，今，25 まで出しているので，25 までで４ずつ増えていっているので，50 は 50 ÷４をして，12 あまり２なので，そのあまり２が，今の 25 だとねこまでいって，２ことということなので（教師が 26 を板書），２こだとたぬきまでということなので，たぬきになります。

T 59：３こだと

C６：きつね

T 60：４こ，あまりなしだと

C６：ねこ

T 61：C６さんがいったことは，いつでも言えるんですか？

C 12：別の数でも当てはまります。

T 62：この４種類の場合，いつでも言えることは？

C 12：あまりが１だったらこぶたで，あまりが２だったらたぬきで，３だったらきつねで，あまりが４だったらねこになります。

T 63：C 12 さんのいってること分かる？

C：はい。

C：あまりの数で決まる。

T 64：（板書）ここが，あまりが１の動物がくるんだよ。ここは，あまりが２の動物がくるんだよ。ここは，あまりが３の動物がくるんだよ。ここは，あまりなし，（４の倍数）ということだね。

T 65：こういうことを見ていけば，大きい数でも何番目の動物か分かるかな。

C：はい。

T 66：じゃあ，75 番目はなんですか。

C８：75 ÷ ４ ＝ 18 あまり３だから，きつね

T 67：100 番目はどうなる？

C：ねこ

C１：100 ÷ ４ ＝ 25 あまり０だから，ねこ

T 68：このようにあまりでなかま分けができるのですね。あまりでなかま分けと言ったら，何か思い出さない？

C５：あ，偶数と奇数です。

C：あぁ。（既習との関連から納得の声）

T 69：偶数と奇数のなかま分けだよね。そしたらさ，これなんだ？

C：カレンダー

T 70：これも同じに見られそう？

C：はい。

C：７の倍数

T 71：あまりが１だったら，

C：月曜で，あまりが２だったら火曜・・・・

T 72：はい，それを夏休み終わったらあと１時間詳しくやりましょう。

T 73：今日のまとめは，調べた結果どんなことがわかりましたか。

C８：あまり１だったらこぶたで，あまり２だったらたぬきで，あまりが３だったらきつねで，あまりがないとねこ。

C９：あまりの数でなかま分けすることができる。

C 13：４種類以外でも６種類とかでもなかま分けができる。

T 74：ではノートにまとめを書きましょう。時間ある人はふりかえりもお願いしまします。

C：各自ノートにまとめを記入

T 75：（板書）あまりによってなかま分けでき，動物が決まる。

T 76：ふりかえりは，家で書いてきてください。終わりましょう。

（２）授業後の振り返り

Ｃ１：自分のやり方の表がわかりやすいです。

Ｃ２：今日，私はわり算で考えたけど，Ｃ１さんやＣ９さんの表を使って考えるのもいいと思いました。あまりの数で仲間分けができることが分かりました。

Ｃ３：式で表したのが簡単だと思った。あまりの数で仲間分けができるのは便利だと思った。

Ｃ４：大勢の方々に見られながらの公開研はとても緊張しました。自分自身の意見を発表できてよかったです。

Ｃ５：カレンダーや他にも仲間分けができる。

Ｃ６：今日，動物あてゲームをやりました。一発で分かって説明したけど，考えてみたら式がちがったので，もっとこういう問題をやりたいです。

Ｃ７：あまりで仲間分けができるということが分かりました。

Ｃ８：これはまとめると数列という言葉になる。計算で出せる。表にするとわかりやすい。

Ｃ９：私はかけ算でやりましたが，他の意見でわり算がやりやすいと思いました。今度から活用してみたいです。

C 10：今日の勉強で知ったことは，あまりの数で何番目かが分かりました。もっと，いろいろな決まりを見つけていきたいと思いました。今日は◎です。

C 11：今日やった方法でやれば，どんなに大きな数でも調べることができると思った。

C 12：今日，何周めかが，12 周目じゃなく，13 周目だということが分かった。そこをしっかり考えて解きたいです。

C 13：今日はあまりで様々なことが分かりました。他の種類のもたくさん調べてみたいです。

未発言の子ども

C 14：あまりで答えがかわるということがすごいと思いました。

C 15：数が大きいと式や表を使うと求めやすい。偶数と奇数と同じ。

C 16：このての問題は附中入試問題にも出てくるので，しっかり解き方を覚えたいです。

３　考察

（１）相互理解（Ｓ２，Ｓ３）のコミュニケーション活動

子どもたちは，自力解決において，順序良く対応させる過程で表を作成したり，問題場面をわり算やかけ算の式に表し，解決に至った。

その後，相互理解（Ｓ２，Ｓ３）のコミュニケーション活動では，次の５つを取り上げ，その妥当性についての検討をおこなった。

①４で割る（包含除）としてとらえる。
②４の倍数としてとらえ，表で表す。
③順番に表に表す。
④言葉の式に一般化しようとする。
⑤Ｃ４の置き換え。

以下，プロトコルで詳細を示す。

①４で割る（包含除）としてとらえる。

50 ÷ 4 （10 名）

Ｃ８：(板書) 50 ÷ 4 ＝ 12 あまり２　答え　たぬき あまりが２なので，こぶた，たぬきと続いているので，こぶたが１番目で，たぬきが２番目なので，１，２とくるとたぬきです。
Ｃ：同じです。
Ｃ：ちょっと違います。
Ｃ 10：12 あまりというのは，12 周目の２番目ということなので，こぶた，たぬきとなって，たぬきになりました。
Ｃ６：式は同じなんですけど，ぼくと考え方が違って，50 のなかで４の倍数を探して，50 の中で一番大きい４の倍数が 48 なので，50 － 48 をやって，
（中略）
Ｔ 40：Ｃ６さん続けてください。
Ｃ６：50 － 48 をやって，２が出て，この２というのは，こぶた１，たぬき２とかの２なので，こぶた１，たぬき２，きつね３，ねこ４なので２に当てはまるのはたぬきなので，答えはたぬきになりました。
Ｃ：ああ。(理解した声)

10 人の子どもが上記のＣ８の包含除でこの問題をとらえている。

50 ÷ 4 ＝ 12 あまり２

しかし，Ｃ６のように「４の倍数をさがして」とあるようにわり算の逆算として

4 × 12 ＋ 2 ＝ 50

ととらえている様子もうかがえる。

こうしたことから，子どもは問題場面を 50 のまとまりを４つずつに分けるというわり算（包含除)の場面に置き換えて処理しているといえる。

②４の倍数としてとらえ，その様子を表で表す。

Ｃ９：表を作成しながら説明

4

1　周　目	こ	た	き	ね
12　周	こ			
	こ			
13　周　目	こ	た	き	ね
	50	51		

4　×　12　＝　48
50　－　48　＝　2

「こ」「た」「き」「ね」と４つ並んでいるのを４として，１周目，２周目と考えていきました。まず最初は，４の倍数を探して 48 までがここ（12 周目）までで，あと，残った２は 13 周目のはじめから２をとればいいので，ここの 13 周目の２つ目が，たぬきなので 50 番目がたぬきとなります。

Ｃ：納得です。

Ｃ９は「こ」「た」「き」「ね」と４つ並んでいるのを４のまとまりと見て，それがいくつあるか（何周するか）を考えている。

４ × 12 ＝ 48

そして，残りの数を

50 － 48 ＝ 2

はじめの動物から対応させていくつ目かで動物を決めている。

加えて，かけ算の構造である４がいくつかが明確に分かるように図表に表していることが，他のＣの「納得です」を引き出しているといえる。

ここでは，「こ」「た」「き」「ね」と４つ並んでいるのを４をひとまとまりと見て，それがいくつ分というかけ算の問題場面に置き換えて処理しているといえる。

③順番に表に表す。

T 51：C 1 さんの表は，どんな表かな。
C 1 ：それ（C 9 の表）を横にした感じ。
T 52：それをここに作ってくれますか。
C 1 ：表作成

こ	1	5	9	13	17	21	25
た	2	6	10	14	18	22	
き	3	7	11	15	19	23	
ね	4	8	12	16	20	24	

中略

T 57：じゃあ，この表は，ここで終わっているけど最後までやる必要があるの？ないの？
C ：ない。
T 58：なんで？順番にやらないと分からないのではないの？
C 6 ：順番に出すと時間がかかるから，今，25 まで出しているので，25 までで 4 ずつ増えていっているので，50 は 50 ÷ 4 をして，12 あまり 2 なので，そのあまり 2 が，今の 25 だとねこまでいって，2 ということなので（教師が 26 を板書），2 こだとたぬきまでということなので，たぬきになります。
T 59：3 こだと
C 6 ：きつね
T 60：4 こ，あまりなしだと
C 6 ：ねこ
T 61：C 6 さんがいったことは，いつでも言えるんですか？
C 12：別の数でも当てはまります。
T 62：この 4 種類の場合，いつでも言えることは？
C 12：あまりが 1 だったらこぶたで，あまりが 2 だったらたぬきで，3 だったらきつねで，あまりが 4 だったらねこになります。
T 63：C 12 さんのいってること分かる？
C ：はい。
C ：あまりの数で決まる。
T 64：（板書）ここが，あまりが 1 の動物がくるんだよ。ここは，あまりが 2 の動物がくるんだよ。ここは，あまりが 3 の動物がくるんだよ。ここは，あまりなし，（4 の倍数）ということだね。

順番に表に表すことにより，数字の並び方が明確になり，T 57，T 58 の発問がC 6 の発言を引き出し，あまりによって仲間分けできることが確認されている。

そして，T 61 〜T 64 のC 12 とのコミュニケーションから，あまりにより動物がきまることが学級として共有され，T 64 で板書とともに整理された。

ここでは，順番に表に表すことであまりによる仲間わけ（剰余類）として数字の横の並びを同じ仲間の集合として見ることができた。表による問題場面の置き換えが本時のねらいである整数の見方を引き出す有効な手立てとなっている。

④言葉の式に一般化しようとする。

Ｃ１：表作成

こ	1	5	9	13	17	21	25
た	2	6	10	14	18	22	
き	3	7	11	15	19	23	
ね	4	8	12	16	20	24	

〇番目÷種類＋あまり＝求める動物

Ｔ53：今の場合は？
Ｃ１：５０番目÷４＋２＝14だから，たぬきです。
Ｔ54：え？今の分かる？
Ｃ：？？？？？？？
Ｔ55：今のでいいの？
Ｃ６：その公式が成り立つ理由がいまひとつわかりません。
Ｔ54：たまたま合ったんだ。
Ｃ：はい。

Ｃ１は，50まで表に表し50番目がたぬきだと確認した後，50÷４＝12あまり２と筆算をノートに記入していた。はじめは「順序よく調べ」，その過程で数字の並びの構造に気付き50÷４＝12あまり２と筆算をしたと思われる。

しかし，相互理解では，プロトコルにあるように，更に言葉の式に一般化しようとするが，うまくまとまらず誤答になっている。

誤答ではあるが，言葉を使って一般化を試みる姿勢は数学的には評価できる。しかも，Ｔ54，Ｔ55，Ｃ６のプロトコルからも認知的不協和の状態にあったといえる。

もし，時間をかけてこのＣ１の一般化の考えの妥当性について，認知的不協和を連鎖的フィードバックにより検討・修正し，低減していたなら，次のようにまとめられていくことになろう。

〇番目÷種類＝商＋あまり　（求める動物はあまりによって決まる。）

求める動物：あまり１＝こぶた
　　　　　　あまり２＝たぬき
　　　　　　あまり３＝きつね
　　　　　　あまり４＝ねこ

ある問題場面をもとに数値が変化しても，その問題の構造をとらえた一般式や公式に表し，置き換えることは数学的にも重要なことである。そして，その過程が「知識の構造化」や「知識の再構成」（２章５節で定義）につながっていくものと考えられる。

⑤Ｃ４の置き換え。

Ｃ４：（板書）こ　た　き　ね
　　　　　　　１　２　３　４
　　　　　　　５　６　７　８
　　50は偶数なので奇数では絶対割れないのでここは消して（こぶたときつね）
　（板書）50 ÷ 2 = 25，50 ÷ 4 = 12 あまり２で，たぬきの方はわれたけど，
　　ねこのほうはわれなかったので，たぬきになりました。
Ｔ41：どお，Ｃ４さんに質問はないですか。
Ｃ：反応なし
Ｔ42：じゃあ，先生，ここ（50 ÷ 2 = 25）よく聞き取れなかったのでもう一回説明してくれる。
Ｃ４：ここ（板書の問題文を指して）に書いている通り，こぶた１，たぬき２，きつね３，ねこ４なので，まず，１と３が奇数だったので消して，たぬきは２番目なので50 ÷ 2 = 25と番号÷２をして，
Ｔ43：番号÷２をして，つまり，25というのは何を意味しているの？
Ｃ４：25は，えーと…　25というのは，たぬきのところに50がくる25番目のところ。
Ｔ44：どうゆうこと？Ｃ９さんも首をかしげているけど，
Ｃ：反応なし
Ｔ45：じゃあ，ちょっと置いておこう。

このＣ４の考えを生かし，修正して，本時のねらいに迫るためには時間が不足すると授業者が判断し，Ｔ45のとおり保留の形で検討が終わってしまった。しかし，ここで認知的不協和が起こっていた。

Ｃ４は，板書に書いているように順序良く数字を書いていく中で，次のことに気付いている。Ｃ４「50は偶数なので奇数では絶対割れないのでここは消して（こぶたときつね）」，言葉足らずなところがあるが，つまり，求める番号が奇数か偶数かによって動物が２つに絞られると主張しているのである。

奇数であれば１番目の「こぶた」か３番目の「きつね」であり，偶数であれば２番目の「たぬき」か４番目の「ねこ」になるというのである。

事実，50が偶数なので２番目の「たぬき」か４番目の「ねこ」になるというところまでは論理的に思考を進めている。そして，その後の処理の仕方として50 ÷ 2 = 25の式の意味を問われたところで詰まっている。

また，T44のＣ９をはじめ，子どもたちの中にも認知的不協和の状態が起こっていると考えられる。

Ｃ４はどのような置き換えで考えていたのか。それは，次の２通りに解釈できる。

１つ目は，ノートには，次のような記述が見られる。

　　　50 ÷ 2 =○ 25
　　　50 ÷ 4 =× 12 あまり 2

この記述から，奇数か偶数か判断した後に４で割り切れるかあまりが出るかで判断しようとしていたのではないかと考えられる。４で割り切れれば「ねこ」となり、４で割り切れなければ「たぬき」となる。「50 ÷ 2 =○ 25」の○は偶数であること，「50 ÷ 4 =× 12 あまり２」の×は４で割り切れないことを表しているとも解釈できる。

２つ目は，奇数か偶数か判断した後に更に奇数か偶数で判断しようとしていたのではないかと考えられる。Ｃ４「25は，えーと…　25というのは，たぬきのところに50がくる25

番目のところ。」の発話から，考えをうまく伝えられないでいる。しかし，Ｃ４は 50 が偶数のなかまの 25 番目にあたるということを言いたかったとも解釈できる。

つまり，50 は偶数であり２番目の「たぬき」か４番目の「ねこ」になる。そして，その偶数の 25 番目になる。その偶数の奇数番目は「たぬき」で偶数番目が「ねこ」になることから，25 番めは奇数番目にあたるので「たぬき」となる。

式で表現すると次のようになる。

50 ÷ ２ ＝ 25

25 ÷ ２ ＝ 12 あまり 1

したがって，保留にせず時間をかけてＣ４の話を聞き，妥当性の検討をおこなうことでコミュニケーション連鎖が起き，認知的不協和が解消され，Ｃ４の考えを共有できたのではないかと考える。そして，共有していく過程で新規の知識構造を確立していくことになるので「知識の再構成」につながっていくものと考えられる。

（２）認知的不協和とコミュニケーション連鎖

前項（１）では，認知的不協和とコミュニケーション連鎖による，「知識の構造化」や「知識の再構成」がおこなわれていく様相を子どもの姿として示すことができなかった。

しかし,認知的不協和によってコミュニケーションによる連鎖的フィードバックが起き，既存知識の内容が明確になっていく（以後「知識の明確化」と表すこととする。）様相をとらえることができたので以下に示す。

Ｃ８：（板書）50 ÷４＝ 12 あまり２　答え　たぬきあまりが２なので，こぶた，たぬきと続いているので，こぶたが１番目で，たぬきが２番目なので，１，２とくるとたぬきです。

Ｃ：同じです。

Ｃ：ちょっと違います。

Ｃ 10：12 あまりというのは，12 周目の２番目かということなので，こぶた，たぬきとなって，たぬきになりました。

（中略）

⋮

Ｃ 11：Ｃ 10 さんの書いている 12 周目の２番目じゃなくて 13 周目の２番でじゃないですか？ 12 で割り切れているので，12 周目は最後まで行っていて，その次の 13 周目が２番目で途切れているから，12 周目の２番目ではなくて 13 周目の２番目です。

Ｔ 47：13 周目の２番目ね。何，Ｃ 10 さん

Ｃ 10：ぼくが言いたいのは 12 周目の後の２番目ということです。

ここでは，図３の連鎖的フィードバックが作用している場面である。Ｃ８の発言を受け，Ｃ 10 の発言において微妙な違いをＣ８にフードバックしている。また，Ｃ 11 の発言は，Ｃ 10 の発言が終わり，次の話題に移った後の発言であることからするとＣ 11 の頭の中でＣ 10 の発言の後，認知的不協和が起こっていたことになる。そして，Ｃ 11 の発言によりＣ 10 へのフィードバックを行うことで認知的不協和の低減を図っている。そして，そのフィードバックを受け，Ｃ 10 が，「ぼくが言いたいのは…」と更にフィードバックを返している。

この一連の連鎖的フィードバックにより，問題と 50 ÷ 4 ＝ 12 あまり２の関係が明確になっていった場面である。

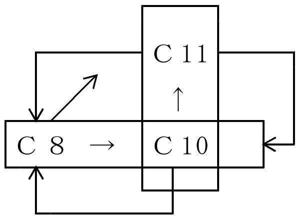


図３　連鎖的フィードバック

（３）未発言の子どもとコミュニケーション活動

表１の３名は，授業におけるコミュニケーション活動に直接の参加が見られなかった子どもである。３名とも自力解決では問題を解決している。授業後の振り返りでは，授業の中で話題となった剰余に関する内容や数学的な計算処理の仕方の振り返りの記述が見られる。

また，C 14 のノート記述には「C 10 と(考えが)同じ！」とあり，C 10 の発言に対するフィードバックとしてのノート記述と考えられる。

表１

子ども	解決の様子（ノート記述より抜粋）	第１時振り返り	第２時の振り返り
C 14	12 回まわると 48 番目まで行くので，あまりの２番目だけ調べれば答えがでると思う。 式　50 ÷ 4 ＝ 12 … 2 C 10 と同じ！	あまりで答えがかわるということがすごいと思いました。	いちいち数えるよりも，計算でやった方が早いということが分かりました。
C 15	計算を使う。50 ÷ 4 ＝ 12 … 2 ４のまとまりが 12 回繰り返されている。あまり②は，1 番目のこぶたから数えていくと，こぶた→たぬき→… 1　②	数が大きいと式や表を使うと求めやすい。 偶数と奇数と同じ。	あまりを使ってなかま分けができるのはおもしろい！
C 16	４種類が何回繰り返すかを出す。 （式）50 ÷ 4 ＝ 12 あまり 2 ４種類× 12 とあまり２番目だから，こぶたが１番目，たぬきが２番目。	このての問題は附中入試問題にも出てくるので，しっかり解き方を覚えたいです。	カレンダーの問題は，よく附中入試問題に出てくるので，覚えておきたいです。

更に，C 15 は，相互理解（S２，S３）の場面における直接的なコミュニケーションによる働きかけはなかったが，その様子をノートに《友達の考え》として次のような記述でまとめている。

《友達の考え》
　きまり・・・C３
　かけ算・・・C９
　表・・・C１・C 10・C９
　C 10　12 周目の２番目
　C６　4 の倍数を考えた
　　50 に近い・・・48
　　50 － 48 ＝２
　C９　表を使って，あまり２で２番目
　　４× 12 ＝ 48
　　50 － 48 ＝２
　C１　○番目÷種類＋あまり＝求める動物
　C 12　こぶた・・・あまり１
　　たぬき・・・　〃　２
　　きつね・・・　〃　３
　　ねこ　・・・　〃　０（４の倍数）

このC 15 の記述は，自力解決後の共有の内容について整理されたものであり，他の子どものコミュニケーションによる連鎖的フィードバックを受けて，C 15 が自分自身の思考を整理したものと言える。

このことから，コミュニケーションによる連鎖的フィードバックは，直接コミュニケーションに参加する中で連鎖し，置き換えの活動が活性化するだけではなく，それを聞いている未発言の子どもにもフィードバックされ，思考を促していると言える。

4　本実践の成果と課題

（１）成果

本実践では，共有プロセス（S２・S３）をもとに妥当性の検討をおこなうコミュニケーション活動を展開したことにより，次に示す５つの考え方を表出させることができた。

①４で割る（包含除）としてとらえる。

②４の倍数としてとらえ，その様子を表で表す。

③順番に表に表す。

④言葉の式に一般化しようとする。

⑤C４の置き換え。

いずれも，既習事項に置き換えて考え，問題解決を図っている姿である。

また，コミュニケーションにかかわることとして次の２点を示すことができた。

- ３節２項で示した認知的不協和を低減する連鎖的フィードバックにより知識の明確化がはかられる。

・３節３項で示したコミュニケーションによる連鎖的フィードバックは，直接コミュニケーションに参加する中で連鎖し，置き換えの活動が活性化するだけではなく，それを聞いている未発言の子どもにもフィードバックされ，思考を促している。

（２）課題

成果で示した④⑤の妥当性の検討では，認知的不協和が起こっていたが，連鎖的コミュニケーションによって低減する活動に展開するまでには至らなかった。もし，時間をかけてそれを取り上げていたならば，知識の構造化や知識の再構成がおこなわれていったと考えられる。

このことから，知識の構造化や知識の再構成が行われていくような認知的不協和は，子どもにとってかなりの抵抗のある問題でなければ，その状態にはならないことが指摘できる。また，その状態になったとしても，コミュニケーションによる連鎖的フィードバックによって低減する活動を成立させていくためには時間を確保しなければならない。

その活動を成立できる授業構成をして，子どもの置き換えの活動をとらえることが今後の課題として残された。

第４章　指導事例の実践と考察　（実践事例Ⅱ）

１　実践事例Ⅱについて

本実践は，平成 23 年 10 月３日に弘前大学教育学部附属小学校において，６年４組８名（１名欠席）を対象にした授業である。

この授業は，「意図的に認知的不協和をつくり，子どもが既習事項に置き換えて考える思考活動を促す。」ことをねらい実施した，

（１）単元名　比例と反比例　比例しているのは？（単元の導入場面）

（２）単元の目標

伴って変わる２つの数量の関係を考察することを通して，比例や反比例の関係について理解し，関数の考えを伸ばす。

（関心・意欲・態度）

・比例の関係に着目するよさに気づき，比例の関係を生活や学習に活用しようとする。

（数学的な考え方）

・比例の関係を表や式，グラフに表し，特徴を一般化してとらえ，身の回りから比例の関係にある２つの数量を見出して問題の解決に活用することができる。

（技能）

・比例や反比例の関係にある２つの数量の関係を式，表やグラフに表すことができる。

（知識・理解）

・比例や反比例の意味や性質，表やグラフの特徴について理解する。

（本時の目標）

伴って変わる２つの数量の関係を考察することを通して，比例や反比例の関係について根拠をもって示すことができる。

（３）本時の問題

次の１～４の２つの量が比例しているか，比例してないか答え，その証拠を示しなさい。

1　時速 60 ｋｍで走る自動車の走る時間と進む道のり
2　正方形の１辺の長さと正方形の面積
3　底辺が５ｃｍの平行四辺形の高さと面積
4　直方体の形の水そうに水を入れるとき，水を入れる時間と深さ

（４）授業の共有プロセス

	共有するときのてがかり	同意の内容	共有すること
導入 Ｓ１	a1 比例の定義 ２つの量が一方が２倍３倍… もう一方も２倍３倍…	ｒ １ 問題１～４について問題を読み比例するか比例しないか予想して自分の考えを挙手して示す。	ｓ １ 比例する，比例しないの意見が分かれている。 認知的不協
展開 Ｓ２	a2 ①言葉 ②表 ③数直線 ④図（面積・体積） ⑤式・計算により	r2 問題１は比例している。 問題２は比例していない。 問題３は比例している。 問題４は比例している。	s2 比例の定義を示した表現になっている根拠（なっていない根拠） 認知的不協
Ｓ３	a3 ①言葉 ②表 ③数直線 ④図（面積・体積） ⑤式・計算により	r31 ①～⑤で出された表現の共通性・相違点を確認する。 r32 ①～⑤で出された表現の長所・短所を確認する。	s3 比例の定義の表現がかわったもので，中身は同じ。 ①～⑤の関連性 認知的不協
整理 Ｓ４	a4 ①言葉 ②表 ③数直線 ④図（面積・体積） ⑤式・計算により	r4 他に比例している関係を探す。	s4 いろいろなものが比例関係にある。

・Ｓ１では，ｓ１（比例する，比例しないの意見が分かれている）を共有することで意図的に認知的不協和を起こすことができる。

・Ｓ２では，ｓ２（比例の定義を示した表現になっている根拠，なっていない根拠。）を共有する過程で示される妥当性の検討をおこなうことで，子どもがどんな既習事項に置き換えたかの違いにより，認知的不協和が起こる。

・Ｓ３では，ｓ３（比例の定義の表現がかわったもので，中身は同じ。①～⑤の関連性）を共有する過程で関連性の検討をおこなうことで比較検討の際に認知的不協和が起こる。

2　授業の実際

（１）授業のプロトコル

Ｔ１：ノートに問題を書きます。

Ｃ１：えっ，書くんですか？

Ｔ２：問題１番，「時速 60 ｋｍで走る自動車の走る時間と進む道のり」が比例しているかどうか。

Ｃ２：(ノートに記入)

Ｔ３：今日，７人しかいないので直感で比例していると思う人？

Ｃ３：全員挙手（７名）

Ｔ４：次，２番，少し間をあけてください。そこに，全員比例しているといっているから，比例している証拠を書いてもらいます。２番「正方形の１辺の長さと正方形の面積」

Ｃ４：(ノートに記入)

Ｔ５：直感で比例していると思う人？

Ｃ５：１人挙手

Ｔ６：比例していないと思う人？

Ｃ６：２人挙手

Ｃ７：えっ？

Ｃ８：わからない。

Ｃ９：一辺の長さと面積？

Ｃ 10：ちょっ，ちょっと待って。

Ｔ７：まだ判断がつかない？

Ｃ 11：(手をあげようかあげないか迷っている様子)

Ｔ８：後でちゃんと調べるから，今は直感だから，ぱっと思ったこと。

Ｃ 12：比例している。

Ｃ 13：比例している。

Ｃ 14：比例している。あっ，だめだ，俺，比例していない。

（比例している，比例していないの両方の声）

Ｔ９：じゃあ，もう１回聞き直します。比例していると思う人？

Ｃ 15：４人挙手

Ｔ 10：比例してないと思う人？

Ｃ 16：３人挙手

Ｔ 11：２番は意見が割れましたね。

Ｔ 12：３番，底辺が５ｃｍの

Ｃ 17：比例している。

Ｔ 13：Ｃ 17 さん，なんで？

Ｃ 18：問題はだいたいいつもそういう感じだから。

Ｔ 14：どんな感じさ？

Ｃ 19：Ｃ 17 さんが言いたいのは，最初比例しているんだったら，次は比例していない，その次は比例しているといいたいんだと思います。

Ｔ 15：ああ，順番に来ると。

Ｃ 17：比例していない。

Ｃ 21：ん？

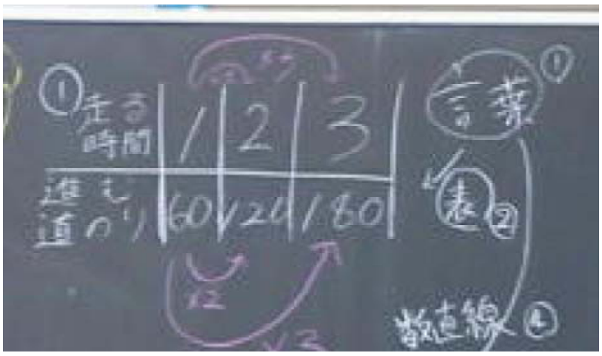
T 16：Ｃ 17 は，比例，比例，比例していない。
C 22：比例している，比例していない，比例していない。
C 23：〇，×，×ってこと。
T 17：〇，×，×と来そうだってこと。
T 18：３番の続き，「底辺が５ｃｍの平行四辺形の高さと面積」
C 24：（ノート記入）
T 19：どっちかに手を上げましょう。比例している。
C 25：５人挙手
T 20：比例していない。
C 26：２人挙手
T 21：最後，４番目。
C 27：次は比例している。
T 22：直方体の，直方体ってどんな形だっけ？
C 28：直方体って，正方形の立体。
C 29：えっ？それ，立方体じゃない？
C 30：長方形の立体。
T 23：それって，サイコロってこと？
C 31：それは，立方体。
T 24：サイコロじゃないティシュのような箱？
C 32：はい。
T 25：「直方体の形の水そうに水を入れるとき，水を入れる時間と深さ」
C 33：ここは簡単。
C 34：うん。
C 35：えっ？
T 26：簡単なんだ。じゃあ，比例している。
C 36：全員挙手。
T 27：全員。
T 28：今から時間をあげますから，証拠を示せるようにしましょう。

C ：自力解決

C 37：先生かえていいですか。
T 28：予想は予想，結果は結果でこうなりましたと言ってください。

T 29：じゃあ，みんなで考えましょう。（板書を指して）この予想に変更がある人？
C 38：３番が比例している方に入る。
T 30：はい，Ｃさんもね。
T 31：（板書の予想の下に変更を記入）
C 39：２番が×で比例していない。
C 40：私もです。
T 32：この人たちは（板書で示しながら）こっちに入る。
T 33：結果を確認すると（板書で示しながら）ここが，

C 41：（１番が）比例している。
T 34：（２番を指さして）
C 42：（２番が）比例していない。
T 35：（３番を指さして）
C 43：（３番が）比例している。
T 36：（４番を指さして）
C 44：（４番が）比例している。
T 37：ということだね。
C 45：（４番が）わかんない。
C 46：（４番が）まだやっていない。
T 38：わかりました。じゃあ，１番から３番までは，１番が比例していること，２番が比例していないこと，３番が比例していることを示してほしいと思います。
T 39：では，１番から。
C 47：まず，時速 60 ｋｍは，時速は１時間に走る速さなので，２時間だと 120 ｋｍ，３時間だと 180 ｋｍになっているので，どちらも２倍３倍と比例している。
C 48：いいと思います。
C 49：表にしました。
C 50：数直線にしました。
T 40：表，お願いします。
C 51：表を黒板に板書し，比例関係を示した。（下図）



T 41：なるほどね。C 52 さん言葉でもう一回言ってくれるかな。
C 52：時速 60 ｋｍは，時速は１時間に走る速さなので，２時間だと 120 ｋｍ，３時間だと 180 ｋｍになっているので，この問題は比例している。
T 42：C 52 さんは言葉で，C 51 さんは表で考えたということね。
T 43：C 51 さん，C 51 さんの書いた表を言葉でも言えますか？
C 51：書いていません。んーと，言葉では，えーと，走る時間と進む道のりを，んーと，走る時間を１時間，２時間と仮定して，それに合わせて進む道のりを表に書いて，えーと，走る時間が１時間から２時間と２倍すると進む道のりも 60 ｋｍから 120 ｋｍに２倍して，繰り返して３倍，４倍と繰り返して…
T 44：同じってこと？同じってことを先生が指さしますからC 52 さん言葉で言ってくれますか。C 51 さん黒板を見てて。
C 52：時速 60 ｋｍは，１時間に走る速さなので，２時間だと 120 ｋｍ，３時間だと 180 ｋｍになって，２倍，３倍と比例している。

T 45 : C 51 さんの言っていることもそういうことだよね。

C 51 :（うなずく）

T 46 : C 52 さんは，C 51 さんの書いているのを見て「表か」といったけど，C 52 さんのやり方は？

C 52 : 前に出てきて黒板に書き出そうとする。

T 47 : C 52 さんは，どんなやり方をしたと思う？

C 53 : 数直線。

T 48 :（C 52 さん）そう？

C 52 : うなずいて数直線を書き出す。（下図）

T 49 : 説明はいる？

C 53 : 分かる。

T 50 : 言葉で処理した人は，（人数を板書）

C 54 :（１人挙手）

T 51 : 表で処理した人（人数を板書）

C 55 :（２人挙手）

T 52 : 数直線で処理した人（人数を板書）

C 56 :（４人挙手）

T 53 : はい。分かりました。じゃあ，他の問題もみんなは，言葉とか，表とか，数直線で処理したということ？

C 57 : はい。

T 54 : 次は，２番。ちがうってことを示してほしい。

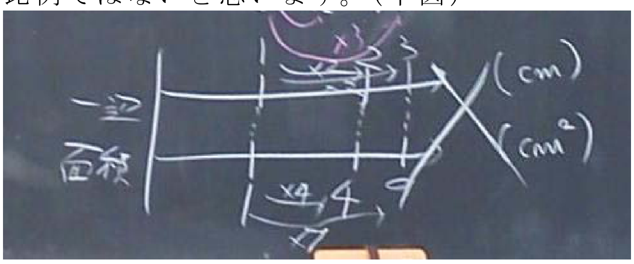
C 58 :（挙手）

T 55 : C 59 さん。

C 59 : はい。書いていいですか。

T 56 : どうぞ。この辺に（板書する場所を指定する。）

C 59 :（数直線を書き，説明をする。）１辺が１㎝の時，面積は１ｃ㎡になるわけで，２㎝になると４ｃ㎡になるわけです。ここがかける２倍の時こっちは，かける４倍なので，これは比例ではないと思います。（下図）



T 57：１個だけ調べるってのでいいの？

C 59：じゃあ，３もいっちゃいましょう。３だと，ここは９になってしまって，×９倍でここは×３倍で比例しているわけではない。（といって×をかく。）

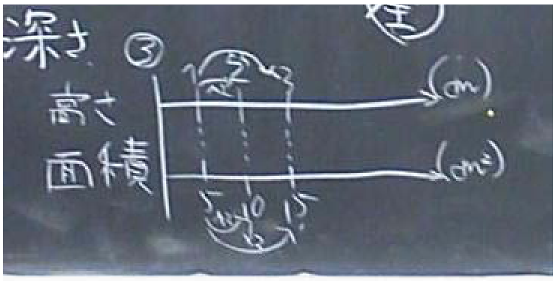
T 58：表も同じですか。

C 60：（複数）はい。

T 59：これは，比例の定義を満たしていないということで，比例していないことが分かりましたね。

T 60：では次，３番，C 61 さん。

C 61：（数直線を書いて説明）底辺が５ｃｍと決まっているので，高さが１㎝の時は５×１で５ｃ㎡になって，高さが２ｃｍのときには，５×２なので，10 ｃ㎡になって，こっちが２倍になるとこっちも２倍になっているので比例しています。（下図）

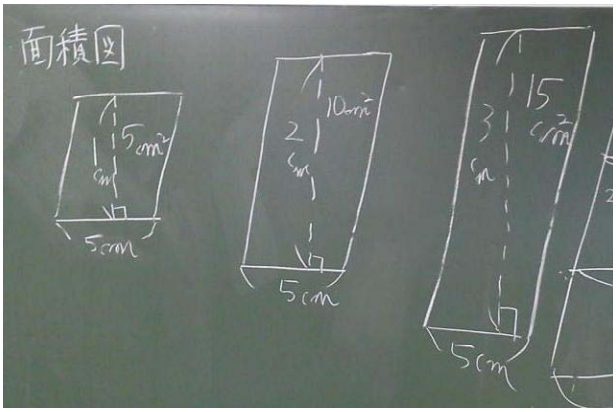


C 62：いいです。

C 63：先生，それ，図にしました。

T 61：図にしたの？じゃあ，それを紹介してください。おもしろそうだね。

C 63：（黒板に底辺５ｃｍ，高さ１ｃｍ，２ｃｍ，３ｃｍ平行四辺形を別々にかき）高さが２倍になると面積も２倍になって，高さが３倍にになると面積も３倍になっているので比例しています。（下図）



T 62：あのさ，今までと違って広さが分かるようにかいてくれているのがいいですね。せっかくだから，広さも比べられるように工夫できないかな？

C 64：えっ？

C 65：んっ？

（少し間があって）

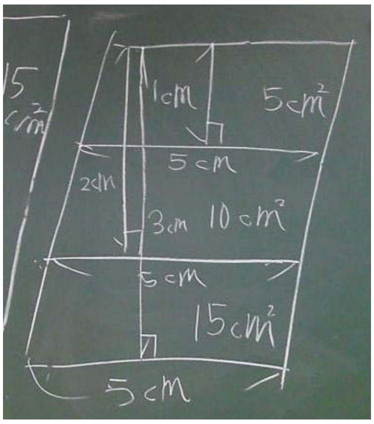
C 66：重ねるってこと？

T 63：C 66 さん，重ねるってどういうことか示してくれますか。

C 66：（黒板に図を書き始める。）

T 64：重ねるってわかる？
C 67：わかる。
C 68：？？？？
C 66：（重ねた図をかいている。）
C 69：あぁ，そうゆうことか。
C 70：（底辺を）重ねればいい。
T 65：C 66 さんがかいていること分かる？
C 71：分かる。
C 66：（指さしながら説明を始める。）まずこれ（高さ１ｃｍの平行四辺形）を（高さ２ｃｍの平行四辺形に）こう入れて，ここ（底辺が）が同じ５ｃｍで，高さ１ｃｍの時は５ｃ㎡で，高さ２ｃｍのときは，５×２で 10 ｃ㎡で，
C 72：長っが！
C 66：いいって。
T 66：（C 72 さん）いいこというね。先生も同じことを思いました。（図を示して）ここが１ｃｍで，これが２ｃｍっておかしくない？（明らかに２倍の関係になっていない。）（下図）

C 73：（同意の笑）
T 67：せっかく広さってものを表そうとしているのだから，そこちゃんとやって。
C 66：（図を消してかき直す。）
C 66：（かき直した図を示して）はい，こうなります。（下図）



T 68：今度は，直観で，パッと見て３つ分だとか２つ分だというのが分かりやすいですね。C 63 さんのさんの図は，そうゆうよさもありますね。
T 69：今日は３番まで，比例かそうでないか調べました。比例の調べ方について振り返りをお願いします。

C 74：振り返りをノートに記入

（1時間目の続きを翌日，約15分間行った。）

T 69：続きをやりましょう。4番をやりましょう。4番の問題は？

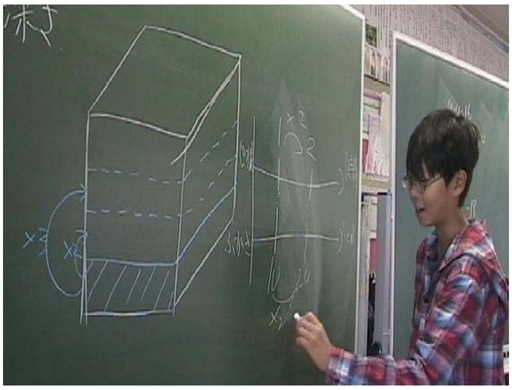
C 74：直方体の形をした水そうに水を入れるときの，水を入れる時間と水の深さ

T 70：C 75さん聞き取れた？（C 75は前時欠席している。）

C 75：水そうに水を入れる時間と深さ，水の量

T 71：この問題は（誰がやりますか）？

C 76：（直方体をかき）こういう形の水そうだったときに，もし，1時間分がこうだったとすると，次の1時間は，これと同じ分こういうふうにたまって，その次の1時間は，こういうふうにたまっていくので，この最初の1時間分が2倍，3倍になっているので比例しているといえます。



C 77：いいと思います。

C 78：分かりました。

T 72：はい，次どうぞ。

C 79：（数直線をかく。）例えば，ここが1時間だとするとここが 10 ｃｍたまるとします。これが2時間だと 20 ｃｍたまるわけですよ。ここが×２倍でこっちも×倍で比例しているというわけです。

T 73：これは，（1時間分として）10 ｃｍというところをつくるのがみそですね。みんな10 ｃｍにしたの？

C 80：30 ｃｍにした。

C 81：10時間で１ｃｍにした。

T 74：C 81さんは，10時間で１ｃｍにしたの。じゃあ，20時間で？

C 82：２ｃｍ

T 75：１時間では？

C 83：0.1 ｃｍ

T 76：そうだね。

T 77：ここ（１時間分の水の深さは）は，自分が考えやすい深さに設定している。ただ，この問題の条件として水が常に一定に入るってことをみなさんは疑わなかった？

C 84：はい。

C 85：疑いました，っていうか，算数的には一定と考えました。

T 78：でも，蛇口をひねったとき，じゃーっと出たり，ちょろちょろって出たりすることあるでしょう。

C 86：ある，ある。

C 87：だから，そういうのは関係なく考える。算数だから。

C 88：算数的に考えると比例している。

T 79：いつも一定に（水が）入ると考えるとこういうこと（比例している）が言える。ということだね。

（２）授業後の振り返り

Ｃ１：比例を調べるとき，数直線で調べたけど，図や表でも調べられることが分かりました。
Ｃ２：図で比例しているかしていないかを調べられることを発見しました。今日は◎です。
Ｃ３：比例は図や表で表すことができて，そっちの方が簡単だと思ったのですが，なぜか言葉でやってしまいました。今度は図や表でやってみたいです。
Ｃ４：今日は比例の勉強に入りました。表や数直線を使うとわかりやすいです。
Ｃ５：言葉や表や数直線などいろいろな表し方があったけど意味は同じでした。
Ｃ６：表を言葉で説明できるようにしたいです。
Ｃ７：比例の調べ方で納得できたのが「Ｃ２さん」と「Ｃ４さん」の意見が合わさってできた調べ方です。

３　考察

（１）意図的に起こした認知的不協和（Ｓ１，Ｓ２，Ｓ３）

①　Ｓ１の共有プロセス

文章で問題を示し，「比例しているか，比例していないか」の立場を表明させることにより，相反する意見の主張を顕在化させ，認知的不協和をつくった。

各問題における子ども７名の反応は表１のとおりであった。

表１

問題	比例している	比例していない	認知的不協和
1　時速 60 ｋｍで走る自動車の走る時間と進む道のり	7	0	無
2　正方形の１辺の長さと正方形の面積	4	3	有
3　底辺が５ｃｍの平行四辺形の高さと面積	5	2	有
4　直方体の形の水そうに水を入れるとき，水を入れる時間と深さ	7	0	無

問題１，問題４については全員予想が一致していて，問題２，問題３においては反応が分かれている。このことから，問題２，問題３については認知的不協和が子どもの間で起こっていることが明らかである。そこで，プロトコルをもとに詳細を示す。

②比例かどうか予想する場面

T５：(問題２が) 直感で比例していると思う人？
C５：１人挙手
T６：比例していないと思う人？
C６：２人挙手
C７：えっ？
C８：わからない。
C９：一辺の長さと面積？
C 10：ちょっ，ちょっと待って。
T７：まだ判断がつかない？
C 11：(手をあげようかあげないか迷っている様子)
T８：後でちゃんと調べるから，今は直感だから，ぱっと思ったこと。
C 12：比例している。
C 13：比例している。
C 14：比例している。あっ，だめだ，俺，比例していない。
（比例している，比例していないの両方の声）
T９：じゃあ，もう１回聞き直します。比例していると思う人？
C 15：４人挙手
T 10：比例してないと思う人？
C 16：３人挙手
T 11：２番は意見が割れましたね。

問題２「正方形の１辺の長さと正方形の面積」の関係が比例しているかどうか迷っている場面である。

Ｔ５，Ｔ６の発問に対して７名のうち３名が反応し，残り４名がどちらか迷っていることが確認できる。また，挙手による確認でも比例している４名，比例していない３名と判断が分かれていることからも，ここでは，認知的不協和が子どもの中に生起していることになる。この認知的不協和は，この後の自力解決と相互理解（Ｓ２，Ｓ３）のコミュニケーションで低減されていく。

（２）教師の意図的な発問による認知的不協和

①問題４の直方体の形状認識において

T 21：最後，４番目。
C 27：次は比例している。
T 22：直方体の，直方体ってどんな形だっけ？
C 28：直方体って，正方形の立体。
C 29：えっ？それ，立方体じゃない？
C 30：長方形の立体。
T 23：それって，サイコロってこと？
C 31：それは，立方体。
T 24：サイコロじゃないティシュのような箱？
C 32：はい。

本時のねらいには直接関係がないが，教師の意図的な発問（Ｔ 22）により認知的不協和をつくり出し，直方体の形状についてあいまいな認識がコミュニケーションによる連鎖連鎖的フィードバックを通して明確（知識の明確化）になっている。

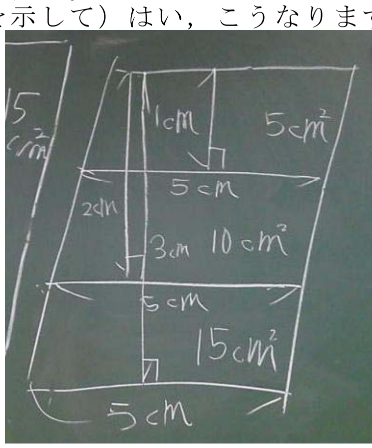
Ｔ 22 の発問に対してＣ 28 のあいまいな認識による返答が，Ｃ 29，Ｃ 30 の確認と修正の発言，更にＴ 23 による具体的な誰でも知っている物（サイコロ）への置き換えによって認知的不協和が強まり，Ｃ 31 の発言を引き出している。この一連のコミュニケーションによる連鎖的フィードバックにより，立方体の形状が明らかになっていく。そして，Ｔ 24 の発問で具体的な誰でも知っている物（ティシュ箱）への置き換えによって立方体と直方体の形状の明確な違いが示され，直方体の形状が明らかになっている。そして，その過程において認知的不協和が，連鎖的フィードバックを伴うコミュニケーションにより低減されている。

立体を構成する面の特徴（正方形や長方形）に置き換えて，立体を言い表そうとする姿や教師による誰でも知っている具体的なものへの置き換えによって認知的不協和を低減している。

②面積図の表現を工夫する場面

T　62：あのさ，今までと違って広さが分かるようにかいてくれているのがいいですね。せっかくだから，広さも比べられるように工夫できないかな？
C 64：えっ？
C 65：んっ？
（少し間があって）
C 66：重ねるってこと？
T 63：C 66 さん，重ねるってどういうことか示してくれますか。
C 66：(黒板に図を書き始める。)
T 64：重ねるってわかる？
C 67：わかる。
C 68：？？？？
C 66：(重ねた図をかいている。)
C 69：あぁ，そうゆうことか。
C 70：(底辺を）重ねればいい。
T 65：C 66 さんがかいていること分かる？
C 71：分かる。
C 66：(指さしながら説明を始める。) まずこれ（高さ１ｃｍの平行四辺形）を（高さ２ｃｍの平行四辺形に）こう入れて，ここ（底辺が）が同じ５ｃｍで，高さ１ｃｍの時は５ｃ㎡で，高さ２ｃｍのときは，５×２で 10 ｃ㎡で，
C 72：長っが！
C 66：いいって。
T 66：（C 72 さん）いいこというね。先生も同じことを思いました。(図を示して）ここが１ｃｍで，これが２ｃｍっておかしくない？（明らかに２倍の関係になっていない。)（下図）

C 73：(同意の笑)
T　67：せっかく広さってものを表そうとしているのだから，そこちゃんとやって。
C 66：(図を消してかき直す。)
C 66：(かき直した図を示して）はい，こうなります。(下図)



T　68：今度は，直感で，パッと見て３つ分だとか２つ分だというのが分かりやすいですね。C 63 さんのさんの図は，そうゆうよさもありますね。

C　62 により比例していることを高さが１ｃｍ，２ｃｍ，３ｃｍと横並びで別々の平

行四辺形の面積図に示された。それを受け，T 62 は，教師による意図的な認知的不協和を起こすための発問である。

広さも比べられるように工夫することにことに対してＣ 64，Ｃ 65 は，明らかに認知的不協和を表す反応である。Ｃ 66 の発言をＴ 63 により，全体に広げている。

Ｃ 66 が黒板に図をかいて示していく過程でＣ 67，Ｃ 69，Ｃ 70，Ｃ 71 の反応から認知的不協和が徐々に低減していっていることが確認できる。

かいた図の説明時には，Ｃ 72 が感じた図に対する認知的不協和の感情が「長っが！」の言葉となり表出し，それに対するフィードバックのコミュニケーションＣ 66「いいって。」があり，そのやり取りをＴ 66，Ｔ 67 によって全体にその認知的不協和が投げかけられている。そのことが，Ｃ 66 にフィードバックされることにより，図のかき直しの行動に表れ，最終的にみんなが納得する面積図となっている。

このように，プロトコルから認知的不協和の場面を示した。（１）からは「比例するか」「比例しないか」を判断する場面を意図的につくり，自分の立場を挙手により明確にさせることによって，判断に相違が出るように問題提示をした。それが子どもにとって認知的不協和となり，そのことを明らかにしたいという学習の動機づけにつながって行った。また，（２）からは授業者Ｔによる意図的な発問により，認知的不協和をつくり出した。連鎖的フィードバックを伴うコミュニケーションをおこない共有する過程で知識の明確化につながっているといえる。

４　数学的な考え方の共有

相互理解（Ｓ２，Ｓ３）では，子どもたちの置き換えの考えについて，妥当性の検討と関連性の検討をおこなった。プロトコルでその詳細を示す。

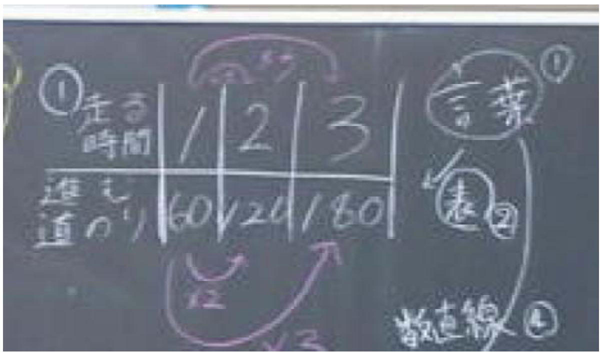
（１）比例関係の定義に沿った「言葉」による説明

Ｔ 39：では，１番から。 Ｃ 47：まず，時速 60 ｋｍは，時速は１時間に走る速さなので，２時間だと 120 ｋｍ，３時間だと 180 ｋｍになっているので，どちらも２倍３倍と比例している。 Ｃ 48：いいと思います。

Ｃ 47 は，比例の定義である「２量間において，一方の量が２倍，３倍，４倍，・・・になると，もう一方の量も伴って２倍，３倍，４倍，・・・になるとき，２量間が比例する。」を用いて，時速 60 ｋｍで進む自動車の時間と進む道のりが比例関係であることを言葉で説明している。Ｃ 47 は，定義の言葉にあてはめて（置き換えて）比例していることを主張しているのである。

（２）「表」に置き換えて表す

C 49：表にしました。
C 50：数直線にしました。
T 40：表，お願いします。
C 51：表を黒板に板書し，比例関係を示した。（下図）



T 41：なるほどね。C 52 さん言葉でもう一回言ってくれるかな。

C 51 が黒板に表ををかいて赤いチョークでそれぞれ 2 倍，3 倍になることを示した。言葉の説明はなかったが，子どもは視覚で納得しているようだった。確認の意味を込めて直前に扱った言葉による説明と関連させることをねらってC 52 に発言を促した。

表による表記は，見てすぐわかり，言葉を使って文章で表すより簡潔に表すことができるため，教科書では表を比例関係を確かめる方法として取り入れているものと考えられる。

（３）「数直線」に置き換えて表す

T 47：C 52 さんは，どんなやり方をしたと思う？
C 53：数直線。
T 48：（C 52 さん）そう？
C 52：うなずいて数直線を書き出す。（下図）

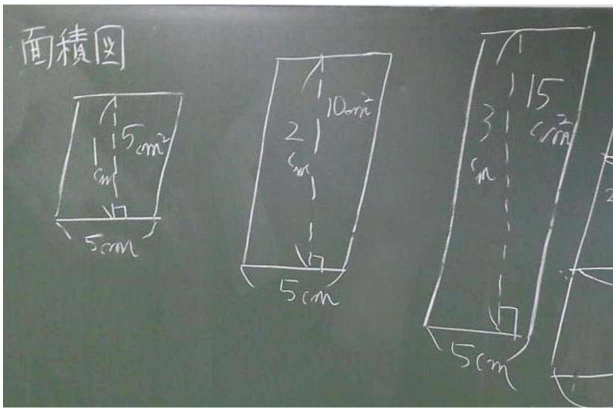
T 49：説明はいる？
C 53：分かる。

C 52 は，数直線を使って時速 60 ｋｍで進む自動車の走る時間と進む道のりの比例関係を示している。子どもたちは，それまでの学習において，特に，分数のかけ算やわり算の学習では，この数直線を使って問題の構造を把握したり，計算処理では，比例関係をもとに演算決定したりしていることが既習事項にある。そのことによる反応が，C 53 の発話が示している。

数直線は子どもたちにとって身近な置き換えであり，表と同様に数量関係を簡潔に表しているといえる。また，数直線は数量関係を線の長さで表すことで量感を伴った表現となる。

（４）面積（体積)「図」に置き換えて表す

C 63：先生，それ，図にしました。
T 61：図にしたの？じゃあ，それを紹介してください。おもしろそうだね。
C 63：(黒板に底辺５ｃｍ，高さ１ｃｍ，２ｃｍ，３ｃｍ平行四辺形を別々にかき）高さが２倍になると面積も２倍になって，高さが３倍ににになると面積も３倍になっているので比例しています。(下図)



T 62：あのさ，今までと違って広さが分かるようにかいてくれているのがいいですね。せっかくだから，広さも比べられるように工夫できないかな？

C 63 は，黒板にかいた面積図を使って，高さが２倍，３倍になると，面積も２倍，３倍になることを示している。平行四辺形の面積と高さの関係を見るのだから，図に置き換えて考えるのは当然である。面積図で示すことで高さと面積が比例していることが量感を伴って理解することができる。

加えて，長さが同じ底辺を重ねて示すことでより比例関係が明確になるため，T 62 の意図的な発問により，面積図のかき方について，連鎖的フィードバックの伴ったコミュニケーション（３節２項②）が続いていく。

5　授業後の振り返りから

授業後，子どもたちは次のような振り返りをしている。

Ｃ１：比例を調べるとき，数直線で調べたけど，図や表でも調べられることが分かりました。
Ｃ２：図で比例しているかしていないかを調べられることを発見しました。今日は◎です。
Ｃ３：比例は図や表で表すことができて,そっちの方が簡単だと思ったのですが,なぜか言葉でやってしまいました。今度は図や表でやってみたいです。
Ｃ４：今日は比例の勉強に入りました。表や数直線を使うとわかりやすいです。
Ｃ５：言葉や表や数直線などいろいろな表し方があったけど意味は同じでした。
Ｃ６：表を言葉で説明できるようにしたいです。

Ｃ７：比例の調べ方で納得できたのが「Ｃ２さん」と「Ｃ４さん」の意見が合わさってできた調べ方です。

子どもたちがそれぞれの置き換えの考えについて理解するとともに，その関連性（Ｃ１，Ｃ６）や簡潔性（Ｃ３，Ｃ４）に触れた記述が見られる。そして，その考えを統合してみているのが，Ｃ５，Ｃ７である。

この授業後の振り返りから，子どもは，自力解決で各自の置き換えの考えにより，解決したものを相互理解の連鎖的フィードバックを伴うコミュニケーションによって，既存の知識を並べ替えたり，関連付けたりしながら，統合した見方で既存の知識を書き換えている。つまり，知識を再構成しているといえる。

このことから，共有プロセスＳ１に意図的に認知的不協和を起こしたことは，問題解決の動機づけにつながり，また，共有プロセスＳ２，Ｓ３において４節で示した４つの置き換えの考えにつながっていったと考えられる。また，教師の発問により意図的に認知的不協和を起こしたこともその要因といえる。

6　本実践の成果と課題

（１）成果

本実践では，共有プロセスをもとに意図的に認知的不協和をつくり出すことによって子どもの問題解決への動機づけを図ることができた。子どもはその認知的不協和を低減するために既習事項に置き換えて解決している姿がみられた。

また，相互理解（Ｓ２，Ｓ３）のコミュニケーション活動では，妥当性の検討，教師の意図的な発問により，認知的不協和を起こし，子どもの思考活動を促した。

その結果，次の２点を示すことができた。

・４節に示した子どもの置き換えの考えを共有する様相
・知識の明確化につながる様相

そして，その過程で既存の知識の並べ替えや関連づけ，既存の知識の書き換えなど知識の再構成がおこなわれていることを授業後の振り返りをもとに示した。

これにより，意図的に認知的不協和をつくることが，子どもの既習事項に置き換えて考える思考活動を促しているといえる。

（２）課題

本実践では，実践事例Ｉの第３章３節１項④⑤で取り上げた認知的不協和の場面を低減するコミュニケーション活動が見られなかった。そこで見られる子どもの様相を考察することが今後の課題として残された。

第５章　指導事例の実践と考察　（実践事例Ⅲ）

１　実践事例Ⅲについて

本実践は，平成 23 年 12 月 6 日に弘前大学教育学部附属小学校において，６年４組８名を対象にした授業である。

この授業は，「自力解決後の相互理解の場において認知的不協和をつくり出す。」ことをねらい実施した，

（１）単元名　仕事算（トピック）

（２）本時の目標

既習の考えを活用して，線分図等に表し，問題を解決する能力を高める。

（関心・意欲・態度）

・全体量を１と見ることのよさに気付き，場面を図に表して問題を解決しようとしている。

（数学的な考え方）

・線分図をもとに，全体量と単位時間当たりの仕事量を割合の関係としてとらえ，説明している。

（３）本時の問題

問題１

ある道路をほそうするのに，Ａの機械では15日，Ｂの機械では10日かかります。Ａ，Ｂ両方の機械を同時に使うと，この道路をほそうするのに何日かかりますか。

問題２

Ｃの機械でこの道路をほそうするのに，12日かかります。Ａ，Ｂ，Ｃの３台の機械を同時に使うと，ほそうするのに何日かかりますか。

問題３

水そうに細い管で水を入れたら，12分でいっぱいになりました。太い管で水を入れたら，６分でいっぱいになりました。細い管と太い管を同時に使って水を入れたら，何分でいっぱいになりますか。

（４）授業の共有プロセス

	共有するときのてがかり	同意の内容	共有すること
導入 Ｓ１	a1 ある道路を舗装する Ａの機械 15 日 Ｂの機械 10 日 同時に使う	ｒ １ 問題１を読み，課題を明確にする。	ｓ １ 道路に長さが示されていない。
Ｓ２ 展開	a2 ①道路の長さを仮定して ②図を使って ③式・計算により処理	r2 道路の長さを計算処理しやすい長さに仮定すれば見つかる。（実際の長さとして公倍数，長さを１として等）	s2 どれも６日 認知的不協
Ｓ３	a3 公倍数以外の数値について 他の処理の仕方はないか	r31 どんな数値でも処理できる。 r32 作業効率から処理できる。	s3 やはり６日 認知的不協
Ｓ４	a4 機械を３台使った時の問題を調べる	r4 問題２を r2，r3 を活用して求める。	s4 Ｃの機械が１台増えても処理は同じ。
整理 Ｓ５	a5 場面を変えた問題，水槽に水を入れる場面を調べる。	r5 問題③を r2，r3 を適用して求める。	s5 場面が変わっても機械の問題と同じに処理できる。

・Ｓ２では，ｓ２（どれも６日）を共有する過程で妥当性の検討をおこなう。自力解決のできていない子どもに教師が発問により意図的にフィードバックすること，誤答の子どもの取り組みを修正すること，により認知的不協和をつくり出す。

・Ｓ３では，ｓ３（やはり６日）を共有する過程で関連性の検討をおこなう。子どもから示されない場合は教師の発問より，示唆することで比較検討の際に認知的不協和をつくり出す。

２　授業の実際

（１）授業のプロトコル

Ｔ１：今日は先生が準備した問題をやってもらいます。（問題文を黒板に張る）問題を読んでください。さんはい。

ＣＡ：（問題１を読む）

ある道路をほそうするのに，Ａの機械では15日，Ｂの機械では10日かかります。Ａ，Ｂ両方の機械を同時に使うと，この道路をほそうするのに何日かかりますか。

Ｔ２：意味が分からないところないですか。

Ｃ：ないです。（２名）

Ｔ３：どんなイメージですか。

Ｃ１①：ウイーンって長くて，何か，10日間かかるっていうからすごい長い道路。

Ｔ３：長い道路。何ｍか書いていないよ。

Ｃ１②：はい。イメージ的に長い道路。

Ｃ２①：何ｍ？

Ｔ４：何ｍか知りたい。

Ｃ１③：はい。

Ｃ３①：いらない。

Ｔ５：大丈夫，いらない？

Ｃ１④：あった方が計算しやすい。

Ｃ４①：えっ，いらないよ。

Ｃ１⑤：ないと何かわかりにくいもん。

Ｔ６：じゃあ，Ｃ１さん，困ったらこの道路，本当は何ｍか教えますから，それでいいですか。

Ｃ１⑥：はい。

Ｔ７：まず，自分の力で何とかできそうですか？

ＣＡ：はい。

Ｔ８：（プリントに印刷した問題文を配布）

ＣＡ：（ノートに問題を張り）自力解決に入る。

（自力解決）　７．５分

Ｔ９：まだできていない人もいますが，できた人？

Ｃ：（４人挙手）

Ｔ10：できた人は何日？

Ｃ：６日

Ｔ11：（Ｃ５）ここに，５日という人がいますよ。

Ｃ６①：私も５日で，同じです。

Ｔ12：５日の人が２人，Ｃ７さんは？

Ｃ７①：図にして，１日分にして考えて，・・・途中。

T13：6日の人（4人），5日の人（2人），まだ途中の人（2人）がいます。これから，みんなではっきりさせていきます。

T14：まず，C1さんから。じゃあ，さっき，C1さんが何て言ってたか覚えていますか。

C1⑦：道路の長さが分かれば簡単にできます。

T15：（板書）道路の長さが分かれば
C1さんは道路の長さを何mにしたの？

C1⑧：15m。

T16：15m？ 15km？

C1⑨：kmでもいいし，mでもどっちでも，数字が同じならどちらでもかまわない。

T17：数字を15にした理由は？

C1⑩：後でわかります。

T18：じゃあ，C1さんの話をよく聞きましょう。

C1⑪：道路の長さが 15 mだとすると，Aは1日1mほそうできて，Bは1日 1.5 mほそうできます。なので，同時に使うと，1日の合計が 2.5 mほそうできるので，だから 15 ÷ 2.5 をすると答えが出ます。15 じゃなくてもどちらも割り切れる数であれば，割り切れます。12 でもいいし，30 でもいいし，最小公倍数とかそういうのでもいい。

T19：分かる？

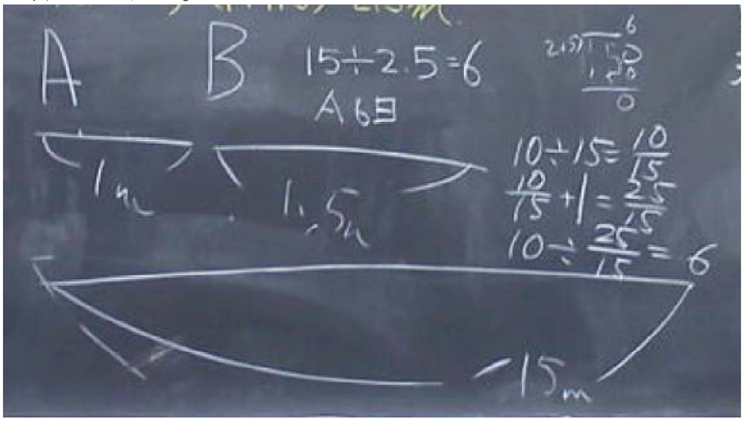
C：うなずいている子もいるが，無反応の子どもが多い。

T20：先生は聞いただけでは，よくわからないので，じゃあ，分かった人，教えてくれますか？

C：無反応

C1⑫：図に書けば分かる。

T21：（黒板に）書いてみて。



C1⑬：（黒板を使って図をかきながら,）たとえば，Aの機械が1日1m進んで，Bが1日 1.5 m進むことになって，もし，15 mだとしたら，で，これの長さが，

T22①：ちょっとストップ，ここまでいいですか。Aは1日1mでいい？

C：はい。

T22②：（C1がかいた図を示しながら）1mで 15 日やると 15 mになるね。

C：はい。

T22③：Bは，1.5 mで 10 日やると 15 mになりますね。

C：はい。

T 22④：それいいんだね。はい，そして，

C 1⑭：この長いの（線）が，もし，15 mだとしたら，1日に進められる距離は合計で2.5 mなので，15 ÷ 2.5をすると何日でできるか分かるので，15 ÷ 2.5を計算すると6になるので答えは6です。どうですか。

C A：いいと思います。

T 25：誰かもう一回この図を使って話してくれますか。C 7さんどう？

C 7②：はい。（黒板の前に出てくる）この長さを15 mとして，Aの機械で1日1 mできて，Bの機械で1日1.5 mできるので，これを合わせて2.5 mにして，15の道の長さ割る1日のできる数（長さ）をすれば何日かが出る。

T 26①：（板書）1日あたり（1+1.5）＝ 2.5 m　それで，

C 7③：この道の長さ（15 m）割る1日でできる数（2.5 m）をすれば，

T 26②：それを書いてくれる。

C 7④：（板書）15 ÷ 2.5 ＝ 6　A　6日

T 27：C 1さんの考えがよくわかりましたか？

C：はい。

T 28：じゃあ，さっき，C 1さんは道の長さはどうでもいいといってたけど，長くなれば日にちも多くなるんじゃないの？

C 1⑮：いや，でも，長くなればその分，

T 29：あっ，ちょっとストップ。C 8さん，C 1さんが何を言いたのかわかる？

C 8②：（道が）長くなれば，そのAの機械が15日でできるから，1日にできるmっていうか長さは，多くなるので変わらないと思います。

C 1⑯：はい，変わりません。

C 6②：ん？

C 2②：30（m）にしても，

C 1⑰：30（m）にしても，変わりません。

T 30：30（m）バージョンはどうなるの？

C 2③：30はまず，Aの機械は，1日当たり 30 ÷ 15 ＝ 2　2 m　になって，Bの機械だと 30 ÷ 10 ＝ 3　3 m　で，2つ合わせると1日あたり5 mになって，30 ÷ 5 ＝ 6　で6日　になる。

T 31：道路の長さは関係ないんだ。

C 11：はい。

C 2④：それは公倍数。

C 6③：あっ，そういうこと。

C 2⑤：60でもできる。

C 3②：15と10で割り切れる長さであればいい。

C 4②：仮定の話だから何mでもいい。

C 1⑱：はい。12でもいいし，でも，10だと15で割り切れないからできない。

T 32：C 1さんは，10だとできないって言ってるけど，本当にできないの？

C 4③：やってみればいい。

T 33：よし，じゃあ，やってみようか。（板書）10 mだとどうなる？

C 3③：10 ÷ 15って，

C 1⑲：できない。まず，6がたって，0.6666…

Ｃ３④：分数にする。

Ｃ４④：10/15

Ｔ 34：（板書）10 ÷ 15 ＝ 10/15，10 ÷ 10 ＝ 1　これを２つ合わせると

Ｃ：25/15

Ｔ 35：（板書）25/15 は，1 日あたり合わせてできるほそうの距離，次は？

Ｃ１⑳：25/15 ÷ 10，あっ違う，10 ÷ 25/15

Ｔ 36：（板書）10 ÷ 25/15 は 6 になるかな。10 × 15/25　約分は？

Ｃ２⑥：５で割って２と５，５と 10 で１と２

Ｃ：なる，なる。なった，なった。（数名の声）

Ｔ 37：（約分を板書で示す）で，６日，じゃあ，何でもいいんだ。

Ｃ４⑤：はい。

Ｃ３⑤：できるね。

Ｃ６④：８ｍでも７ｍでもできる。

Ｔ 38：８ｍでも７ｍでもできる，何ｍでもできるっていうことだよね。つまり，道路の長さを適当に決めてやれば，６日になるってことだよね。

ＣＡ：はい。

Ｃ６⑤：先生，私，（５日から）３日になりました。

Ｔ 39：こんどは，実際に長さが分からなくてもできたという人の話を聞かせてくれますか。

Ｃ１㉑：えっ？

Ｃ２⑦：（前に出てきて板書）1/15+1/10 ＝ 2/30+3/30 ＝ 5/30 ＝ 1/6 ＝ 6 日

Ｃ１㉒：何で 2/30+3/30 になるの？

Ｃ２⑧：まず，1/15 というのは，Ｘｍを A の機械では，１日で 1/15 やるということです。Ｂ はＸｍを 1/10 でやります。

Ｃ３⑥：１日でほそうする分，１こは 1/10 で・・・

Ｃ２⑨：Ｃ１さんのやり方を一般式にしただけであって,それを同時にやるということで,たすといい。

Ｔ 39：ということはこれ（分数）は割合ってことですか？

Ｃ１㉓：最初に出てくる分数は割合だけど，そっから，たして，

Ｃ２⑩：出した答えが 1/6 ということは，

Ｔ 40：1/6 ＝ 6 じゃないよね。

Ｃ２⑪：1/6 は２つでやると答えが 1/6 になるんですけど，1/6 というのは，Ｘｍを１日でやる長さがなので，それを何日でできるかにしたものです。

Ｔ 41：（板書）Ｘｍを１日でやる長さ

Ｃ１㉔：Ｘｍが何ｍであっても，それの 1/6 を１日でやるということは，６日でする。

Ｔ 42：1/6 を 6 回たすと 1 になるということですか？

Ｃ３⑦：全体を１として考えると 1/6 の長さ。

Ｃ４⑥：１ ÷ 1/6 ＝ 6 になる。

Ｔ 43：（板書）全体を１として考える。

Ｔ 44：全体はＸじゃないの？１として考えるの？

Ｃ４⑦：仕事が１だったら１日に 1/15 するということ。

Ｔ 45①：（板書された分数を示して）仕事が１だとしたら１日に 1/15 の仕事をしますよ。

仕事が１だとしたら１日に 1/10 の仕事をしますよということ。それを合わせると１日で２つの機械で 1/6 の仕事をしますよということ。

C：はい。（納得の声）

T 45 ②：そしたら，１にするには６倍すればいいから６日になりますよ。

C２⑫：（板書の修正を求める）先生そしたら，＝のところ×にして日を消して，答えが出る。

C３⑧：１÷ 1/6 でやればいいんじゃない？

T 46：全体を１と考えると，１の中に 1/6 が何個ありますかって考えると，６個ありますよってことになるね。

C１㉕：1/6 ×６＝１は確かめ算で使えるね。

T 47：ここまでは，６日で同じだったけど，今度は（答えが）３日と５日について考えます。C５さんの考えを教えてくれますか。

C５①：（黒板に式を板書）

15 ÷ 10 ＝ 1.5
1.5 ×２＝３
１×２＝２
２＋３＝５
25 ÷５＝５　　Ａ　５日

T 48：C５さんの式を読んでください。

C：わかんない。

T 49 ①：C５さん説明してくれますか。

C５②：15 ÷ 10 というのは，10 日かかるＢの機械が１日にする仕事の量です。

C１㉖Ａじゃないの？

C５③Ｂだよ。

T 49 ②：この 15 と 10 というのは，（問題文の数字を指して）これ？
これは，これで出てくるものはなんですか。

C４⑧：ＡはＢの何倍かというところだと思います。

T 50：ＡはＢの何倍かということだよね。つまり，Ｂをもとにして考えた時に，1.5 倍の日にちがかかりますよ。ということだよね。そして，1.5 × 2 というのは，C５さん。

C５④：1.5 といのは，小数だと（処理が）面倒くさいので，整数にするために×２をしました。１×２というのは，Ａのする仕事の量で，（Ｂに合わせて）×２をしました。

T 51：Ａを１と見たの？こっち（Ｂ）じゃなくて？

C４⑨：Ａのほうが 1.5 倍かかるから，

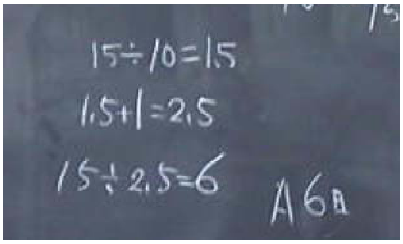
C５⑤：うーん，わかんなくなってきた。

T 52：みんなが６日で答えを出しているのだから，どっかを修正すれば５日ではなく６日になるんじゃないの？

C：（各自，思ったことをつぶやきながら，思考が停滞状態）

T 53：1.5 を２倍したから比例関係ということで１も２倍したってことだよね。２倍したものをたして（３＋２＝）５になりました。２倍したものがそのまま答えになったらおかしいんじゃないの？じゃあ，こっちは？

Ｃ５⑥：15＋10というのはＡとＢが全体的にした仕事の量で，それを５で割る。
Ｔ54：この５っていうのは，何の５ですか？
Ｃ５⑦：なんの５だ？３と２をたした５。
Ｃ８③：わかんないな。
Ｔ 55：これは，続きを直して解決できますか。または，これは，ここがおかしいと指摘できますか。
Ｃ１㉗：できれば一番いんだけど，わかんないからできない。
Ｃ：思考停滞
Ｔ56：答えがちがうはずだから，どっかがちがうはずだよね。
Ｃ：思考停滞
Ｔ57：この機械（Ｂ）から見たら，この機械（Ａ）は，1.5倍。速いの？遅いの？
Ｃ：遅い。
Ｔ58：作業効率は，こっち（Ａ）のほうが悪いんだよね。15日かかるんだから。
Ｃ５⑧：あっ，ミス（分か）った。その15÷10というのは，Ｂの機械の１日にする仕事の量で，１というのは15をもとにする量になるから，Ｂの機械がＡの機械に対して，なんていうんだろう。あっ，Ａの機械が１として考えているから，Ｂのきかいが Ａの機械よりはやい（性能がよい）から，Ａ÷Ｂをしたら Ｂの機械のはやさが出できて，Ｂの１日の量が1.5になって，Ａの１日の量が１になるから，その後に，15÷2.5をする。
Ｔ59：じゃあ,（式は）どうなればいい?
Ｃ５⑨：1.5×２＝３から下を消して，1.5＋１＝2.5になって，Ａの機械をもとにしているから，15÷2.5をやって，６になる。



Ｃ：出た。
Ｔ60：いいの？これで。もう一回。
Ｃ５⑩：Ａをもとにすると,（Ｂは）15÷10をやって，Ａの機械の１日のする仕事の量を求めて，それが，1.5で，
Ｔ61：（Ｂの機械が）1.5倍効率がいいと。
Ｃ５⑪：それで，Ａの機械をもとにしているから,（Ａは）１になって，1.5＋１をやって2.5になって，その後，Ａをもとにしているから,それを仕事量，15÷2.5＝６になる。
Ｔ62：何かおかしくない?いいの？たまたま合ったんじゃない?
Ｃ：大丈夫でしょう。
Ｔ63：式はＣ１さんのと同じだから，答えは６になるのは確かなんだけど,こっち（Ｃ１）の式とは意味が違うよね。これ15ｍとしたらということだったのでね。
Ｃ１：うん。確かに意味違う。
Ｃ２⑬：逆にして求めてみれば分かるかも。
Ｃ１：10÷15をして
Ｔ64：じゃあ，求めてみようか。10÷15をして（子どもが行ったことを板書していく。）

C ：10/15

C ：10/15+ 1 ＝ 25/15

C 10 ÷ 25/15 ＝ 6

T 65：これで，いいんですか？

C ：はい。

T 65：Ｃ５さんの考えを修正できましたね。

T 66：次はＣ６さん，どうぞ。

Ｃ６⑦：（前に出てきて図を板書）まず，２つとも最大公約数５で分けて，（Ａの方）３日は全体の 1/５で，Ｂは２日で 1/５で，合わせて５日になります。それで，一緒にやるので図に３日，２日，３日，２日，３日，２日とやったら，３日になりました。

T 67：15 日の中には５日が３つあるということだね。

Ｃ１：正確な図をかかないとよく分からなくね？

T 68：これを修正して６日になるようにできかすか？

Ｃ４⑩：２日で 1/５というのは，１日にするには，Ｂの機械だと５に分けて２日になっているので 10 に分けると１日の仕事になるので，1/５を１/15 にするには,更に３つに分けて，あれ？

～授業終了のチャイム～

Ｃ６の考えは，時間切れとなり，次時までの課題とした。しかし，翌日，Ｃ６の勘違いであったと本人からの申し出があり，他の子どもからも異論が出なかったので，誤答として処理した。

また，適用問題として②③の問題を扱い，本時の学習内容の定着を図った。

（２）授業後の振り返り

Ｃ１：自分の考えでできたので，このような問題は，自分のでも，友達のでもやりやすい方でやりたいです。

Ｃ２：この問題をやってみて，新しいとき方もわかったし，いろいろな人の意見が聞けたので良かったです。

Ｃ３：今日の学習は，分数にしたり，割合にしたりと，いろいろな解き方がありましたが，自分に合った解き方でやりたいと思いました。

Ｃ４：私にとって一番良いやり方は，Ｃ１さんとＣ２さんのやり方です。

Ｃ５：この問題は，Ｃ２のやり方が分かりやすいです。

Ｃ６：私は，Ｃ１さんの仮定するやり方が一番やりやすかったです。

Ｃ７：昨日まで「二人一緒にやると」という問題ができなかったけど，全体を１として考えるととても簡単でした。

Ｃ８：仕事量を求めるのは，何かを基準にしないといけないことが分かった。Ｃ２とＣ５の考えでやっていきたい。

３　考察

授業では，問題の１を提示し，実際の道路の長さが表示されていないことを確認したうえで自力解決に入った。

自力解決の結果，自分なりに解決できた子どもが６名，解決途中の子どもが２名であった。解決できた子どもの中で，答えが６日となった子どもが４名，答えが５日となった子どもが２名という実態であった。このような実態を子どもたちに示したことにより，認知的不協和がおきたことは明らかである。

それを受け，相互理解（Ｓ２，Ｓ３）に入った。相互理解では，子どもから出される解決方法について，妥当性の検討及び関連性の検討をおこなった。以下，相互理解の認知的不協和とコミュニケーションによる連鎖的フィードバックの様相をプロトコルから詳細を示す。

（１）３段階の知識の「構造化」

Ｔ 18：じゃあ，Ｃ１さんの話をよく聞きましょう。
Ｃ１⑪：道路の長さが 15 ｍだとすると，Ａは１日１ｍほそうできて，Ｂは１日 1.5 ｍほそうできます。なので，同時に使うと，１日の合計が 2.5 ｍほそうできるので，だから 15 ÷ 2.5 をすると答えが出ます。15 じゃなくてもどちらも割り切れる数であれば，割り切れます。12 でもいいし，30 でもいいし，最小公倍数とかそういうのでもいい。

Ｃ１は，道路の長さが分からないことから，道路の長さを 15 ｍと仮定して考え，Ａ，Ｂそれぞれの機械の１日あたりの舗装できる道のりを算出し，二つの機械を合わせて使った場合，15 ｍを１日あたりの仕事量（1.5+1）ｍで舗装すると考え，処理している。

Ｔ 28：じゃあ，さっき，Ｃ１さんは道の長さはどうでもいいといってたけど，長くなれば日にちも多くなるんじゃないの？
Ｃ１⑮：いや，でも，長くなればその分，
Ｔ 29：あっ，ちょっとストップ。Ｃ８さん，Ｃ１さんが何を言いたのかわかる？
Ｃ８②：（道が）長くなれば，そのＡの機械が 15 日でできるから，１日にできるｍっていうか長さは，多くなるので変わらないと思います。
Ｃ１⑯：はい，変わりません。
Ｃ６②：ん？
Ｃ２②：30（ｍ）にしても，
Ｃ１⑰：30（ｍ）にしても，変わりません。
Ｔ 30：30（ｍ）バージョンはどうなるの？
Ｃ２③：30 はまず，Ａの機械は，１日当たり 30 ÷ 15 ＝２　２ｍ　になって，Ｂの機械だと 30 ÷ 10 ＝３　３ｍ　で，２つ合わせると１日あたり５ｍになって，30 ÷ ５＝６　で６日　になる。

この考えを受け，Ｔ 28 の意図的な発問によって，Ｃ１は道路の長さが，関係ないと主張している。それに対して，Ｃ８は同意しているが，Ｃ６が，認知的不協和になっている。その認知的不協和を低減するための発言としてＣ２の 30 ｍに仮定しても同様の処理ができるという連鎖的フィードバックが返っている。

30 ｍの場合は，Ａの機械が１日あたり２ｍ，Ｂの機械が１日あたり３ｍになり，２つの機械の仕事量を合わせると（２+３）ｍとなる。２つの機械を合わせて使った場合，30 ｍを１日あたりの仕事量（２+３）ｍで舗装すると 30 ÷ ５ = ６となり，６日となることが示されている。

Ｃ１の 15 ｍに道路の長さを仮定したことからはじまり，Ｃ２により，30 ｍに仮定しても同様の結果を得ることが共有されている。

ここでは，道路の長さを 15 ｍと仮定して得られた結果をもとに，30 ｍと仮定して得られる結果も同じであることが関連づけが行われたことになり，最初の段階の知識の構造化が図られているといえる。

Ｔ 31：道路の長さは関係ないんだ。
Ｃ 11：はい。
Ｃ２④：それは公倍数。
Ｃ６③：あっ，そういうこと。
Ｃ２⑤：60 でもできる。
Ｃ３②：15 と 10 で割り切れる長さであればいい。

更にＴ 31 の発問により，仮定する長さが 10 と 15 の公倍数であればよいことも明らかとなっている。そして，認知的不協和であったＣ６②がＣ６③では，それを低減していることが確認できる。

そして，仮定する道路の長さが，15 からはじまり，30，60 と公倍数にとどまらず，公約数でもよいということまで連鎖的フィードバックを伴ったコミュニケーション活動により，進められている。

ここでは，第２段階の知識の構造化が図られたとみることができる。

Ｃ４②：仮定の話だから何ｍでもいい。
Ｃ１⑱：はい。12 でもいいし，でも，10 だと 15 で割り切れないからできない。
Ｔ 32：Ｃ１さんは，10 だとできないって言ってるけど，本当にできないの？
Ｃ４③：やってみればいい。
Ｔ 33：よし，じゃあ，やってみようか。（板書）10 ｍだとどうなる？
Ｃ３③：10 ÷ 15 って，
Ｃ１⑲：できない。まず，６がたって，0.6666 …
Ｃ３④：分数にする。
Ｃ４④：10/15
Ｔ 34：（板書）10 ÷ 15 ＝ 10/15，10 ÷ 10 ＝１　これを２つ合わせると
Ｃ ：25/15
Ｔ 35：（板書）25/15 は，１日当たり合わせてできるほそうの距離，次は？
Ｃ１⑳：25/15 ÷ 10，あっ違う，10 ÷ 25/15
Ｔ 36：（板書）10 ÷ 25/15 は６になるかな。10 × 15/25　約分は？
Ｃ２⑥：５で割って２と５，５と 10 で１と２
Ｃ：なる，なる。なった，なった。（数名の声）
Ｔ 37：（約分を板書で示す）で，６日，じゃあ，何でもいいんだ。
Ｃ４⑤：はい。

しかし，Ｃ１は，Ｃ１⑱・⑲の発言からわかるように公約数ならできるが，それ以外の数ではできないという認識をもっている。そこに，Ｃ４②・③「仮定の話だから何ｍでも

いい。」の発言がきっかけとなり，T 34 の発問時には，C１は，認知的不協和が起きていたので，それを低減するために積極的にコミュニケーションに参加している。C１⑱・⑲では，「できない」という自分の認識を主張する発言を繰り返している。

そこへ，C３④により割り切れなかったら，商を分数で表すというアイディアが持ち込まれ，これまでの考えを適用できる流れができた。しかも，計算結果も期待通り６となったことにより，ここでの認知的不協和が解消されるとともに，C４のC４②から始まる一連の発言C４③・④・⑤により，C４の主張である「仮定であれば何ｍでもいい。」というのが，確かなものとなっている。

ここでは，第３段階の知識の構造化が図られたとみることができる。

C３⑤：できるね。
C６④：８ｍでも７ｍでもできる。
T 38：８ｍでも７ｍでもできる，何ｍでもできるっていうことだよね。つまり，道路の長さを適当に決めてやれば，６日になるってことだよね。
CA：はい。

特定の数値 15 ｍから始まった数値が公倍数・公約数といった割り切れる数値に広がり，更には，わり算の商を分数表記することによってどんな数値であっても処理できるというところまでコミュニケーションによる連鎖的フィードバックを通して数値の拡張が行われている。

言い換えると，既存の知識の内容を変容させることなく，それぞれの知識間の関連づけを行いながら，３段階の知識の構造化が図られているといえる。

（２）あいまいな知識の「明確化」

T 39：こんどは，実際に長さが分からなくてもできたという人の話を聞かせてくれますか。
C１㉑：えっ？
C２⑦：（前に出てきて板書）1/15+1/10 ＝ 2/30+3/30 ＝ 5/30 ＝ 1/6 ＝ ６ 日
C１㉒：何で 2/30+3/30 になるの？
C２⑧：まず，1/15 というのは，ＸｍをＡの機械では，１日で 1/15 やるということです。ＢはＸｍを 1/10 でやります。
C３⑥：１日でほそうする分，１こは 1/10 で・・・
C２⑨：C１さんのやり方を一般式にしただけであって，それを同時にやるということで，たすといい。
T 39：ということはこれ（分数）は割合ってことですか？
C１㉓：最初に出てくる分数は割合だけど，そっから，たして，
C２⑩：出した答えが 1/6 ということは，
T 40：1/6 ＝６じゃないよね。
C２⑪：1/6 は２つでやると答えが 1/6 になるんですけど，1/6 というのは，Ｘｍを１日でやる長さがなので，それを何日でできるかにしたものです。
T 41：（板書）Ｘｍを１日でやる長さ
C１㉔：Ｘｍが何ｍであっても，それの 1/6 を１日でやるということは，６日でする。

C２は，実際の数値を変数Ｘで表し，C１の考えを一般式で表していると主張している。

しかし，Ｃ２⑦の板書時には 1/6 ＝６日と書き，思考が飛躍した表記となっている。Ｃ２の話をもとに忠実に式化すると次のようになる。

Ｘ÷ 15 ＝Ｘ/15　Ｘ÷ 10 ＝Ｘ/10

Ｘ/15 ＋Ｘ/10 ＝（2/30 ＋ 3/30）Ｘ＝ 1/6 Ｘ

Ｘ÷ 1/6 Ｘ＝６

しかし，この表記は小学校では扱われない内容であり，Ｃ２もこれをはっきりと認識しているのではないことが，Ｔ 40 とＣ２⑪のやり取りから考察できる。このＣ２のあいまいな考えを明確にしてくれたのが，Ｃ１㉔である。

Ｃ１は，先ほどまで認知的不協和の状態だったのある。この場面でのＣ１の様子は，Ｔ 39 の投げかけに実際の数値であればどんな数値でも求められるという認識のＣ１がＣ１㉑・㉒で認知的不協和になっていることが確認できる。そして，Ｃ１㉓・㉔と連鎖的フィードバックを伴ったコミュニケーション活動に積極的にかかわり，発話する中で認知的不協和を低減していることが分かる。

このようなコミュニケーションによる連鎖的フィードバックを受けＣ３，Ｃ４による全体を１と見る割合の見方に統合されていく。

Ｔ 42：1/6 を６回たすと１になるということですか？
Ｃ３⑦：全体を１として考えると 1/6 の長さ。
Ｃ４⑥：１÷ 1/6 ＝６になる。
Ｔ 43：（板書）全体を１として考える。
Ｔ 44：全体はＸじゃないの？１として考えるの？
Ｃ４⑦：仕事が１だったら１日に 1/15 するということ。
Ｔ 45 ①：（板書された分数を示して）仕事が１だとしたら１日に 1/15 の仕事をしますよ。仕事が１だとしたら１日に 1/10 の仕事をしますよということ。それを合わせると１日で２つの機械で 1/6 の仕事をしますよということ。
Ｃ：はい。（納得の声）
Ｔ 45 ②：そしたら，１にするには６倍すればいいから６日になりますよ。
Ｃ２⑫：（板書の修正を求める）先生そしたら，＝のところ×にして日を消して，答えが出る。
Ｃ３⑧：１÷ 1/6 でやればいいんじゃない？
Ｔ 46：全体を１と考えると，１の中に 1/6 が何個ありますかって考えると，６個ありますよってことになるね。
Ｃ１㉕：1/6 ×６＝１は確かめ算で使えるね。

Ｃ３⑦，Ｃ４⑦により，割合でみる見方が明確になり，その考えをＣ４⑥により，式化されている。このことを，Ｔ 45 ①・②で教師が整理することによって，Ｃ２もあいまいだった自分の認識が整理され，Ｃ２⑫の修正発言につながっている。

このことから，認知的不協和を低減するための連鎖的フィードバックを伴ったコミュニケーション活動により，あいまいだった認識が整理され，明確になった。つまり，知識の明確化が図られたといえる。

（３）誤答の修正による知識の「再構成」

Ｃ５は，自力解決で5日と答えを出している。その５日を出すための式がＣ５①である。式を見ただけではどのように考えたか分からない。そこで，Ｃ５自身に説明させることにした。

T　47：ここまでは，６日で同じだったけど，今度は（答えが）３日と５日について考えます。Ｃ５さんの考えを教えてくれますか。
Ｃ５①：(黒板に式を板書）
15 ÷ 10 ＝ 1.5
1.5 × ２ ＝ ３
１ × ２ ＝ ２
２ ＋ ３ ＝ ５
25 ÷ ５ ＝ ５　　Ａ　５日
T 48：Ｃ５さんの式を読んでください。
Ｃ：わかんない。
T 49①：Ｃ５さん説明してくれますか。
Ｃ５②：15 ÷ 10 というのは，10 日かかるＢの機械が 1 日にする仕事の量です。
Ｃ１㉖Ａじゃないの？
Ｃ５③Ｂだよ。
T 49②：この 15 と 10 というのは，(問題文の数字を指して）これ？
これは，これで出てくるものは何ですか。
Ｃ４⑧：ＡはＢの何倍かというところだと思います。
T　50：ＡはＢの何倍かということだよね。つまり，Ｂをもとにして考えた時に, 1.5 倍の日にちがかかりますよ。ということだよね。そして, 1.5 × 2 というのは，Ｃ５さん。
Ｃ５④：1.5 といのは，小数だと（処理が）面倒くさいので，整数にするために×２をしました。１×２というのは，Ａのする仕事の量で，（Ｂに合わせて）×２をしました。
T 51：Ａを１と見たの？こっち（Ｂ）じゃなくて？
Ｃ４⑨：Ａのほうが 1.5 倍かかるから，
Ｃ５⑤：うーん，わかんなくなってきた。

まず，Ｃ５②で認知的不協和が起きている。Ｃ５は，「15 ÷ 10 というのは，10 日かかるＢの機械が１日にする仕事の量です。」と発言しているが，言葉足らずでその真意が伝わっていない。その真意は「15 ÷ 10（＝ 1.5）というのは，10 日かかるＢの機械が（Ａの機械の 1 日の仕事量を基準１にしたときの）１日にする仕事の量です。」というものであるが，教師Ｔも含め，他の子どもＣ１，Ｃ４も 15 ÷ 10 を 10 日（Ｂの機械）を基準に 15 日（Ａの機械）を見ると 1.5 倍の日数という見方をしている。そのため，発言がかみ合わず，Ｃ５⑤では，Ｃ５自身も混乱している。

そして，その後もなかなか発言がかみ合わず，認知的不協和が継続していった。

T　52：みんなが６日で答えを出しているのだから，どっかを修正すれば５日ではなく６日になるんじゃないの？
C：（各自，思ったことをつぶやきながら，思考が停滞状態）
T　53：1.5 を２倍したから比例関係ということで１も２倍したってことだよね。２倍したものをたして（３＋２＝）５になりました。２倍したものがそのまま答えになったらおかしいんじゃないの？じゃあ，こっちは？
C５⑥：15 ＋ 10 というのはＡとＢが全体的にした仕事の量で，それを５で割る。
T 54：この５っていうのは，なんの５ですか？
C５⑦：なんの５だ？３と２をたした５。
C８③：わかんないな。

C５⑥の発言内容が，C５の考えを誤答の要因となっている。C５⑥で「ＡとＢが全体にした仕事量を 15 ＋ 10 としている」が，本当は，Ａの機械の仕事量を基準１と考え，その２倍を考えているのだから，15 ×２とし，それを５で割れば，正答の６を導き出すことができる。

つまり，次のように修正がなされればよかったのである。

15 ÷ 10 ＝ 1.5		15 ÷ 10 ＝ 1.5
1.5 ×２＝３		1.5 ×２＝３
１×２＝２		１×２＝２
２＋３＝５	修正 ⇨	２＋３＝５
25 ÷５＝５		<u>（15 ×２）</u>÷５＝６

しかし，C５④，T　53 で話題となっている処理しやすいように２倍していることもC５の考え方を難解にしている要因である。

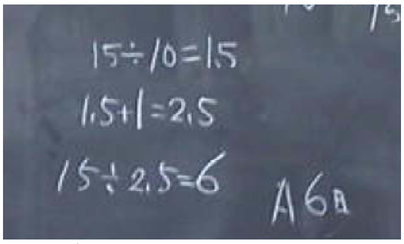
このような要因から，C５の考えがうまく伝わらず，更に，認知的不協和が続いたといえよう。

ところが，T　57，T　58 の機械の処理速度，作業効率の話が出ると，C５の様子が一変する。C５⑧の「あっ，ミス（分か）った。・・・」では，これまで自分の考えをうまく整理できず，更に，まわりのフィードバックによって混乱していた思考が整理され，知識の再構成がおこなわれた瞬間である。

この知識の再構成の瞬間は，教師を含めた学級集団による相互理解の場面によって，認知的不協和が低減，解消されることなく継続したことが起因すると考えられる。つまり，認知的不協和が継続することよって問題の重要性が増幅し，それに伴って子どもの思考も活性化していったものと考えられる。

もし，相互理解の場面で認知的不協和が継続しなければ，C５⑧の瞬間が生まれなかっただろうし，C５の解決方法はただ単に誤答として処理され，C５は，正答の子どもの解決方法を聞き，自己の納得できる考えに知識を更新すればよいのである。

T　57：この機械（B）から見たら，この機械（A）は，1.5 倍。速いの？遅いの？
　C：遅い。
T　58：作業効率は，こっち（A）のほうが悪いんだよね。15 日かかるんだから。
C５⑧：あっ，ミス（分か）った。その 15 ÷ 10 というのは，Bの機械の１日にする仕事の量で，１というのは 15 をもとにする量になるから，Bの機械がAの機械に対して，なんていうんだろう。あっ，Aの機械が１として考えているから，BのきかいがAの機械よりはやい（性能がよい）から，A÷BをしたらBの機械のはやさが出できて，Bの１日の量が 1.5 になって，Aの１日の量が１になるから，その後に，15 ÷ 2.5 をする。
T　59：じゃあ，（式は）どうなればいい?
C５⑨：1.5 ×２＝３から下を消して，1.5 ＋１＝ 2.5 になって，Aの機械をもとにしているから，15 ÷ 2.5 をやって，６になる。
C：出た。



T　60：いいの？これで。もう一回。
C５⑩：Aをもとにすると，（Bは）15 ÷ 10 をやって，Aの機械の１日のする仕事の量を求めて，それが，1.5 で，
T　61：（Bの機械が）1.5 倍効率がいいと。
C５⑪：それで，Aの機械をもとにしているから,（Aは）１になって，1.5 ＋１をやって 2.5 になって，その後，Aをもとにしているから,それを仕事量，15 ÷ 2.5 ＝６になる。

C５がC５⑧でようやく 15 ÷ 10 の商が作業日数ではなく作業効率であるという知識の再構成を行い，Aの機械の作業効率を基準１としたら，Bの機械の作業効率は，その 1.5 倍であることを求め，A とB両方の機械を同時に使うことは，Aの機械を 2.5 台使用したことになると考えていたことを構造化したのである。

そのことが，C５⑧・⑨とC５⑩・⑪の２回の説明で明らかになり，確かになっていった。

この考えを詳しく考察すると，機械の作業台数 a と作業日数 b が反比例 $b = 15/a$ の関係にあるということである。そのため，基準をAの機械にそろえ，その機械の台数が分かれば処理できることになる。

このC５の説明によって，その内容を共有し，認知的不協和の低減が図られているといえる。

ここが，第１の知識の再構成が行われた場面といえる。

T 62：何かおかしくない?いいの？たまたま合ったんじゃない? C：大丈夫でしょう。 T 63：式はＣ１さんのと同じだから，答えは6になるのは確かなんだけど, 　　こっち（Ｃ１）の式とは意味が違うよね。これ 15 mとしたらということだったのでね。 C１：うん。確かに意味違う。 C２⑬：逆にして求めてみれば分かるかも。 C１：10 ÷ 15 をして T 64：じゃあ，求めてみようか。10 ÷ 15 をして（児童が行ったことを板書していく。） C：10/15 C：10/15+１＝25/15 C 10 ÷ 25/15 ＝ 6 T 65：これで，いいんですか？ C：はい。 T 65：Ｃ５さんの考えを修正できましたね。

しかし，作業効率で考えるこの考えが本当に妥当な考えなのか，内容を共有できていない子どもも見られたので，もう少し時間をかけて丁寧に扱おうと思いＴ 62，Ｔ 63 では，意図的な発問による揺さ振りの働きかけをおこなった。

その結果，Ｃ２⑬の発言を引き出すことができた。Ｃ２は，基準を変えて考えても結論が変わらないと考えたのである。つまり，Ａではなく，Ｂの機械の作業効率を基準１として考えるというのである。式表示で確認していったが，言葉を添えて解説すると，次のようになるであろう。

「Ｂの機械の作業効率を基準１として考えると，Ａの機械の作業効率は，10 ÷ 15 ＝ 10/15 になって，Ａ，Ｂ両方の機械を同時に使うことは，Ｂの機械を 10/15+１＝ 25/15 台使うことになるので，10 日を 25/15 台で舗装すると 10 ÷ 25/15 ＝６になる」

この考えでも予想通りの６日となった。その結果，Ｃ５の考え方の妥当性が再確認された。

ここでは，新たな見方としてＡの機械からＢの機械へ基準を変えて比べる見方というアイディアにより，Ｃ５の考えの妥当性を検証しているので，第２の知識の再構成がおこなわれた場面といえよう。

このことから，相互理解の場では，誤答を見直し，修正する作業が，子どもの置き換えて考える姿を引き出し，既存の知識の再構成につながっていくといえる。

4　本時の数学的な考え方の考察

（１）自力解決の段階

自力解決終了時，８名中，自分なりに解決できた子どもが６名，解決途中が２名であった。解決できた子どもの内，正答の６日となった子どもが４名，誤答の５日となった子どもが２名であった。誤答の２名の内１名は，途中，５日から３日へ答えを修正している。そこで見られた数学的な考え方（置き換え）は表１の通り。

表１

正誤	数学的な考え方（置き換え）
（正答：６日） ４名	①道路の長さを 15 m とする。（Ｃ１）
	②１日の仕事量を割合にする。（Ｃ２，Ｃ３，Ｃ４）
（誤答：５日） ２名	③Ａを基準にした作業効率にする。（Ｃ５）
	④全体 1/5 の仕事をするのにＡは３日，Ｂは２日なので， 合わせて５日→修正 15 日÷５日＝３日（Ｃ６）
解決途中	（Ｃ７，Ｃ８）

（２）相互理解（Ｓ２，Ｓ３）の段階

自力解決終了時，①～③であった置き換えが，認知的不協和による，コミュニケーション活動により，置き換え①が置き換え⑤⑥⑦⑧へ知識が構造化されている。また，置き換え②が置き換え⑨に明確化されている。さらに，置き換え③が置き換え⑩⑪へ知識が再構成されている。（表２）

これらのことから，認知的不協和による，連鎖的フィードバックを伴ったコミュニケーション活動により，子どもの置き換えて考える活動が活性化しているといえる。

特に注目すべきは，認知的不協和を低減する連鎖的フィードバックを伴ったコミュニケーション活動により知識が明確化するだけでなく，既存の知識の並べ替えや関連づけといった知識の構造化や既存の知識の書き換えによる知識の再構成が創造的におこなわれていることである。

表２

数学的な考え方（置き換え）		数学的な考え方（置き換え）	知識の変容
①道路の長さを 15 m とする。		⑤道路の長さを 30 m，60 m とする。 ⑥道路の長さが公倍数であればよい。 ⑦道路の長さが公約数であればよい。 ⑧道路の長さがどんな長さでもよい。	構造化
②１日の仕事量を割合にする。	認知的不協和 と コミュニケーション活動	⑨全体を１とする。 Ａは，１日に全体の 1/15 の道路を舗装する。 Ｂは，１日に全体の 1/10 の道路を舗装する。 Ａ＋Ｂは，１日に全体の 1/6 の道路を舗装する。	明確化
③Ａを基準にした作業効率にする。		⑩Ａを基準に作業効率を算出する。 ⑪Ｂを基準に作業効率を算出する。	再構成

7　本実践の成果

本実践では，共有プロセスをもとに自力解決後の相互理解の場において妥当性と関連性の検討をおこなうことで認知的不協和をつくり出した。

その結果，そこでは，コミュニケーション活動が子どもの置き換えを活性化させ，自力解決では見られなかった置き換えを引き出し，創造的に解決が図られていった。その置き換えを整理すると次の３点に収斂される。

①内容が明確になり，知識の明確化が図られる。

②知識の並べ替えや関連づけによる知識の構造化がおこなわれる。

③既存の知識の書き換えによる知識の再構成がおこなわれる。

このことから，自力解決後の相互理解の場において認知的不協和をつくり出し、それを低減するコミュニケーション活動が子どもの思考活動を促し，数学的な考え方（置き換え）を育成するには有効であることが実証されたといえる。

終章　研究の結論

1　研究の結論

本研究は，算数授業において数学的な考え方を育てるためにコミュニケーション活動が有効であることを実証し，子どもの考える力を伸ばす指導法の改善の一端を担うことを目的とした。

実証するためには，事前に作成した共有プロセスをもとに認知的不協和を起こし，それを低減するためのコミュニケーション活動として妥当性や関連性の視点をもって検討する授業を構成し，授業実践をおこなった。その結果，次に示す結論を得ることができた。

算数授業において認知的不協和とそれを低減するコミュニケーション（教師と子ども，子ども同士の相互作用）活動をおこなうことは，子どもの置き換えて考える活動を活性化させ，したがって，数学的な考え方の育成につながる。
そのため，教師は算数授業において認知的不協和とそれを低減するコミュニケーション活動を仕組むための手だてを講じることが指導法として有効である。

認知的不協和とそれを低減するコミュニケーション活動からは，連鎖的フィードバックを伴ったコミュニケーションが生まれ，子どもの置き換えて考える姿が数多く見られた。そして，その考えを交流し，共有する活動（相互理解）を進めることで，子どもの既存の知識が次のように整理されていく。

①知識の明確化がおこなわれる。
②知識の構造化がおこなわれる。
③知識の再構成がおこなわれる。
④上の①～③が直接コミュニケーションに参加していない子どもにも促されていく。

そして，その際，教師の役目は認知的不協和とそれを低減するコミュニケーション活動を仕組むことであった。
そのための指導法として，次のような教師の働きかけが有効であると考えられる。

⑤共有プロセスをもとに認知的不協和を起こす。
⑥コミュニケーション活動の検討の視点（妥当性，関連性等）を明確にもつ。
⑦教材や問題提示を工夫して意図的に認知的不協和をつくり出す。
⑧自力解決後，子どもの現状（答えや解決方法，未解決の状況）を明確にし，相互理解のコミュニケーション活動を進める。
⑨子どもの思考を促す場面では，教師による意図的な発問を積極的におこなう。
⑩難解な解決方法や誤答で生じる認知的不協和を子どもの置き換えを引き出す機会ととらえ，指導に当たる。

２　今後の課題

本研究において，３つの実践事例をもとに数学的な考え方の育成には，コミュニケーション的観点による指導が重要であることを示すことができた。加えて，その指導法の一端を示唆することができた。

今後も研究を継続し，相互理解のコミュニケーション活動を通して研究の結論で示した子どもの置き換えを①～④に整理できるような実践を重ねていく。そのためには，事前の教材研究を深め，実際の指導場面では⑤～⑩の教師の働きかけに留意することである。特に，⑨⑩については，今後の研究課題として実践データの蓄積に努める。

そして，現職の小学校教員として数学的な考え方の育成をめざした指導法について新たな知見を探っていく。

謝辞

たくさんの方々のご支援とご協力により，本研究を論文としてまとめることができましたことをこの場を借りてご報告させていただき，ここに深い感謝の意を表します。

指導教官である中野博之先生には，本研究を進めるにあたり，実践研究においては終始小学校の子どもの実態や算数・数学科の系統性を踏まえた適切な助言をいただき，また，論文作成にあたっては，研究の進め方，論文の書き方，論証の進め方等，細部にわたり丁寧で具体的な指導をしていただきました。心よりお礼申し上げます。

太田伸也先生には，ゼミナール等の指導において，深い教材解釈の必要性と真実は子どもの姿にあるということを様々な場面で学ばせていただきました。心よりお礼申し上げます。

田中義久先生には，ゼミナールの指導において，研究者として身を挺する姿勢やその心構えを議論を通して学ばせていただきました。心よりお礼申し上げます。

院生のみなさんには,ゼミナールなどで参考になる意見をいただきました。また，院生室のホワイトボードで算数・数学の内容に関する議論を交わしたり，教員としての心構えや指導法について意見交換したことが思い出に残ります。ありがとうございました。

また，勤務校である弘前大学教育学部附属小学校の蝦名敦子校長はじめ上司，同僚の先生方に支えられ，１年目の理論研究，及び２年目の実践研究をおこなうことができました。深く感謝いたします。

最後に，この２年間を振り返ると,とても有意義な時間を過ごすことができました。学問において自分にとって興味関心のあることを好きなだけとことん追究できる楽しさと充実感を身をもって体験できたことがとても貴重な経験となりました。ここにこのような機会を与えてくれたすべてのみなさまに感謝いたします。

引用文献・参考文献

秋月康夫（1968）.「数学的な考え」.明治図書. ｐ8.

江森英世(1993).「数学の学習場面におけるコミニケーション･プロセスの分析」.日本数学教育学会誌数学教育学論究.Vol.59.

江森英世（2006）.「数学学習におけるコミュニケーション連鎖の研究」.風間書房

フェスティンガー／著　末永俊郎／監訳(1965).「認知的不協和の理論　社会心理学序説」.誠信書房. pp.9～18.

半田進（1995）.「考えさせる授業　算数・数学」.東京書籍.

伊藤説朗(1982).「第１章教材研究の意義　1-1算数科の目標と教材研究」.『授業に生きる教材研究』(全５巻)所収.明治図書.

片桐重男（1988）.「数学的な考え方の具体化」.明治図書.ｐ121.

片桐重男・桜井隆道・高橋栄治・大島富明編著（1971)「数学的な考え方とその指導［小学校編]」近代新書.

菊池兵一（1969)「数学的な考え方を伸ばす指導」北辰図書.ｐ25.

川口廷・中島健三編（1968）.「数学的な考え方と新しい算数」東洋館出版社. pp1～15

古藤怜・新潟算数教育研究会(1990).「算数科多様な考えの生かし方まとめ方」.東洋館出版社. pp.1～40.

古藤怜・新潟算数教育研究会(1998).「コミュニケーションで創る新しい算数学習―多様な考えの生かし方まとめ方」.東洋館出版社. pp.1～52.

熊谷光一(1989).「算数･数学の授業における共有プロセスに関する考察」. 日本数学教育学会誌.第71巻・臨時増刊.数学教育学論究. pp.3～24.

松原元一編（1971）.「思考の様相」.近代新書出版社.

松原元一（1983）.「数学教材の考え方教え方」.国土社.

松原元一（1987）.「考えさせる授業　算数・数学」.東京書籍.

松原元一(1990).「数学的見方考え方―子どもはどのように考えるか」. 国土社. p190.

文部科学省（2008）.「小学校学習指導要領解説　算数篇」.東洋館出版社.

文部科学省（2011）.「第1章　言語活動の充実に関する基本的な考え方 .『言語活動の充実に関する指導事例集【小学校版】』＜http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/gengo/1300857.htm＞.

文部省（1955）.「高等学校　学習指導要領　数学科編　昭和31年度改訂版」＜http://www.nier.go.jp/guideline/s31hm/index.htm＞.

文部省（1958）.「小学校　学習指導要領　昭和33年度版」＜http://www.nier.go.jp/guideline/s33e/chap2-3.htm＞.

文部省（1968)「小学校学習指導要領　昭和43年度版」＜http://www.nier.go.jp/guideline/s43e/chap2-3.htm＞.

文部省（1960）.「小学校算数指導書」.大日本図書.

長崎栄三・滝井章（2007）.『シリーズ 算数の力を育てる①「何のための算数教育か｣』.東洋館出版.

長崎栄三・滝井章（2007）.『シリーズ 算数の力を育てる②「よい算数の授業をつくる｣』.東洋館出版.

長崎栄三・滝井章（2007）．『シリーズ 算数の力を育てる③「算数の力　数学的な考えを乗り越えて」』．東洋館出版．pp.166～183
中島健三（1981）．「算数・数学教育と数学的な考え方」金子書房． p 82.
中島健三（1982）．「算数数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察」．金子書房.
日本数学教育会編（1969）．「数学的考えとその指導　高校編」．明治図書.
日本数学教育会編（1970）．「数学的考えとその指導　小学校編」．明治図書.
日本数学教育会編（1971）．「数学的考えとその指導　中学校編」．明治図書.
大蔵省印刷局（1958）．「小学校学習指導要領」．大蔵省印刷局.
桜井隆道・高橋栄治（1969）「数学的な考え方に関する研究（小学校）」『東京都立教育研究所紀要　第1号』． pp. 83～155.
桜井隆道・高橋栄治・大島富明（1971）「数学的な考え方に関する研究（中学校）」『東京都立教育研究所紀要　第8号』pp. 42～81.
島田茂（1977）．「算数･数学科のオープンエンドアプローチ：授業改善への新しい提案」．みずうみ書房.pp14～21
東京教育大学附属小学校初等教育研究会（1966）．「特集・数学的な考え方」．『教育研究』．5月号． 第21巻5号.