中学校数学科における
統合する活動を促す教材の開発
―「ラングレーの問題」を題材として―

弘前大学大学院　教育学研究科

教科教育専攻　　数学教育専修

11GP206　　澤頭　紀夫

中学校数学科における統合する活動を促す教材の開発

―「ラングレーの問題」を題材として―

論文要旨

初等幾何問題での補助線において，引いた本人にも説明されないものがある．そのような場合，問題を解いてそれが合っていればその補助線を覚えてしまうだけになる．なぜ補助線の意味がわからないのか．この疑問は，問題の背後にある本質的な構造が明らかになっていないことに起因すると思われる．このような扱いでは，生徒は幾何学への意欲を失ってしまう．そこで，問題が解けるかどうかといった一つだけの価値観で数学を考えずに，多様な価値観をもって数学を考えることが必要であると考える．例えば，上のような補助線の場合なら，補助線が引けて，それを覚えるだけにしないで，どうしてそこに引けたかや他にどのような問題ならよいのかを考えること自体に価値があるのではないだろうか．つまり，基の問題だけに限らず，他の似たような問題を考えて比べたり，それらの問題や解決方法の中にある共通性を見出そうとしたりすることに価値があると考える．そういったような価値観が増えていけば，多様な価値観があるので，多様な数学の楽しいところや数学の好きなところが見つかるはずである．

本研究で取り上げる「ラングレーの問題」も補助線を引くことによって角度が求まるが本質的な構造が明らかにならない問題である．筆者は，補助線の意味を考えることで問題の背後にある本質的な構造を明らかにすることが重要だと考える．そのために問題を解くことだけでなく，その過程に着目して，そこに楽しみを感じることができるようにしたい．本研究では，「ラングレーの問題」の補助線の意味に焦点をあて，問題の本質的な構造を明らかにし，統合する活動を促す教材を開発するとともに，この教材を用いた授業を行い，生徒の価値観の変容をとらえることで開発した教材の有効性を示すことを目的とする．

目次

目次

第２章　「ラングレーの問題」とその教材開発の方針

目次

目次

序章

本論文の概要

０．１　研究の目的

初等幾何問題での補助線において，引いた本人にも説明できないものがある．そのような場合，問題を解いてそれが合っていればその補助線を覚えてしまうだけになる．なぜ補助線の意味がわからないのか．この疑問は，問題の背後にある本質的な構造が明らかになっていないことに起因すると思われる．このような扱いでは，生徒は幾何学への意欲を失ってしまう．実際，国際数学・理科教育動向調査の 2011 年調査（Trends in International Mathematics and Science Study 2011：略称 TIMSS2011）によれば，わが国の生徒は，数学の問題の解決に関しては高水準の結果であるにもかかわらず，数学に対しての質問形式の結果では数学の勉強が楽しいとか，数学の勉強が好きであるということに肯定的な回答をする生徒は少ない．

そこで，問題が解けるかどうかといった一つだけの価値観で数学を考えずに，多様な価値観をもって数学を考えることが必要であると考える．例えば，上のような補助線の場合なら，補助線が引けて，それを覚えるだけにしないで，どうしてそこに引けたかや他にどのような問題ならよいのかを考えること自体に価値があるのではないだろうか．つまり，基の問題だけに限らず，他の似たような問題を考えて比べたり，それらの問題や解決方法の中にある共通性を見出そうとしたりすることに価値があると考える．そういったような価値観が増えていけば，多様な価値観があるので，多様な数学の楽しいところや数学の好きなところが見つかるはずである．

本研究で取り上げる「ラングレーの問題」も補助線を引くことによって角度が求まるが本質的な構造が明らかにならない問題である．筆者は，補助線の意味を考えることで問題の背後にある本質的な構造を明らかにすることが重要だと考える．そのために問題を解くことだけでなく，その過程に着目して，そこに楽しみを感じることができるようにしたい．

これまでの研究でも「ラングレーの問題」を一般化し，その本質的な構造を見つけようとしていたと解釈できる．例えば清宮俊雄（1968）は，「ラングレーの問題」について「整角四角形」を定義し一般化していた．これは「ラングレーの問題」の角度がどのような整数値であれば求めたい角度が整数値で求まるのかについて考察されていた．また斉藤浩（2009）は「４点角問題」を定義し，四角形を４点によって構成される図形ととらえていた．この見方により４点が凸四角形を形成する場合と，３点で形成される三角形の内部に１点がある場合を含め考察されていた．以上の先行研究の共通点は，解が求まるときの角度にはどのような関係があるのかを考えていることである．しかし，一般化しようとする際に，補助線の意味を考えることがきっかけになっていて，かつその補助線で判明する角度の関係に着目し統合していることが強調されていない．そこで本研究では，「ラングレーの問題」の補助線の意味に焦点をあて，問題の本質的な構造を明らかにし，統合する活動を促す教材を開発するとともに，この教材を用いた授業を行い，生徒の価値観をとらえることで開発した教材の有効性を示すことを目的とする．

０．２　研究の方法

上記の研究目的を達成するために，次のような方法をとる．

① 先行研究における学習指導の課題として特に価値観の単一化から，統合する活動に着目し，その教育的な価値を示すことである（第１章）．

② 統合する活動の教育的な価値に沿って，「ラングレーの問題」を考察する．そして，教材化の方針を示す．そのために，はじめに「ラングレーの問題」を示す．次に先行研究ではどのように一般化したのかを示す．そして本研究での教材化の方針を示す．それは補助線の意味に焦点をあてた一般化である．その際に補助線の意味を問題の本質的な構造として統合できる活動を考える（第２章）．

③ 開発した教材で促した統合する活動とその教育的な価値を実証的に考察する．そのため，補助線の本質への着目を志向した授業（一時間目の授業）と補助線を２円の中心線とし，△ABC を「∠B＝２∠C の三角形」として統合する活動を促す授業（二時間目の授業）を実践し，その指導と生徒の活動の実際を分析し，教材の有効性を示す．具体的には，統合する活動の促進に関する教材の有効性の量的な分析と質的な分析をする．これらの分析は，授業アンケート・授業者の観察記録・授業プロトコルを通して行う（第３章）．

０．３　本論文の構成

第１章第１節では，先行研究での「統合」を整理する．すると「統合」という観点に価値を置いた創造的な活動に教育的な価値があると述べられている．またその中で具体的な場面を通して示される「統合」を明らかにする．そして，どのような教育的な価値があるとされているのかを整理する．

第１章第２節では，現在の中学校数学科においての問題点を明らかにする．そのため，大規模調査の結果や現在の中学校数学科の目標から，わが国の生徒の実態や教育の目標を考慮して考察する．

第１章第３節は，第２節での中学校数学科の問題点を踏まえ，第１節の創造的な活動の中で本研究において重視する活動として，統合する活動を明確にする．

第２章第１節では，まず「ラングレーの問題」とその解法例を示す．そしてこの問題の解法について含まれる考えを整理する．その後，「ラングレーの問題」の価値を考察する．

第２章第２節では，「ラングレーの問題」の先行研究を整理する．「ラングレーの問題」についての先行研究では，どのような活動があったのかを整理することで，問題が解決された後に，数学者がどのような活動をしたのかがわかる．これによって，「ラングレーの問題」に対しての数学としてふさわしい活動が明らかになる．

第２章第３節では，「ラングレーの問題」の教材化の方針を示す．第２章第１節で，補助線の発見が非常に困難であることを示し，第２章第２節で見た数学としてふさわしい活動

によって，その困難な補助線に意味を発見できるようにする．そのように考えると，本研究での「ラングレーの問題」の教材化の方針を示されると考える．それは補助線の意味に焦点をあてた一般化である．その際に補助線の意味を問題の本質的な構造の一部として統合できる活動を考えることになった．

第３章第１節では，授業設計の概要を示す．具体的には，対象設定の理由と，授業の意図を明確にする．授業は二時間扱いとし，一時間目は，現れた補助線の正体を知ろうとする態度が促されることで，二時間目は，補助線を見直しこれを満たす図形をいろいろ考え，補助線の本質を発見し統合する活動がなされることを意図とする．

第３章第２節では，統合する活動を促す教材を使った授業を実践した際の授業プロトコルや，観察記録から，指導概要と生徒の活動の実際を示す．一時間目では，辺の長さを等しく移す指導，補助線の発見に関する指導に焦点あてた．二時間目では正三角形の作図から条件を基に修正する活動，角度を変更して図をつくり２円が現れた活動，２円の条件を整理する活動に焦点をあてる．

第３章第３節では，第２節を踏まえ，指導と生徒の活動の実際を分析し，教材の有効性を示す．具体的には，統合する活動の促進に関する教材の有効性の量的な分析と質的な分析をする．

第３章第４節では，生徒の実態から，教材の改善を示す．

第１章
統合する活動の教育的な価値

１．０　本章の意図と構成

本章の意図は，先行研究における「統合」の意味を明らかにした上で，中学校数学科において促すべき活動として，統合する活動を明確にし，その教育的な価値と重要性を明らかにすることである．

第１節では，先行研究での「統合」を整理する．そのため，具体的な場面を通して示される「統合」を明らかにする．すると，創造的な活動に価値があると述べられている．そしてどのような教育的な価値があるとされているのかを整理する．

第２節では，現在の中学校数学科においての問題点を明らかにする．そのため，大規模調査の結果や現在の中学校数学科の目標から，わが国の生徒の実態や教育の目標を考慮して考察する．

第３節は，第１節で整理した創造的な活動の中で，第２節での中学校数学科の問題点を踏まえ，本研究において重視する「統合」という観点に価値を置いた創造的な活動を明らかにする．これを本研究では，統合する活動とする．またこれによって，本研究で特に重視していく教育的な価値を示すことができると考える．

１．１　先行研究における統合する活動の意味

１．１．１　主要な「統合」

はじめに「統合」とは

二つ以上のものを一つに統べ合わせること．統一．（広辞苑，1993，p.1807）

である．日常的に使われており，数学特有な考えではない．この「統合」を算数・数学で重視していることを先行研究を基に整理する．つまり，本研究における統合する活動を明らかにするために，まずは先行研究ではどのようなものを「統合」と呼んでいるのかを整理する．

中島健三（1981）によれば，算数・数学教育の目標である「数学的な考え方」を考える観点として

① 人間が社会の一員として生活をするのに必要な知識や能力を育成すること
［実用的な目的］
② 人間がこれまでに創り上げた学問や文化を，（生活上の必要という立場だけでなく）それ自体，人間にとって価値のあるものとして，理解し鑑賞することができるようにすること
［文化教養的な目的］
③ 人間が本来そなえているべき，また，そなえることが望まれる諸能力を，可能な限り引き出し育てること
［陶冶的な目的］
④ 創造的な活動を実践し，体験させ，その過程を通して，文化の創造や問題解決の美しさや楽しさを認め，味わうことができるようにすること
［創造的実践の体得と鑑賞］―人間性を豊かにするための価値観の多様化―
（pp.24-29）

の４つを挙げていた．そしてこの中でも，④の観点が，算数・数学の教育においてより重点をおくべきだと述べられている．そして，算数・数学の教育の目標としてある「数学的な考え方」の育成は，算数・数学にふさわしい創造的な活動が自主的にできることを目指したものだと述べている．

そして創造的な活動の中で，一般に数学が抽象性，論理性，形式性を主要な特性としてもった学問であるとしながら，数学の創造を促した価値観として，「簡潔」，「明確」，「統合」を，数学の特性とのかかわりとともに挙げている．その中で「簡潔」とは，表現，

作業ならびに思考の上で，簡単にしようとする価値観であり，また「明確」は，論理的に正しく明らかにしようとする価値観であると述べられている．そして「統合」は，「簡潔」ともかかわりをもっていて，一般化や拡張をしたり，例外のないようにしたりしようとする価値観であるとし，算数・数学では特にかかわりが強いと述べている．またそのかかわりはひろくとらえることが重要であるとし，以下の図１．１のように，「簡潔」「明確」「統合」という三つの価値観が，数学の特性三つを支えているように考えられていた．

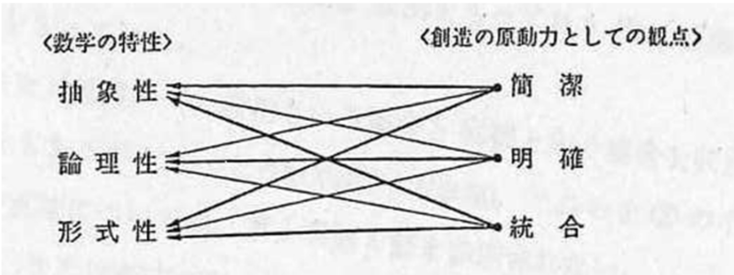


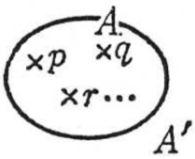
図１．１　数学の特性と創造の原動力としての観点（中島健三，1981，p.56）

ここまでを整理すると「統合」とは，算数・数学科の目標としての「数学的な考え方」の育成を算数・数学にふさわしい創造的な活動ができることであるとした際に，その創造的な活動をするために必要な精神的な支えである観点の一つだととらえられる．

そして中島健三（1981）は「統合」の主要な三つの場合を述べている．

まず一つ目は，「集合による統合」がある．図１．２では，×p，×ｑ，×ｒ，…という異なったものに対して，A という共通の観点によって一つにまとめ A′ に統合されたということがわかる．また，以下の例が示されている．

（a）　集合による統合――はじめは，異なったものとしてとらえられていたものについて，ある必要から共通の観点を見出して一つのものにまとめる場合である．これは図３．１（以下の図１．２のこと）でもわかるように，「集合の考え」によって新しく概念などをつくる場合とほぼ同じであって，いわば，狭い意味での統合にあたる．



[A という概念でまとめる]

図１．２　「集合による統合」（中島健三，1981，p.127）

たとえば，２，４，６，…などを「偶数」としてまとめる場合など，一つの概念でまとめる場合はみなこれにあたる．

＜単位＞

・２けたの数の計算

23＋45　　[10]と[1]

・帯分数の計算

$2\frac{3}{5}+4\frac{1}{5}$　　[1]と[$\frac{1}{5}$]

・時間の計算

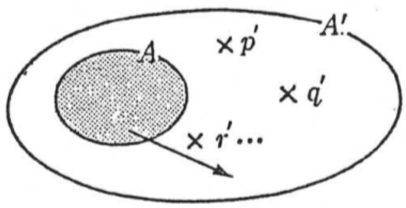
2 時間 30 分＋4 時間 10 分　　[時間]と[分]

しかし，上の例のように，はじめは，それぞれ異なった対象の計算と考えていたことを，「それぞれの単位どうしのたし算で処理できる」（単位相互の関係もはっきりしている）という共通点に目をつけて，同じ考え方の計算としてとらえるようなことも，これに含めてよい．（p.128）

このように「集合による統合」には，同じ考え方の計算が可能かどうかを観点にすることも含まれることがわかる．具体例での，単位相互の関係というのは，[10]と[1]の場合は，10 個で一つ分という関係である．それぞれの単位には一定の関係が成り立っており，かつ同じ考えの計算で処理できることから統合される．

二つ目に「拡張による統合」がある．これは 図１．３のように，A という×p，×ｑ，×ｒ，…という概念や形式から×p′，×ｑ′，×ｒ′，…というように，元の概念や形式を一般化したものも含め A′ に統合することだとわかる．

(b)　拡張による統合――はじめに考えた概念や形式が，もっと広い範囲（はじめの考えでは含められない範囲のものまで）に適用できるようにするために，はじめの概念の意味や形式を一般化して，もとのものも含めてまとめる場合である．



[A を含む A′ を新しく考えてまとめる]

図１．３　「拡張による統合」（中島健三，1981，p.128）

たとえば，１位数どうしについて考えた計算が，２位数，３位数でも使えるようにする場合は，この最も卑近な場合であろう．(p. 128)

ここでさらに具体的に示すために，以下のような平行四辺形の求積公式の指導例を参考にする．

長方形の場合には，(たて) × (よこ) という公式ができた．辺の長さがわかれば，いちいち単位面積のいくつ分を調べなくても，長さの計算で面積を調べることができた．それで，こんどは，長方形とよく似た性質をもち，整った形である平行四辺形についても，そのような公式ができないかを考えてみましょう．(p.150)

この際に，同じ形式 (たて) × (よこ) によって見られないかと考えることが，「拡張による統合」である．そのために，形式に多少の修正を施して前のものを拡張して新しく集合とする．そして，それらを「統合」を観点としてみている．さらに具体的に，以下の二つのアプローチが示される．

㋐平行四辺形を，面積が同じ長方形に等積変形して，(たて) × (よこ) の公式を活用できるようにできないか．
㋑平行四辺形の２辺 AB，BC を (たて)，(よこ) に対応させ，その積を利用できないか．(p.151)

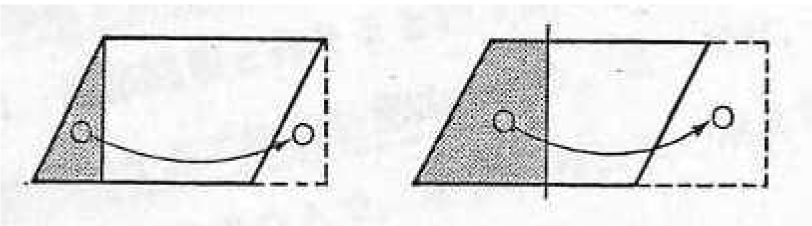


図１．４　㋐長方形にして (たて) × (よこ) を活用する (中島健三, 1981, p.151)

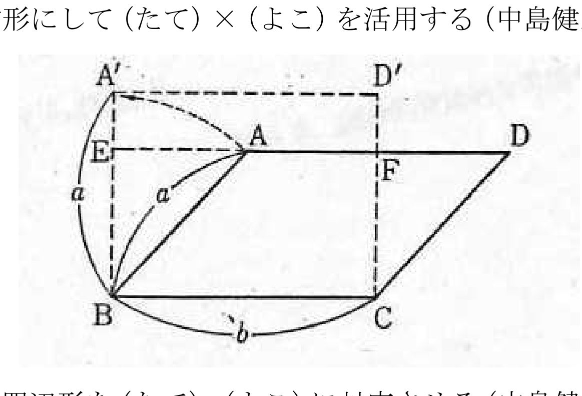


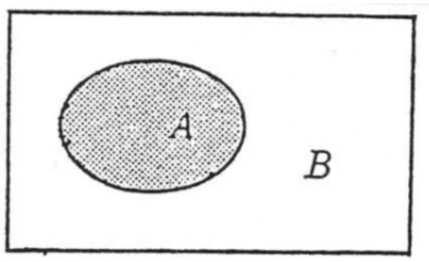
図１．５　㋑平行四辺形を (たて)，(よこ) に対応させる (中島健三, 1981, p.151)

㋐について，図１．４のように，等積変形し長方形にすることによって（たて）を「高さ」というように拡張する．このようにして「拡張による統合」が行われる．

一方で㋑の例については図１．５のように考えさせる．まず（たて）×（よこ）で表わされる面積は長方形 A′BCD′のことである．そしてこれを生かすようにするならば，平行四辺形 ABCD と等しい面積の長方形 EBCF と比較する．すると，長方形 A′BCD′と長方形 EBCF 面積比は A′B と EB の比と同じである．したがって，（たて）×（よこ）に，この比率をかければよいことになる．このようにして考えれば，長方形の面積も（たて）×（よこ）に比率１をかけたものとして見られ，「拡張による統合」が行われる．「拡張による統合」は，創造的な活動をするための精神的な支えである「統合」の中でも最も算数・数学らしいものであると述べている．

最後に三つ目は，「補完による統合」である．図１．６のように A という観点で，不足している場合 A でない B で補って統合している．

> （c）補完による統合――すでに知っている概念や形式だけでは，適用できない場合が起こるとき，補うものを加えて，「完全になる」ようにまとめる場合である．たとえば，たし算，かけ算，に対して，ひき算やわり算を考え出すときとか，比例に対して反比例を考え出すようなときなどが，これにあたるといってよい．（p.129）



[A に対して，B を補って（補集合にあたるものを考えて）完全にする]

図１．６　「補完による統合」（中島健三，1981，p.129）

１．１．２　拡張と「統合」との関係

以上のように，主要な三つの「統合」を整理した．すなわち，算数・数学の教育の目標を「数学的な考え方」の育成としたときに，算数・数学にふさわしい創造的な活動ができることを目指し，算数・数学の抽象性，論理性，形式性といった特性から自然に生まれた価値観の一つとして「統合」があった．そして「統合」は，一般化や拡張をしたり，例外のないようにしたりしようとする価値観であるとし，算数・数学では特にかかわりが強いもので，「集合による統合」，「拡張による統合」，「補完による統合」という主要な三つがあ

ることが整理された．この中で「拡張による統合」は，「統合」の中でも最も算数・数学らしいものであると述べていた．この最も算数・数学らしいものであるとされている「拡張による統合」をさらに詳しく見ていく．

まずは，拡張とは何かについて整理する．これは，数学者がいったいどのような研究をしてきたのかを具体的にみることで明らかにする．例えば清宮俊雄（1968）は以下のように述べている．

> 数学の進む道はつねに一般化への方向に向いている．代数学に１例をとると，１次方程式の解法ができると，さらに２次方程式の解法へ，２次方程式の解法が発見されると，さらに３次方程式の解法へと研究が進められていく．
>
> 幾何学の研究でも同じことであって，ある図形の性質がわかれば，さらに，より一般的な図形の研究へと進むのがつねである．このようにして，ある定理を特別な場合として含む新しい定理が発見されると，この新定理を前の定理の拡張とよぶ．（p.46）

このように，数学は一般化する方向に進んでいることを指摘し，中でも幾何学を例にとり，一般的な図形の研究に進んだ時に発見される新しい定理のことを拡張としている．また清宮俊雄（1968）は

> いくつかの条件を仮定にもった定理があるとき，結論はそのままで，仮定をより一般な条件でおきかえることが可能であれば，われわれは１つの拡張を得るであろう．（p. 90）

とも述べており，拡張とは，結論を変えずに，仮定の条件をより一般的な条件におきかえて得られるものだととらえられる．ただし結論を変えずに，という部分については

> 仮定をおきかえる際に，結論をそのままには出来ない場合もあり，その際に結論に多少の修正をほどこしたものがなりたつかを考える場合もある（p. 108）

と述べている．よってもとの結論を特殊として含むような結論に修正することもあると述べていることになる．

では，数学における条件，仮定，結論の定義は，学校教育においてどのように示されているのであろうか．実際に教科書をみてみることにする．仮定と結論に関しては，中学校の教科書の中で確認される．

> 図形の性質は○○○ならば□□□という形で述べられることが多い．このような

文では，「ならば」の前の○○○の部分を仮定
「ならば」のあとの□□□の部分を結論
という．（新しい数学２，2012，p.108）

そして条件に関しては，高等学校の教科書で確認される．

一般に，正しいか正しくないかが定まる文や式を命題という．命題が正しいとき，その命題は真である，または，成り立つといい，正しくないとき，その命題は偽である，または，成り立たないという．正しいか正しくないかが定まらない文や式は命題ではない．
変数を含む文や式で，その変数に値を代入したときに真偽が定まる文や式を条件という．
一般に，ｐ，ｑを条件として「ｐならばｑである」という形の命題を「ｐ⇒ｑ」と表す．
このとき，ｐをこの命題の仮定，ｑをこの命題の結論という．
（新編　数学Ⅰ，2012，pp.50-51）

以上を参考に，条件とは変数を含む文や式で真偽が定まるものであり，二つの条件を並べて論理でつなげるときに，前後の条件を仮定と結論ととらえる．
したがって清宮俊雄（1968）は，仮定の条件を一般的な条件におきかえ，結論の条件が成り立つならば，拡張を得たと述べているととらえる．
では拡張についての具体をみていく．すると清宮俊雄（1968）は，古代ギリシャの時代からすでにいろいろ試みられていると指摘して，「ピタゴラスの定理」の拡張が８個紹介されていた．（pp.48-53）そのうちの二つは以下のユークリッドの「原論」にある「ピタゴラスの定理」の拡張だと述べていた．調べると，確かに以下の［拡張１]は第 6 巻の 30 に，［拡張２］は第 2 巻の 12，13 にあった．（中村幸四郎ほか　訳，1971，p.145,pp46-47）

[ピタゴラスの定理]
直角三角形の斜辺の上の正方形の面積は，他の２辺の上の正方形の面積の和に等しい．

[拡張１]
「直角三角形の 3 辺の上に，各辺を対応辺とする相似図形を作ると，斜辺の上の図形の面積は他の２辺の上の図形の面積の和に等しい」

[証明]　△ABC において，∠A=90°として，各辺上に各辺を対応辺とする相似図

形を作り，それらの面積を図のようにS_1，S_2，S_3とする．相似図形の面積の比は相似比の２乗に等しいから

$S_2 : S_1 = AC^2 : BC^2$

$S_3 : S_1 = AB^2 : BC^2$

$$\therefore \frac{S_2+S_3}{S_1}=\frac{S_2}{S_1}+\frac{S_3}{S_1}$$

$$=\frac{AC^2}{BC^2}+\frac{AB^2}{BC^2}=\frac{AC^2+AB^2}{BC^2}=1$$

$\therefore S_1 = S_2 + S_3$（pp. 48-49）

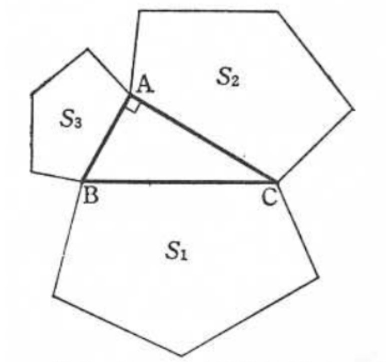


図１．７　「ピタゴラスの定理」の［拡張１］（清宮俊雄，1968，p.49）

以上で得られた［拡張１］が「ピタゴラスの定理」の拡張であることを確かめる．はじめに「ピタゴラスの定理」というよく知られる定理について，この定理の仮定を考える．すると，この定理の仮定は「直角三角形であること」と，「３辺の上の図形は全て正方形であること」である．そして，結論は「斜辺の上の正方形の面積は，他の２辺の上の正方形の面積和に等しい」である．次に「３辺の上の図形は全て正方形であること」という仮定をより一般的な条件におきかえる．つまり「正方形」を「相似図形」という条件におきかえる．これで図１．７のような［拡張１］が得られることが確認できた．

また清宮俊雄（1968）は，「直角三角形であること」という仮定を一般的なものにおきかえても拡張が得られることも述べていた．つまり，図１．８のように「直角三角形であること」という仮定を「一般の三角形」におきかえ［拡張２］を得ている．

[拡張２]△ＡＢＣにおいて，∠Ａ＝90°ならば$BC^2 = AB^2 + AC^2$であるが，∠Ａ＜90°と∠Ａ＞90°の場合について考えてみる．

点ＢからＡＣにおろした垂線の足をＤとする．

∠Ａ＜90°のときは

$BC^2 = BD^2 + CD^2$

$= (AB^2 - AD^2) + (AC - AD)^2$

$= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$

$\angle A > 90^\circ$ のときは

$BC^2 = BD^2 + CD^2$

$= (AB^2 - AD^2) + (AC + AD)^2$

$= AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AD$

以上をまとめて

「△ABC において，点ＢからＡＣにおろした垂線の足をＤとする．

$\angle A = 90^\circ$ ならば　$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\angle A < 90^\circ$ ならば　$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$

$\angle A > 90^\circ$ ならば　$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AD$

である」

これもユークリッドの「原論」にある拡張である．

三角関数を用いて，これを１つの式にまとめたものがつぎの余弦定理である．

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

すなわち，余弦定理はピタゴラスの定理の拡張である．(pp49-50)

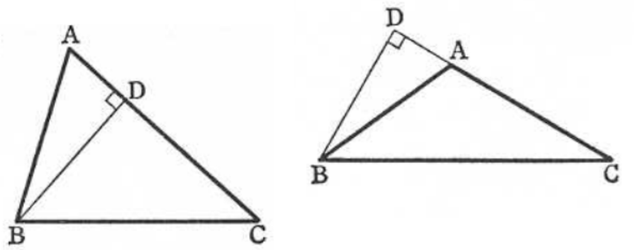


図１．８　「ピタゴラスの定理」の「拡張２」(清宮俊雄，1968，p.49)

このように，結論が「$BC^2 = AB^2 + AC^2$」から「$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD$」や「$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AD$」というように修正されている．これを余弦で書き直せば「余弦定理」となり，「ピタゴラスの定理」は，点Ｄが点Ａと重なった場合なので，ＡＤ＝０のときであるので,「余弦定理」は「ピタゴラスの定理」の拡張である．

以上の具体例から，定理の仮定の１つを一般的なものにおきかえて拡張を得ていて，おきかえる仮定によって得られる拡張も異なっている．また，清宮俊雄（1968）は新定理を作ることを拡張する，と述べている場合もあった．

したがって本研究では拡張を，定理の仮定を一般的なものにおきかえてできた新定理のこととととらえる．また新定理を得ることを拡張するととらえる．

ここで，拡張と一般化について整理する．島田茂（1990）によると以下のように，拡張と一般化について「微妙な意味合いの違い」もあることが指摘されている．

> より広い範囲で成り立つのではないかと考える考え方を，拡張とか一般化とか言っている．拡張も一般化もともに広い範囲をめざす語であり，ときには同じ意味に用いられるが，またときには，微妙な意味合いの違いをもたせることもある．後者の場合には，一般化はいくつかの一連の個別的な例から，これらを要素（個物とみなす）とする集合全体について成り立つことを想定するのに対し，前者は，一つの集合（一つ以上の要素をもつ，一般には無限の要素からなる）から，その集合を包含するもっと広い集合（したがって先の集合は，その部分集合になる）に進むことをさす場合が多いようである．
>
> ピタゴラスの定理の一般化はｎ次元における距離（原点からの）を，座標の平方和の平方根と定義することで，同定理の拡張は，平面上の余弦定理であるとするのが，その例となろう．事例を通じて一つの概念を作りあげていく心理的過程は，ふつうは一般化とよばれ，ここでは拡張という語は不適切である．数学の中では，自然数から整数を作ること，それからまた有理数を作ることと，順次に数体系を作っていく過程は，数の拡張とはいうが，数の一般化とはいわないようである．（p.58）

このように島田茂（1990）は拡張と一般化について，「微妙な意味合いの違い」をもたせることができると指摘している．つまり，一連の個別的な例からこれらを要素とする集合全体について成り立つことを想定する一般化と区別して，ひとつの集合からもとの集合を包含した集合に進むことを拡張ととらえることもできるのである．

そこで本研究では，拡張を，一連の個別的な例からこれらを要素とする集合全体について成り立つことを想定する一般化と区別して，ひとつの集合からもとの集合を包含した集合に進むことを拡張ととらえる．したがって，拡張をこのような過程としてとらえ，拡張して見直すことを「拡張による統合」ととらえる．

では中島健三（1981）の「統合」という観点に価値を置いた創造的な活動にはどのような教育的な価値があると述べられているのか．ここではもう一度教育的な価値に焦点をあて整理する．

「統合」は，算数・数学の教育の目標を「数学的な考え方」の育成としたときに，算数・数学にふさわしい創造的な活動ができることを目指し，算数・数学の抽象性，論理性，形式性といった特性から自然に生まれた価値観の一つであった．また具体的に「統合」は，一般化や拡張をしたり，例外のないようにしたりしようとする価値観であるとし，算数・数学では特にかかわりが強いもので，「集合による統合」，「拡張による統合」，「補完による統合」のうち「拡張による統合」は，「統合」の中でも最も算数・数学らしいものであると

述べていた．

次に以下の記述から，教育的な価値が指摘されているととらえることにする．

> 上のような価値観に立った算数・数学の学習を通して，数学とつながりの深い価値観を育成しその多様化を図るという意味で，人間性を豊かにする上で，大へん重要な役割を果たすと考えてよい．（p.97）
>
> こうした観点に価値観をもち，その実現にロマンを求めて，これを「美しい」こととして「楽しむ」ことができる人間を育てたい．これが，算数・数学で，人間として望ましい精神的な価値観を多様にし，人間性を豊かにすることに直接つながる道でもあろう．（p.98）

ここで指す，上のような価値観というのは，「簡潔」，「明確」，「統合」である．つまり，「簡潔」「明確」「統合」という数学とかかわりの深い価値観に立った精神を持つことを育成することで，問題の解決だけでなく，数学が発展してきた際に自然に生まれてきた様々な価値観が育まれるのだとしていた．そして，この価値観が育まれて，またさらに創造する活動が行われる．このように，教育的な価値としては，価値観の多様化ということが一つの価値であると述べられている．

ここまでを整理すると，「統合」に観点を持った創造的な活動の教育的な価値は，問題の解決だけでなく，数学が発展してきた際に自然に生まれてきた様々な価値観が育まれることとであるととらえられる．

１．２　中学校数学科における生徒の価値観に関する課題

第１章第１節では，先行研究として中島健三（1981）における「簡潔」，「明確」，「統合」という価値観に支えられている創造的な活動の教育的な価値を整理した．しかし，以上のすべての価値観が均等に必要とされているわけではないと考える．これは，対象の生徒によって重みが異なってくるのだろうと考える．よって次に，現在の中学校数学科において，どのような課題を改善する必要があるのかを整理した．そしてこれを改善するため，１．１で整理した先行研究においての統合する活動の価値を基に，統合する活動にどのような価値があるのか，可能性を考えたい．価値観の多様化という部分を考察するために，国際教育到達度評価学会（IEA）によって日本では五回目となる，国際数学・理科教育動向調査の 2011 年調査（Trends in International Mathematics and Science Study 2011：略称 TIMSS2011）を分析する．特に，日本の生徒の数学に関する質問紙調査の結果から引用し（国立教育政策研究所，2012）分析する．

TIMSS2011 には，算数・数学問題の結果と質問紙の結果という二つの調査結果がある．

このうち，算数・数学問題の結果に関しては，わが国は高水準を保っていた．一方，質問紙の結果の中から，数学に対する生徒の認識は，成績が高い水準にあるにもかかわらず好ましくないことがみてとれる．具体的には以下のような質問項目である．

（１）算数・数学の勉強の楽しさについて
（２）算数・数学の勉強が好きかどうかについて
（３）将来，自分が望む仕事につくために，数学で良い成績をとる必要があると思うかどうかについて
（４）数学を使うことが含まれる職業につきたいかどうかについて（2011 年新規項目）

この項目の質問それぞれに，４つの選択肢（「強くそう思う」「そう思う」「そう思わない」「まったくそう思わない」）で答えるという形式である．

では，中学校二年生に対しての質問と結果を見ていく．ただし以下は調査結果のうち，「強くそう思う」「そう思う」を見ている．

まずは（１）の質問「数学の勉強は楽しい」に対して，「強くそう思う」と答えたのは，１３．３％（国際平均３３．１％）であった．また，「そう思う」と答えたのは３４．３％（国際平均３７．６％）であった．

次に，（２）の質問「私は，数学が好きだ」に対して，「強くそう思う」と答えたのは，１２．７％（国際平均３２．２％）であった．また，「そう思う」と答えたのは２６．４％（国際平均３４．０％）であった．

（３）の質問「将来，将来，自分が望む仕事につくために，数学で良い成績をとる必要がある」に対して，「強くそう思う」と答えたのは，２２．７％（国際平均５３．７％）であった．また，「そう思う」と答えたのは３９．０％（国際平均２８．８％）であった．

（４）の質問「数学を使うことが含まれる職業につきたい」に対して，「強くそう思う」と答えたのは，４．３％（国際平均２１．９％）であった．また，「そう思う」と答えたのは１３．６％（国際平均２９．７％）であった．

これらの結果から，わが国の生徒は，算数・数学問題の結果に関しては，わが国は高水準を保っているにもかかわらず，数学に対しての認識は良くないこといえるであろう．ただし，（４）以外の項目は，前回（TIMSS2007）と比較すると，肯定的な回答が増えている．それでも，国際平均を大きく下回っていることから，中学校数学科において，大きな課題である．

また平成 24 年 4 月から完全実施された学習指導要領（2008）では以下のような活動を重視した目標が載っている．

数学的活動を通して，数量や図形などに関する基礎的な概念や原理・法則についての理解を深め，数学的な表現や処理の仕方を習得し，事象を数理的に考察し

表現する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる．（p.47）

さらに詳しくみる．中学校数学科の目標を詳しく解説している解説書（2008）では，目標の中の「数学的活動」と「数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し」の部分について，次のように解説がされていた.

数学的活動とは，生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営みを意味している．（p.15）
これまで以上に情意的な側面を大切にし，数学を学ぶことへの意欲を高めるとともに，数学的活動に主体的に取り組むことができるようにし，数学を学ぶ過程を大切にするとの趣旨によるものである．（p.17）

以上のように目的意識をもった主体的な活動をねらっているのは，前回の改定からである．つまり，数学的活動を重視し，生徒の学習意欲を高めることが重要であることが明らかである. また,「数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し」と記載されていることから,数学に対しての認識があまりよくないことを改善することは前の改定から改善する努力を続けていくべき課題であるととらえられていたことも明らかだと考える．ここで，前回からの改訂の主旨を見る．すると次のように記載されていた.

中学校数学科の指導は，与えられた問題を解いて答えを求められるようにすることだけを目指すものではない．これまで述べてきたように，基礎的・基本的な知識及び技能を習得し，それらを活用して問題を解決するために必要な思考力，判断力，表現力等をはぐくむこと，数学の学習に主体的に取り組む態度を養うことにバランスよく取り組む必要がある．（p.6）

以上のように中学校数学科では，大規模調査で明らかにしたことと同じ課題を受け，知識理解だけでなく，その過程にも価値を見出そうとする主旨が示されたととらえられる.

したがって，現在の中学校数学科では，生徒の数学に対する価値観の単一化を改善し，数学に対しての意欲を高め，主体的な態度を養うことを重視しているととらえる.

１．３　統合する活動の教育的な価値

第１章第１節から，先行研究内での「統合」とその価値は明らかになった．しかしこのことが現在にも適用されるのか．つまり，ここで考慮すべきことは先行研究がなされた時代の背景であるととらえる．この時期は，理科数学で新内容が増加し，教育課程の現代化，つまりは教育内容の高度化があった３次改訂と，「ゆとりと充実」や「内容の精選」を掲げた４次改訂の中間の時期のものである．中島健三（1981）は以下のように，内容の精選という課題のとらえ方について警告されていた．

> 算数・数学教育の歩みをふまえた上で，正しくつかんでいるかどうか．これがないと，いつまでも，同じことを，あるいは，振子のようにあっちへ行ったりこっちへ戻ったりといったことをくり返すにすぎないことになろう．（p. 4）

つまり，内容をただ削減しているのではなく，内容の中で重要な考えを精選し，その先に発展することを期待しているということを念頭におき，指導すべきだということであるととらえられる．これは現在においてもいえるのではないだろうか．この時期はゆとりの方に振子が行っていて，現在は詰め込みの方へ行ってしまうのではないか．例えば，杉山吉茂（2012）は「教材の新しい見方への挑戦を」（同，2006）の中で，次のように円周角の定理の扱いについて例に挙げながら振り返っている．

> 時間数の削減で，多くのものが上の学年に移されている中で，「円周角の定理」は，ほかのものとは違って，中学校 3 年から中学校 2 年へと下の学年に移された．それは「円周角の定理」は，証明のよさを分かってもらう題材として適切だと判断されたからである．証明のよさを分かってもらう題材としては「三平方の定理」が適していると思われるが，「三平方の定理」の証明を子どもに考えさせることは難しい．「中点連結定理」あるいは「円周角の定理」なら，平行四辺形や二等辺三角形の性質を使って証明できるし，しかも，おもしろい性質なので，証明のよさを味わってもらうための題材として適切だと考えられたからである．証明の根拠にすることが二等辺三角形の底角が等しいことなので，それに合わせて中学校 2 年に位置づけられた．
>
> 　学年が前に移動されたので，その扱いは以前とは違っているだろうと思っていたが，改定された教科書を見ると，以前中学校 3 年でしていたこととほぼ同じことをそのまま中学校 2 年にもってきている教科書がいくつか見られた．中学校 3 年にあったときは，円の性質として「円周角が一定」という性質がある，それを証明するという展開であった．しかし，円の単元のない中学校 2 年で，以前と同じ発想で題材が示され，証明の仕方も前のままというのはどんなものであろうか．

> 全体が後ろに移されているときは，同じ扱いでよいかもしれない．しかし，全体の流れと逆になっているときは，扱い方は違えなければなるまい．学習していることも違うし，それを考える前後関係も違ってくるはずである．学年が前に移動しても同じ扱いというのは，単元の移動で改訂を乗り越えればよいという考えが，ここにも見られる．教科書を見るまでは，各社がどのように対応するのか興味津々であったが，何も工夫されていないことにがっかりすると同時に，安易な対応に腹も立った．(pp.321-322)

この後，杉山吉茂（2012）は，円周角の導入の試みを４つ提示しながら，教材の扱い方をもっとよく考えてほしいと述べていた．(pp.322-341) その中で，提示したもののどれもが，既成の数学的な事実を与えるのではなくて，生徒の基本的な考えから出発する創造的な学習であるととらえられる．つまり，平成１０年版の学習指導要領の改訂でも，中島健三（1981）のように，算数・数学教育の歩みをふまえた上で正しく課題をつかんでいるかどうかが警告されているととらえられる．

このような考えからこの中島健三（1981）の「統合」に観点をもった創造的な学習から生まれる教育的な価値は現在の中学校数学科においても必要な教育的な価値として位置付けることができると考える．

さらに，第２章第２節でみた大規模調査等から明らかになったとおり，問題を解くことに関しては，わが国は高水準であるにもかかわらず，数学に対して肯定的な回答が少なかったことから価値観が単一化されている．よって第 1 章第１節で示したような，問題が解けるかどうかという一つの価値観だけではなく，それ以外にも価値観を持ち指導することが重要だととらえる．それ以外の価値観というところに，「統合」という価値観も当てはまると考える．

よって本研究では，中島健三（1981）に習って，統合する活動を，「統合」という観点に価値を置いた創造的な活動とする．また「統合」の方法は，中島健三（1981）の主要な３つとし，特に「拡張による統合」が重視されることから，「拡張による統合」を重視していきたいと考える．

したがって，統合する活動は，問題の解決後に行われるべき創造を促すという価値があり，本研究の目的である問題を解いてから補助線の意味を考える活動を実現するために必要であると考える．

第２章
「ラングレーの問題」とその教材開発の方針

２．０　本章の意図と構成

第１章第３節では統合する活動を「統合」という観点に価値を置いた創造的な活動とした．

本章の意図は，「ラングレーの問題」を題材とした教材研究を行い，教材化の方針を示すことである．「ラングレーの問題」の教材化の方針とは，補助線の本質を明らかにしようとする態度から，統合する活動を促すことである．

第１節では，「ラングレーの問題」とその解法例を示す．そしてこの問題の解法について含まれる考えを整理する．これは，問題の美しさ・困難さを確認するとともに，第３章で生徒の考えを整理するために行う．

第２節では，「ラングレーの問題」の先行研究を整理する．先行研究の活動を整理することで，問題が解決された後に，数学としてふさわしい活動が，統合する活動であることを示す．

第３節では，「ラングレーの問題」の教材化の方針を示す．その際，解法の困難性や数学としてふさわしい活動を踏まえ，生徒が着目する「ラングレーの問題」の補助線の本質を考え，統合する活動の実現に向けた教材化の過程を提示する．

２．１　「ラングレーの問題」と解法例

２．１．０　「ラングレーの問題」

図２．１が「ラングレーの問題」である．

四角形 ABCD において

$$\angle DAC=20°, \angle CAB=60°, \angle DBA=50°, \angle DBC=30°$$

のとき，∠DCA を求めなさい．

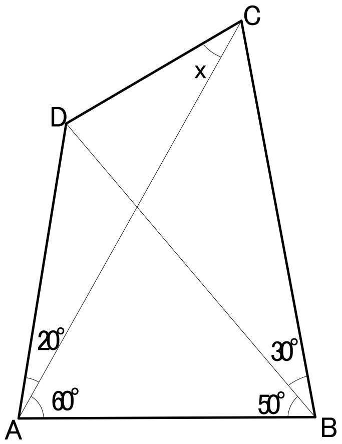


図２．１　「ラングレーの問題」

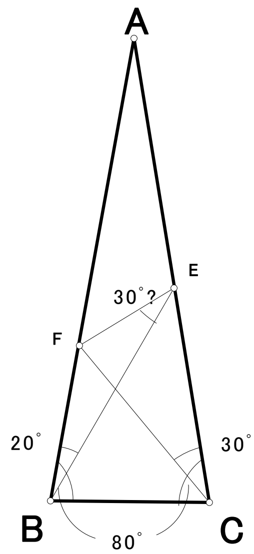


図２．２ A problem にかかれていることの図

この問題の出典は，E.M.Langley が出版していた Mathematical Gazette 誌の 1922 年 10 月号にあり，Mathematical Notes.という記事の中で，形式は異なるが以下のように出題されていた．（E.M.Langley,1922,p.173）

644.A problem
ABC is an isosceles triangle. B=C=80゜.CF at 30゜ to AC cuts AB in F. BE at 20゜ to AB cuts AC in E. Prove ^BEF=30゜. (E.M.Langley,1922)

訳すと「△ABC は二等辺三角形である．∠B と∠C は 80゜である．AC と 30゜をなして AB 上の F で交わるような CF である．AB と 20゜をなして AC 上の E で交わるような BE である．∠BEF=30゜であることを証明しなさい．」ということである．図２．２の四角形 FBCE が図２．１の四角形と相似な四角形である．また，角度を求めることではなく，角度が 30゜であることを証明する問題として出題されている．

この出題形式から考え，清宮俊雄（1968）が紹介する以下の記述から，どのようにして生まれた問題であるか解釈する．

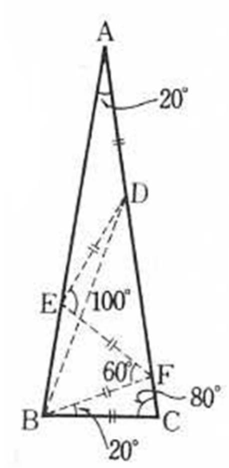


図２．３　四つの二等辺三角形に分割する方法（清宮俊雄，1968，p.151）

> 上のように頂角20゜の２等辺三角形を４個の２等辺三角形に分割する方法は11世紀のアラブの学者によって発見されている．AB=AC=1，BC=ｘとすると $x^3+1=3x$ であって，半径１の円に内接する正18角形の１辺の長さｘが上の三次方程式の解として求められる．上のような分割はｘを求める手段としてくふうされたものである．（清宮俊雄，1968，p.151）

文献内で直接関係があるとは述べられていなかったが，図２．１の四角形の AD と BC を延長することで，図２．２の二等辺三角形となる．そして図２．３の分割する方法に出現する補助線が「ラングレーの問題」の補助線と同様である．このように考えると，求めるものは角と辺の長さで異なるが，同様の問題ともとらえられる．つまり，11世紀アラブの学者によって正十八角形の一辺を求めようとして,「ラングレーの問題」が生まれたと解釈する．

２．１．１　等しい五辺が現れる最も有名な解法

さて，図２．１の「ラングレーの問題」の最も有名な解法として図２．４のように，（ⅰ）（ⅱ）（ⅲ）（ⅳ）の手順での解法がある．辺 CB 上に点 E を AB=AE となるようにとる．すると，EC と ED も等しくなることがわかり，結果五辺の等しい辺が見つかる．以上のような等しい辺から∠x が求まる．

（ⅰ）仮定からわかる角度や等しい辺を求める．すると

∠ADB＝50°,∠ACB＝40°,AD=AB

（ⅱ）AB=AE となるように辺 CB 上に点 E をとり補助線 AE を引く．すると

∠AEB=80°,∠EAB=20°,∠CAE=40°,AB=AE＝CE

（ⅲ）D と E を結ぶ. すると∠DAE=20°+40°=60°,DA=AE より三角形 DAE は正三角形. よって

∠AED=60°,∠DEC=180°-（60°+80°）=40°

（ⅳ）三角形 DEC において

DE=DA,CE=AE=DA

なので，DE=CE の二等辺三角形．頂角 40°より

∠ｘ=（180°-40°）÷2-40°=70°-40°=30°（解）

あるいは点 E が三角形 DAC の外心であることから，その円周上に点 C,D,A が存在することから円周角の定理より∠ｘ=∠AEB÷2=60°÷2=30°（解）

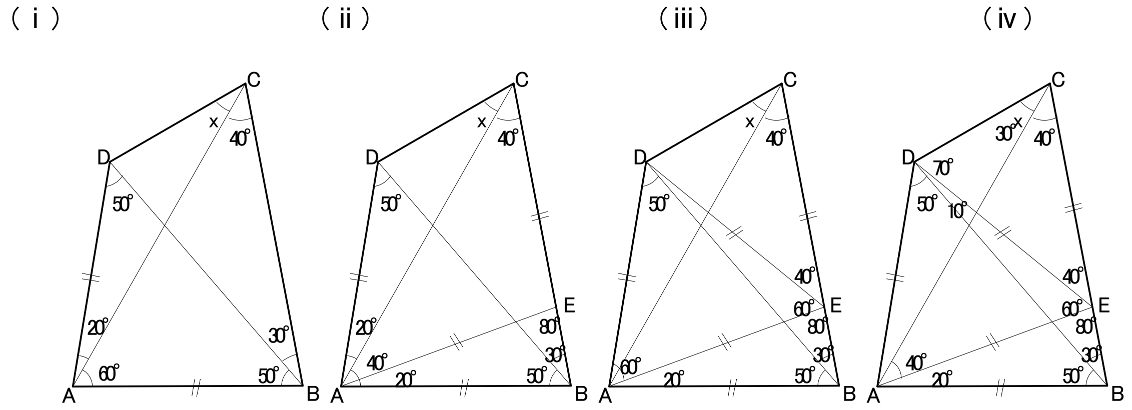


図２．４　「ラングレーの問題」の最も有名な解法

２．１．２　延長線で現れる二等辺三角形を利用した解法

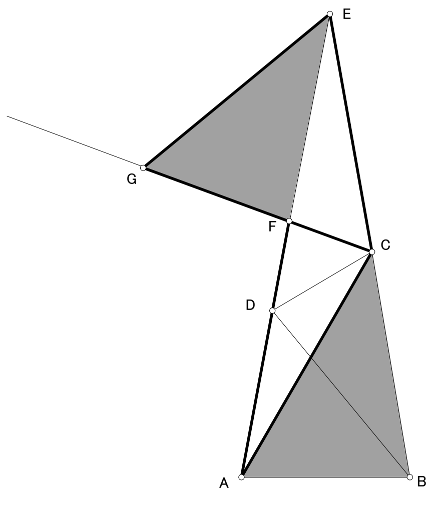


図２．５　延長線で現れる二等辺三角形を利用した解法

図２．５のように AD と BC の延長し，交点を E とする．すると

EA=EB①，AC=CE②

（二角が等しいので△EAB と△CEA は二等辺三角形）

また，AE 上に AC=AF③となるように F をとる．そして CF を結び，延長上に AB=GF④となるように G をとる．すると

△EGF と△CAB において

FG=BA（仮定③）

EF＝EA－AF

＝EB－CE（仮定①，仮定③，②）

＝CB　⑤

∠EFG=∠CBA＝80゜　⑥

よって③，⑤，⑥より二辺とその間の角がそれぞれ等しいので△EGF≡△CAB　⑦

⑦より対応する角は等しいことから∠EGF=∠CAB=60゜⑧，∠GEF=∠ACB=40゜⑨

ここで⑨より

∠GEC＝∠GEF＋∠FEC＝40゜＋20゜＝60゜⑩

よって⑧，⑩より△EGC は正三角形．よって CE=GC⑪

したがって△FDC において

FD=AF－AD

＝AC－AD（③より）

＝CE－AD（②より）

＝GC－AD（⑪より）

＝GC－AB（二等辺三角形 ABD より）

＝GC－GF（④より）

＝FC

なので，二等辺三角形△FDC である．そこで頂角が 80゜より，底角 50゜なので

∠ｘは∠ACF－50゜＝80゜－50゜＝30゜

２．１．３　平行線を組み合わせる解法

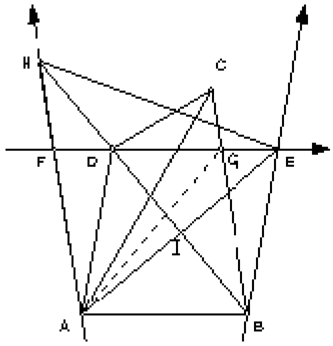


図２．６　平行線を組み合わせる解法

図２．６のようにＡを通るBCの平行線ｌ，Ｂを通るADの平行線m，Ｄを通るABの平行線ｎを引く．mとｎの交点，ｌとｎの交点をそれぞれE，Ｆとする．またｎとBCとの交点をＧとし，ｌとBDの延長線の交点をＨとする．

ここで二等辺三角形△ABDより四角形DABEはひし形．①

また二等辺三角形△FADより四角形FABGはひし形．②

これから△AHD≡△ACDを示す．△AHDと△ACDにおいて

AD=AD（共通）③，∠HAD=∠CAD＝20゜④

である．なのであとはAH=ACを示せばよい．△CAGと△EAGにおいて

AG=AG（共通）⑤

∠EAG＝∠GAB－∠EAB

＝50゜－40゜（②より）

＝10゜⑥

∠CAG＝∠CAE－∠EAG

＝∠DAE－∠DAC－10゜（⑥より）

＝40゜－20゜－10゜（①より）

＝10゜⑦

よって⑥，⑦より　∠EAG=∠CAG=10゜⑧

また∠ACG=∠AEG=40゜（①より）なので∠CGA=∠EGA=130゜⑨

⑤，⑧，⑨より一辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△CAG≡△EAG

よって，AC=AE⑩

ここでいま△AEHについて∠HAE=60゜AH=EH（①より）なので正三角形である．⑪

⑩⑪より

AH=AC⑫

したがって△AHD と△ACD において③，④，⑫より△AHD≡△ACD である．なので
　∠ｘ＝∠ACD＝∠AHD＝30゜

２．１．４　角の二等分線を利用する解法

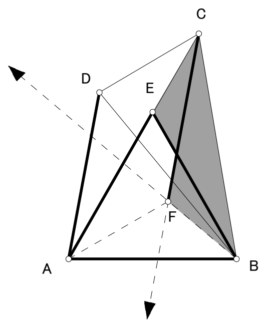


図２．７　角の二等分線を利用する解法

図２．７のように，AC 上に AB=AE となる点 E をとる．すると∠CAB=60゜より
△ABE は正三角形①
次に△ABC の内心を F とする．ここで△CEB と△BFC において
　　BC=CB（共通）②
　∠ECB=∠FBC＝40゜ ③
　∠EBC=∠FCB＝20゜ ④
②，③，④より△CEB≡△BFC である．よって EB=FC⑤
⑤，①，二等辺三角形 ABD より AD=FC⑥
また∠DAC=∠FCB＝20゜より AD//FC⑦
⑥，⑦より四角形 DAFC は平行四辺形である．したがって∠ｘ＝∠CAF=30゜

　以上の２．１．１～２．１．４の四つの解法は，筆者が問題を解く際にどのようにして補助線を引いたかに着目して特徴づけたものである．特に，２．１．１の解法は有名であるが,「∠EAB=20゜となるように E をとる」という記述が多い. が, 意図的に「(ⅱ) AB=AE となるように辺 CB 上に点 E をとり補助線 AE を引く」というようにした．それは，等しい辺を移動して考えているととらえているからである．このアイデアから二等辺三角形が連続的に現れるのは驚くべき事実である. しかしそれゆえにどうして補助線 AE が見つかったのかを知りたくなった．これは過去の数学者が証明題にしている．（２．１．０）
　またこの問題は，補助線によって問題の構造が連続的に明らかになっているので，このようすは見た人に感動を与えるほどだと考えられる．一方，この解法を見て，不快に思う生徒もいるのではないだろうか．どちらの意味でも，この問題は普通ではないような，い

つもと違うような感覚を味わえるようにする．しかし，この補助線 AE を考えなしに∠ x が求まったとしたら，本当の意味で問題を味わったとはいえない．自分で悩み，考え，試行錯誤していってこそのものである．そのような感覚に至るためには，特に試行錯誤が必要である．つまり，試行錯誤を繰り返す価値のある題材であると考える．

このように解法が特殊なため，見通しをもって取り組んでも簡単には見つからないことも，魅力になるのではないかととらえる．松原元一（1990）は，中学校数学科でも重視されている論理的に考えることとは，以下のような正しい試行錯誤が行われることだと，「直観」を以下のようにしながら次のように述べている．

> 課題を観察しているうちに洞察が生じ，それに伴って体制が浮かんでくる．そして構造を与えていくのであるが，それが誤っていたときに試行錯誤となる．体制化，構造化の誤りであって，誤りを自覚して直ちに出直すときは明らかに試行錯誤である．また，構造化の途中で壁に突きあたって構造化が少しも進まなくなり，ついに断念してやり直すときの試行錯誤もある．（pp.84-85）
>
> 「直観」
>
> １と１を加えて２になると信じさせる，この力を直観という．人間は誰でも，この直観という力を持っている．その直観力で電燈に関する必要なだけの大網を摑んでいる．しかし，一つ一つの細かい論理はわかっていない．（中略）ところどころは知っているが論理で説明できないところを直観が繋ぎとめて，私たちを安心させているのである．（pp.21-22）
>
> 「直観はまず知覚から」
>
> 直観とは「悟り」である．子どもは「まる」が「わかった」と叫ぶ瞬間には，彼らは具体物の盆やお月さまを離れていない．これを見つめつつ，「わかった」というのである．しかもその瞬間には，盆やお月さまにはとらわれてもいない．直観とは「具体」の中に「普遍」を観ることであるとか，「個物」の「一般化」であるというのは，このためである．すると，直観は具体物を知覚することから始まるといえそうである．（pp. 26）

「ラングレーの問題」は，出題方法やその解法の伝え方によって，いたずらに生徒の意欲を奪いかねないと考えている．よってこの問題の価値として，解を試行錯誤して探求することともに，解が求まった後にその過程を見直す部分にも価値を置く指導がなければならない．

２．２　「ラングレーの問題」の先行研究

「ラングレーの問題」の先行研究を整理する．「ラングレーの問題」についての先行研究では，どのような活動があったのかを整理することで，問題が解決した後に，数学者がどのような活動をしたのかがわかる．これによって，「ラングレーの問題」に対しての数学としてふさわしい活動が具体的に明らかになる．

２．２．１　清宮俊雄による「整角四角形」の研究

第１章第１節で，清宮俊雄（1968）による拡張や，拡張するということについては具体例とともに整理してきた．すなわち拡張とは，定理の仮定を一般的なものにおきかえてできた新定理のことである．またこのように新定理を得ることを拡張するという．そしてこの過程として拡張をとらえ，本研究での統合する活動の中で重視したい活動としている．

そして本節で示したいことは，拡張することは「ラングレーの問題」についてもなされているということである．これによって「ラングレーの問題」に対しての数学としてふさわしい活動が具体的に明らかになる．以下は，清宮俊雄（1968）が「ラングレーの問題」の∠ｘを求め証明した後の考察であるととらえる．

証明で特徴的であるのは，AB=AE=AD=ED=EC であって，AB=AE，∠BAE=20°のとき，正三角形 AED を図のように作り，BE の延長上に EC=ED にとって，四角形 ABCD を作れば，これは与えられた条件を満足する四角形になっている．そこで∠EAB を変数にとって一般の場合を考える．

∠EAB=4θとすれば∠DAB=60°+4θ

∴∠ADB=∠ABD=60°－2θ

∠DBC=∠ABC－∠ABD

=（90°－2θ）－（60°－2θ）=30°

∠EAC=∠ECA=∠AEB÷2=45°－θ

∴∠CAB=（45°－θ）+4θ=45°+3θ

∠DAC=∠DAE－∠CAE

=60°－（45°－θ）=15°+θ

∠ACD=∠AED÷2=30°

∠BDC=∠BDC+∠EDC

=2θ+（75°－θ）=75°+θ

これから，次の拡張を得る．

[拡張 1]　四角形 ABCD において

∠DAC=15°+θ，∠CAB=45°+3θ，

∠DBA=60°－２θ，∠CBD=30°

ならば，∠DCA=30°である．（ただし，0°<θ<30°とする）　(pp. 166-167)

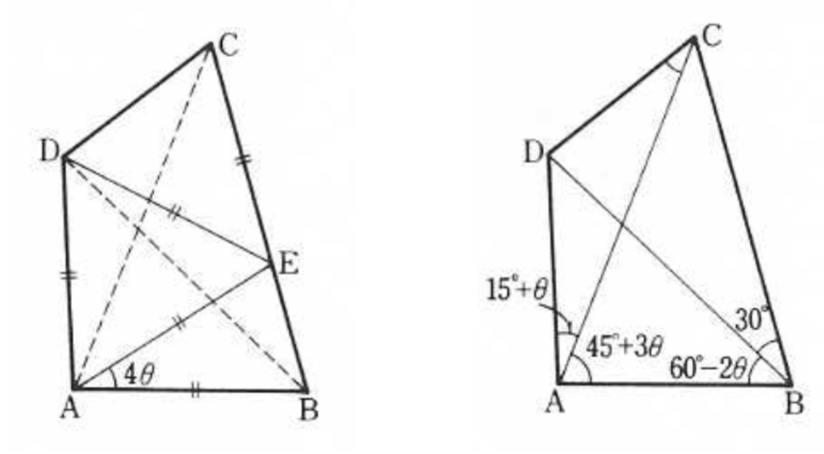


図２．８　等しい５辺から[拡張１]を得るようす（清宮俊雄，1968，p.167）

すると図２．８のように「ラングレーの問題」の解法の証明で出現した等しい五辺（AB=AE=AD=ED=EC)を保存している．そして∠EAB を 20°から変数をとって４θとし，一般の場合を考えている．その後，図２．８のように角度をθで表している．以上のようにして［拡張１］を得ている．

したがって「ラングレーの問題」に対して，等しい五辺を保存し，∠EAB を変数にとって一般の場合を考えることで拡張していることがわかる．さらに「ラングレーの問題」は，次のような「整角四角形」の研究と最も深くかかわったとしている．

> 四角形の各頂角を二つの対角線によって，それぞれ二つずつの角に分割するときに生ずる８個の角が，すべて整数度の角であるとき，これを「整角四角形」とよぶことにする．(p.166)

これは「ラングレーの問題」において，四角形 ABCD の対角線によって分割される８つの角度が，∠DAC=20゜，∠CAB＝60゜，∠ABD=50゜，∠DBC=30゜，∠ACB＝40゜，∠DCA=30゜，∠CDB=80゜，∠ADB=50゜であるという仮定を，一般の四角形におきかえて拡張しているととらえる．その際に，８個の角度が整数であることを結論として修正しているととらえる．つまり，角度を変数にとることで一般の場合を考え，「ラングレーの問題」を拡張している．また「整角四角形」の研究の中では，角度 x が整数で求まるような一般の四角形を探すことが主な活動の目的であった．

２．２．２　斉藤浩による「４点角問題」の研究

斉藤浩（2009）も「ラングレーの問題」の研究をしていた．それは図２．９のように，「ラングレーの問題」の同じ証明がそのまま利用できる場合における必要な条件を調べることから出発していた．そして，△ABC と△DBC が三角形として成立するためには，変数とした∠EBC に範囲があることを指摘している．ここまで，清宮俊雄（1968）の拡張する研究と同じ考えであるととらえられる．

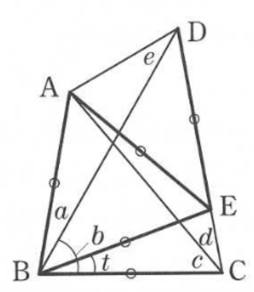


図２．９　同じ形の証明が使える範囲の変形（斉藤浩，2009，p.9）

そしてここからが大きな違いである．変数の範囲外はどのような図形になるのかが考察されている．つまり，２．２．１で示された清宮俊雄（1968）の［拡張１］においての $0°<\theta<30°$ という変数の範囲があったが，その範囲外の様子を観察している．その結果，変数の範囲外においては凸四角形にはならない図になると研究されていた．例えば図２．１０のように，点 B が△ACD の内部にあると述べられている．

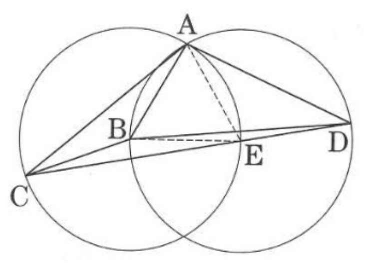


図２．１０　変数とした角度が範囲外の図（斉藤浩，2009，p.11）

図２．１０のような範囲外の図はどのように考え出されたのか. すると,（斉藤浩, 2009）は，正三角形ＡＢＥと，点 C と点 D の動きに着目していた.

まず, 点 C と点 D の動きをみる. 点 C は, 点 B 中心で半径 BC の円周上を動く. すると, 点 D の場合が対応して点 E 中心半径 ED の円周上を動く．このときに，必ず３点Ｃ，Ｄ， Ｅは一直線上になるように考えられる．変数が０のとき点Ｃは点Ｅと重なる。また点Ｄは∠AED＝30゜となる位置になる．さらに，変数によって表わした角を見れば

∠EBC=4ｔ，∠AED=30゜+2ｔ

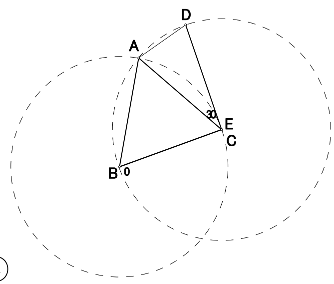
なので，その動き方はｔの係数だけをみれば，点Ｃは点Ｄの二倍の速度で回転することがわかる．なぜなら，ｘが増加するにつれて時計回りに，点 Ｃ はｔの増加の速度の４倍の速度で回り，点 Ｄ はｘの増加の速度の２倍の速度で回っているからである．よって，半径が等しい円を回っているので，点Ｄが一周すると，点Ｃは二周する．このことから，ｔの範囲は

0°＜2ｔ＜360°，0°＜ｔ＜180°

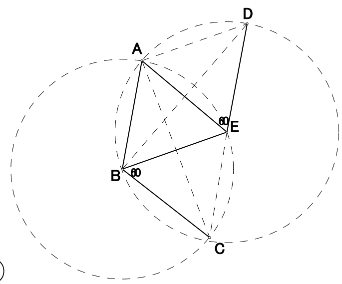
で十分だとわかる．

　このように，ｔを動かしていくと，大抵の場合で四角形 ABCD ができる。しかし，ある特定の場合で三角形になってしまう．それが（0°），30°，45°，75°，90°，105°，120°，135°，165°，（180°）の場合である．どの場合も，点Ｃと点Ｄが，直線 AB, 直線 AE, 直線 BE 上にきてしまうときである．これ以外の範囲では，すべて４点 ABCD は四角形を形成する．また，いくつかの区間では，４点のうち３点が作る三角形の内部にもう １ つの点が含まれるような配置となることがわかった．筆者が具体的に図を追ってみると，図２．１１のように点Ｃと点Ｄの動きが①～⑨のようにとらえられた．

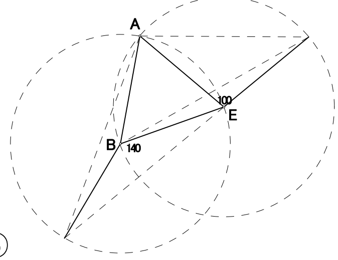
①



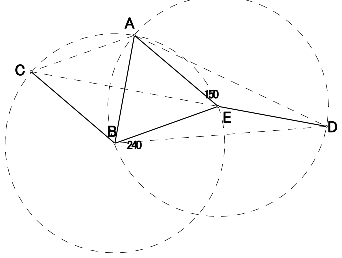
②



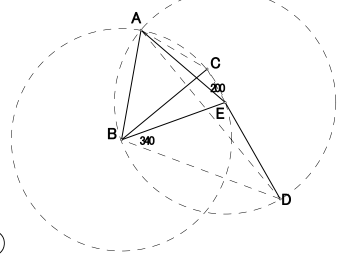
③



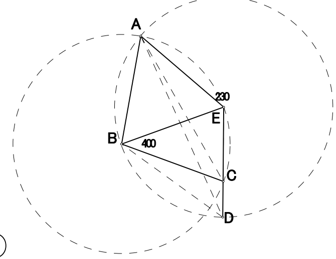
④



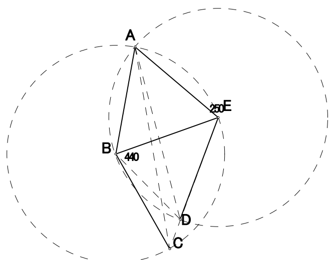
⑤



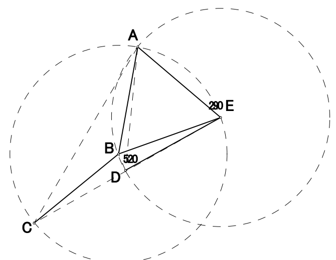
⑥



⑦



⑧



⑨

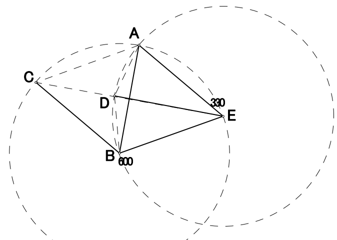


図２．１１　実際に図を範囲外に動かしてみた際の図

以上のように，斉藤浩（2009）は，変数の範囲外を調べ，四角形であることを４点におきかえているととらえる．その際の角の位置は図２．１２に対応して図２．１３のように（a,b,c,d,x）としていた．また，四角形の場合が「整角四角形」で三角形の場合が「整角三角形」であるとして，これらを合わせて「４点角問題」としていた．(斉藤浩, 2009, pp.13-14)

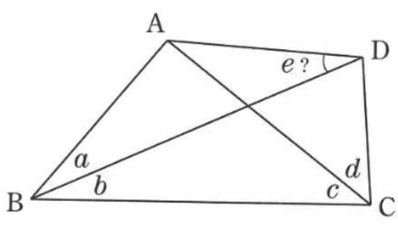


図２．１１「整角四角形」
（斉藤浩，2009，p.6）

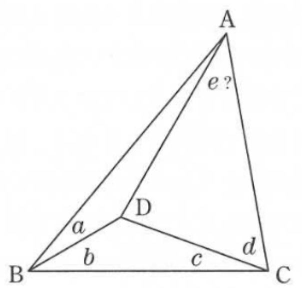


図２．１２整角三角形
（斉藤浩，2009，p.13）

２．２．３　先行研究における統合する活動

ここで，先行研究の中で本研究において重視する統合する活動が現れているのかを確認する．どちらの研究でも，「ラングレーの問題」を一般化している．

清宮俊雄（1968）は，「ラングレーの問題」に対して，等しい五辺を保存し，∠EAB を変数にとって一般の場合を考えることで拡張している．そして，一般の四角形において角度を整数の場合に修正して拡張した「整角四角形」の中の一つとしていたことがわかった．そして「ラングレーの問題」の角度がどのような整数値であれば求めたい角度が求まるのかについて考察されていた．

また斉藤浩（2009）も，「ラングレーの問題」に対して，等しい五辺を保存し，∠EAB を変数にとって一般の場合を考えることで拡張している．またさらに，四角形を４点によって構成される図形と一般的なものにおきかえて，「４点角問題」と定義していた．この見方により４点が凸四角形を形成する場合と，３点で形成される三角形の内部に１点がある場合も含めて「ラングレーの問題」の角度がどのような整数値であれば求めたい角度が求まるのかについて考察されていた．

以上の先行研究の共通点は，解が求まるときの角度にはどのような関係があるのかを考えていることである．これは∠ｘが求められることを満たす角度の関係が成り立つような

場合を全て統合しようとしたことになる．そのために，変えてもよい角度を変数とおいた．また，固定的だった図を動的にとらえたことにもなる．つまり，証明で現れる等しい五辺を保存して，角度を変数とおいて拡張した．「(a,b,c,d) について何らかの角度関係を満たせば，(20,60 ,50,30) 以外にも同様な形式で求めることができるようにできないか」と考え，証明図から，拡張し，統合したととらえる．もちろん，「ラングレーの問題」の場合も特殊な場合として含めて考えられる．

以上より，「ラングレーの問題」に対しての先行研究には，問題を解くことだけでなく，何か新しい観点で「統合」しようとしていることがわかる．よって「統合」しようという精神的な支えがあっておこなわれる創造的な活動であり，特に，証明で現れる等しい五辺を保存して，角度を変数にした「拡張による統合」であるととらえる．したがって，本研究で重視したい「統合する活動」がみられる．

しかし，教育的な視点でこれらの活動をみたときには，証明で現れる等しい五辺を保存して，角度を変数にした「拡張による統合」は困難である．なぜなら，∠ｘが求まるまでの過程が長すぎるからである．そのような過程を知ろうとする態度は，最初の不可解な補助線を見たときに失われると考える．それならば，はじめに解法を発見したときの補助線の引き方への疑問を大切にしたい．そこで，五辺を保存して角度を変化させるのではなく，補助線を明らかにするために活動が主となるように統合する活動を工夫することとした．

２．３　教材化の方針

第２章第１節で,「ラングレーの問題」には解を求めること以外にも価値が存在することが示せた．そして第２章第２節で，先行研究を整理することで,「ラングレーの問題」に対して，数学としてのふさわしい活動として統合する活動があることがわかった．

本節では,「ラングレーの問題」に対しての統合する活動を促すため，学習指導を想定し教材化の方針を考えていく．

学習指導を想定した場合，次の図２．１３で現れる等しい五辺（AB=AE=AD=ED=EC）に着目して問題の構造全てをとらえることは困難だと考えられる．また得られた拡張をみて，問題の本質的な構造を理解することは難しいと考える．

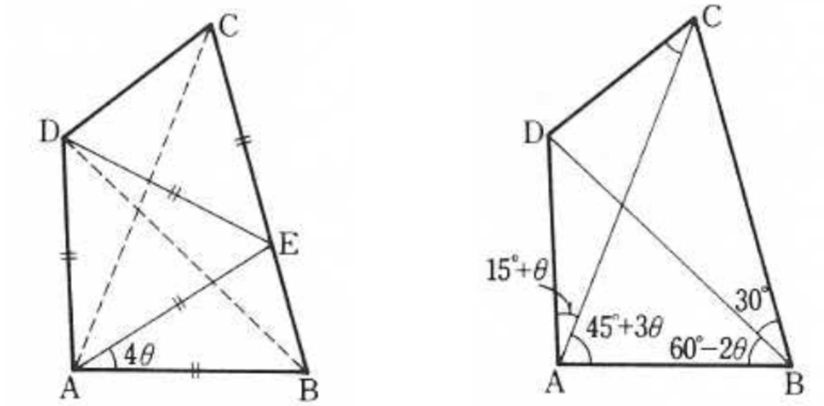


図２．１３　等しい５辺から[拡張１]を得るようす（清宮俊雄，1968，p.167）

なぜなら，その五辺に着目して，結論としている∠ x が求まるまでの過程が長すぎるからである．そのような過程を知ろうとする態度は，最初の不可解な補助線を見たときに失われると考える．それならば，はじめに解法を発見したときの補助線の引き方への疑問を大切にしたい．つまり,「このような補助線が引けてどうやら∠ x は求まるようだ，では，このような補助線とは何だろう」,「どのようなときにこの補助線が有効なのだろう」，と考えていくことが本研究での生徒に促したい統合する活動である．その疑問を解決するための方法として拡張することを促す．そして拡張し統合する活動が促されると考える．このようにして「ラングレーの問題」の補助線に着目した統合する活動が促されると考える．

つまり，学習指導を想定することで，統合する対象を，同様な∠ x が求まる問題群から，同様な補助線が引かれる問題群にする．言い換えれば，先行研究では∠ x が求まる問題として，現れる等しい五辺（AB=AE=AD=ED=EC）に着目して問題の構造全てをとらえているが，本研究では「ラングレーの問題」の補助線に着目し，特に補助線 AE に関する等しい三辺（AB=AE=EC）に着目することになる．これは生徒の疑問に沿って創造的な学習指導をするために必要な方針であると考える．

そのために２．３．１では，補助線 AE が引けることの条件を見直し，補助線 AE の本質を見直す．そして２．３．２では，見直した補助線の本質から，統合する活動の実現に向けた教材化の過程を提示する．この統合する活動を実現するための過程は，澤頭紀夫（2012）で示したものを提示する．

２．３．１　「ラングレーの問題」の補助線の本質への着目

まず，補助線 AE の本質は何なのか．これは補助線 AE が引かれた後の図から，そのときの条件を見直すことで明らかにする．補助線 AE が引かれることで，△ABC の内部に二つの二等辺三角形が存在し，等しい辺を共有していることが重要であるととらえる．

具体的には図２．１４のように条件を見直すことができる．三角形 ABC において∠CAB=60°，∠ABC=80°，∠BCA=40°である．そして辺 CB 上に点 E を AB=AE となるようにとる．すると，EC が等しくなる．つまり三角形 ABC に補助線 AE をひくことによって等しい三辺が見つかる．そこでこれを見直すと以下①-③が含まれている．

①AE=AB の二等辺三角形
②点 C,E,B がこの順で一直線上
③AE=CE の二等辺三角形

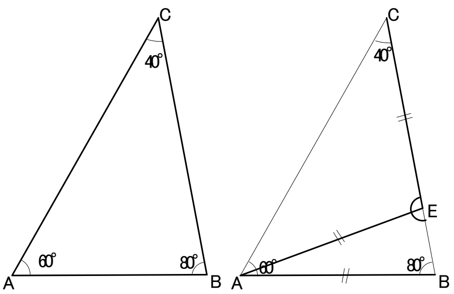


図２．１４　△ABC の内部の二つの二等辺三角形

以上のように，補助線の本質は①‐③の条件で見直されることがわかった．そしてこの中の二等辺三角形であることを保存し，角度の拡張を行い，角度の関係で表す．すると図２．１５の「∠B=２∠C の三角形」という条件があることがわかる．清宮俊雄（2005）は，「∠B=２∠C の三角形」を三角形の中で特徴的なものとして，二等辺三角形，直角三角形，そして「∠B=２∠C の三角形」というように示している．

∠B=２∠C の標題は，一角が他の角の２倍である三角形を標語的に表現したものである．三角形 ABC において∠B=２∠C とし，その三角形のもつ特徴的な性質

をいくつかをあげる．そうした性質を知っていると，問題を解く場合の補助線の引き方を考えるのにも役立つ．（中略）三角形 ABC において∠C=α，∠B＝２α とする.（中略）C から B に向かう半直線 CB 上に E を∠CAE=αにとれば∠AEB=２αで AB=AE=EC である．

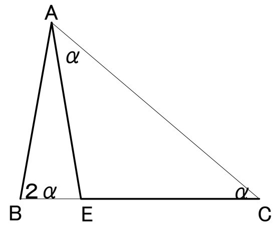


図２．１５　∠B=２∠C の三角形（清宮俊雄，2005，pp.68-69）

図２．１５の「∠B=２∠C の三角形」については直接「ラングレーの問題」との関係は述べられていなかった．しかし本稿で補助線の意味について着目して抜き出した三角形 ABC においても∠B が∠C の二倍となっていて，これにより補助線 AE がひかれると解釈できる．

つまり，第２章第１節の有名な解法の中で「等しい辺を移すような」補助線を引く考えに着目すると，先行研究での三角形の特徴「∠B=２∠C の三角形」が本質ともとらえられる．また,「ラングレーの問題」の補助線の条件のうち，二等辺三角形であることを保存し，角度の拡張を行い，中心同士を通り合う２円が見え，その円周角と中心角の関係になっていることが確認される．

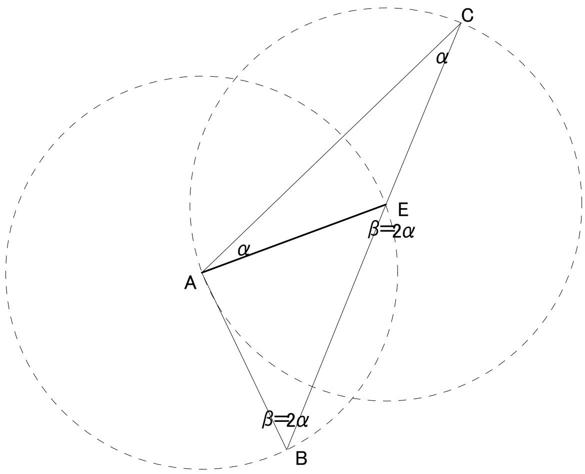


図２．１６　∠B=２∠C の三角形を２円で表わしたようす

以上より，AB=AE=EC とする補助線 AE は△ABC が「∠B=２∠C の三角形」を満たすとき引くことができると解釈した．

ここで，先行研究のような∠ｘが求まる問題を観点とした拡張と，本研究で AB=AE=EC となる補助線 AE を観点とした拡張の関係を見直す．つまり，以上のような補助線 AE を引

けることが，∠ｘが求まることになるにはどのような条件が必要なのかを探った．

このようにとらえると，あとは図２．１６で，点 D がどのような点で存在するかを考察するのみに整理できる．点 D は

①２円の交点

②点 A 中心の円周上の点

③点 E 中心の円周上の点

④２円の円周上にない点

と捉えることができる．そして①の場合が「ラングレーの問題」となる．つまり「ラングレーの問題」は，「∠B=２∠C の三角形」で補助線が引けかつ２円の交点が点 D という意味で特殊な問題であるということがいえる．①の条件は△DAE が正三角形であることと同値である．△DAE が正三角形という仮定を変えることになると

①AB=BE

②BE=EA

③EA=AB

の二等辺三角形にするということが考えられる．このように点 D の位置を変えていっても結論が変わらないかを確認する．ここで，結論とは，∠ｘが 30°であることではなく，∠ｘが求まることとして修正すると，②の場合はαで表すことができる．

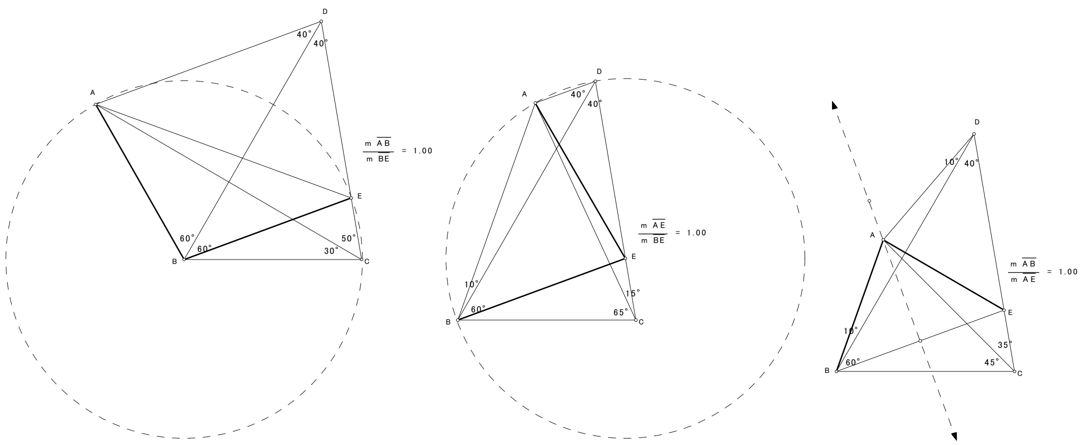


図２．１７　正三角形を二等辺三角形にした場合

すなわち図２．１７のように，正三角形△DAE を二等辺三角形であるとすると，∠ｘは 30 ﾟとは限らない．よって△ABC が「∠B=２∠C の三角形」（一角が他の角の 2 倍である三角形）であるということと，点 D が△DAE を正三角形にするような位置にあることが，「ラングレーの問題」の∠ｘが 30°で求まるような問題として拡張が得られた．

したがって，先行研究のような∠ｘが求まる問題を観点とした拡張と，本研究で AB=AE=EC となる補助線 AE を観点とした拡張の関係を見直してみると，∠ｘが求まるこ

とを観点とした拡張の中の一部として，補助線を観点とした拡張が含まれていることがわかった．

本研究で，「ラングレーの問題」の補助線に着目させることは，解を求めることの条件としては部分的である．しかし，重視している統合する活動を促すための精神的な支えは，生徒が問題の中で補助線の引き方に対する疑問から生まれると考える．したがって，このような補助線の本質を発見することが，数学としてふさわしく，かつ発達段階に合っている統合する活動だと考える．

２．３．２　統合する活動の実現に向けた教材化の過程の提示

ここまで，「ラングレーの問題」の問題の本質の一部として補助線 AE の本質を「∠B=２∠C の三角形」が角度の関係という観点として見直すことができると考えた．しかし補助線の意味は「∠B=２∠C の三角形」だと結果を教えるだけでは結局のところ生徒の考え方は育成されない．よって先行研究のような拡張する活動をする．そして拡張した後，これを見直し，生徒にとって都合のよい補助線の意味を考えさせたい．これによって生徒の疑問である補助線の意味である「∠B=２∠C の三角形」というような解決で，統合する活動をしたことを感じさせたい．つまり，角度の関係という観点で問題を統合し見直すことに価値を置いて，教材を開発する必要があると考える．角度の関係を観点として「∠B=２∠C の三角形」が補助線の意味であると統合する活動をして，問題の本質的な構造が明らかになる．また，補助線の意味を考えることは生徒の疑問である．したがってこの疑問に対して「統合」に価値観をもって指導することを教材化の方針としていた．ここでは，その促す統合する活動の具体を示す．

そのために，「ラングレーの問題」の補助線 AE から拡張して統合する活動をする考え方とその過程を示したい．補助線 AE の本質を見直した結果，

①AE=AB の二等辺三角形
②点 C,E,B がこの順で一直線上
③AE=CE の二等辺三角形

の条件があることがわかる．これを基に拡張して統合する活動をする考え方と過程を示す．

(1) 二等辺三角形の条件から点 C，B を決める過程

まず③の条件は他の場合にも成り立つ．図２．１８のように補助線 AE を固定して，AE=CE を変えないように図をかく．すると点 E からの距離が点 A と等しくなるように点 C1 が決まる．ここで点 C1 が決まると，点 B をこのままにすると四角形になってしまう．よって②の条件のように点 B を直線 CE 上にする．したがって直線 C1E 上に点 B1 決める．

ここで点 B1 は①の条件により点 A からの距離が点 E と等しくなるようにして決まる．このようにして点 C1 と点 B1 が決まり三角形 C1AB1 が以下のようにかけた．

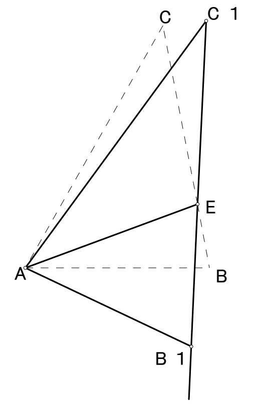


図２．１８

（2）同様にしていくつか点をとって２つの弧が見える過程

（1）と同様にしていくつか点をとっていく．すると，図２．１９のように点 C，点 B がそれぞれ円周上にあることが確認できる．すなわち点 C は点 E が中心で半径 AE の円周上にあるように見える．またこれと同時に点 B も点 C に対応して決まり，これも円周上にあるように見える．結果 2 つの弧がみえてくる．また弧の長さは 2 倍になっているようすも観察できる．

ただし②の条件で，三角形 ABC であることを保存している．これを保存すると，円周上では成り立たない．このことがこの拡張の限界である．例えば点 C が点 E を通る接線よりも左側になると，点 B が②の条件のように点 C,E,B がこの順で一直線上にならないので記号が入れ替わることになる．したがって点 C と点 B は，2 つの弧としてみられる．

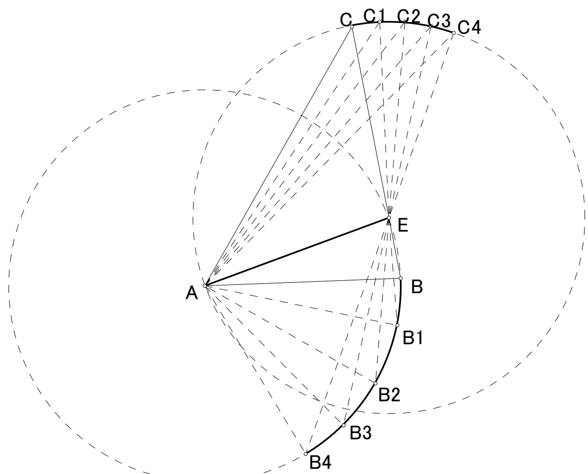


図２．１９

（3）角度の関係に観点を変更し統合する過程

ここまで，辺の長さを保存して角度を拡張してきた．ここで角度の関係に着目して考える．すると，図２．２０のように AE=CE の二等辺三角形は，底角 40°という数値から変数とみてαによって見直せる．このように，底角 40°の二等辺三角形は底角αの二等辺三角形の特殊になっているので，拡張を得ていた．そして底角αとして点 C を決め，②の条件から, 直線 CE 上に点 B が存在する. よって∠AEB=２αと見直すことが出来る. 次に AE=AB の二等辺三角形は底角 80°を底角βに見直すことが出来る．すると∠AEB=２αであることから∠ABE=β=２αである．

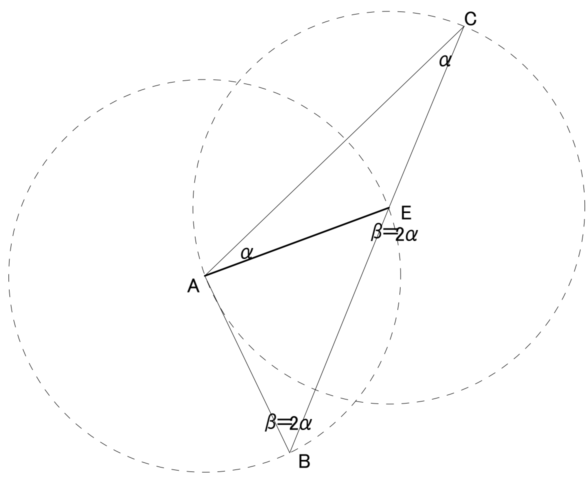


図２．２０

このように，観点を角度の関係に変更することで，変数αを使って三角形 ABC の角度を表すことができる．これで「∠B=２∠C の三角形」が補助線の意味であると統合する活動をして，問題の本質的な構造の一部として，補助線の本質が明らかになる．

以上が統合する活動の実現に向けた教材化の過程である．

第３章
統合する活動を促した授業の実際とその分析

３．０　本章の意図と構成

本章の意図は，統合する活動を促す教材を使った授業を行い，その実際から有効性を示すことである．そこでまずは第２章第３節で示した「ラングレーの問題」の教材化の方針を基に授業を設計する．次に，設計した授業を実践し，指導と生徒の活動の実際を示す．最後に，授業の実際を分析し，教材の有効性や改善を示す．

第１節では，授業設計の概要を示す．具体的には，対象設定の理由と，授業の意図を明確にする．授業は二時間扱いとし，一時間目は，現れた補助線の正体を知ろうとする態度が促されることで，二時間目は，補助線を見直しこれを満たす図形をいろいろ考え，補助線の本質を発見し統合する活動がなされることを意図とする．

第２節では，統合する活動を促す教材を使った授業を実践した際の授業プロトコルや，観察記録から，指導概要と生徒の活動の実際を示す．一時間目では，辺の長さを等しく移す指導，補助線の発見に関する指導に焦点あてた．二時間目では正三角形の作図から条件を基に修正する活動，角度を変更して図をつくり２円が現れた活動，２円の条件を整理する活動に焦点をあてる．

第３節では，第２節を踏まえ，指導と生徒の活動の実際を分析し，教材の有効性を示す．具体的には，統合する活動の促進に関する教材の有効性の量的な分析と質的な分析をする．

第４節では，生徒の実態から，教材の改善を示す．

３．１　授業設計の概要

授業は，青森県の中学校３年生の２クラスを対象に，前日に「ラングレーの問題」での角度を求めることを宿題として提示してから，それぞれの教室で，二時間扱いで行った．

授業を二時間扱いにした理由は，試行錯誤した経験の後に角が求まったという一旦の解決をするための十分な時間の確保がなければならないと考えたからである．また，解決は一時間でも困難だと判断し，あらかじめ宿題として提示し，自己活動を少しでも確保しようとした．このように時間を確保することで，一時間目での補助線の意味を知ろうとする態度が促され，さらには二時間目で統合する活動を促すことをねらっている．

以下，授業の対象設定の理由と，それぞれの時間の意図を示す．

３．１．１　中学校３年生を対象とした理由

第２章第３節では，学習指導を想定し，「ラングレーの問題」の補助線の本質に着目することで，統合する活動の実現に向けた教材化の過程を提示した．これは生徒の疑問に沿って構築した「統合」という観点に価値を置いた創造的な活動をするために必要な教材化の方針である．具体的には，補助線の本質を等しい３辺として保存し，角度を拡張することで，補助線 AE を２円の中心線として見直して統合したり，△ABC を抜き出してみると円周角と中心角の関係から「∠B＝２∠C の三角形」として見直して統合したりすることができる活動であった．

この活動を実現するためには，中学校３年生の「円周角の定理」が成り立つかどうか調べる際に行われている以下のような学習が必要になるととらえる．すると，教科書で，１つの弧に対する円周角の大きさは一定であることの証明を考える際に以下のように示される．

Q　下の図は，弧 AB に対する円周角∠APB を，点 P の位置を変えてかき，それを分けて示したものです．（ア），（イ）の図で，△OPA と△OPB について，点 P が動いても変わらないことがらは何でしょうか．（新しい数学３，2012，p.170）

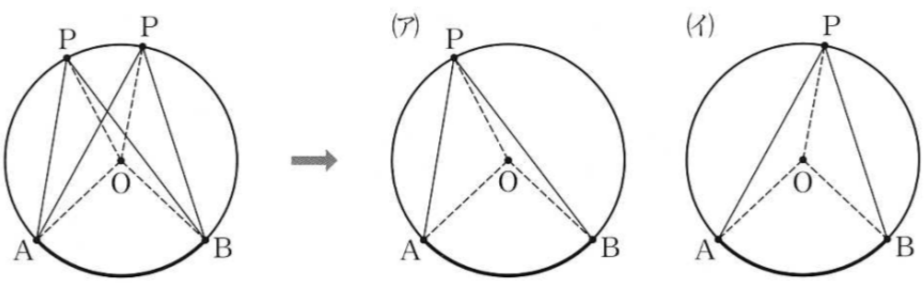


図３．１　円の半径に着目させる問い（新しい数学３，2012，p.170）

教科書では，円の中心の作図をさせ，同じ弧に対する円周角となるような角をいくつかかかせてから，円周角を定義し，図３．１のように Q が示されている．これにより（ア）と（イ）の場合の円周角から，変わらないものとして半径 OP を考えることができる．そしてそれは，二等辺三角形であることに気付かせ，底角が等しいことに気付かせる．つまり，円周角を∠APB としたときに,∠APB が等しいかどうか探るために,条件を満たす図形(ア)と（イ）を提示し，動かしても変わらないものが何かがきかれている．

筆者は以上の教科書の問題を，円周角という角を定義した後で，その角の条件を見直し，変わらないことがらに着目させるために，角度を変更した図が提示される問題ととらえる．

「ラングレーの問題」を題材とした本教材は，角度を変更した図を実際につくってみる過程で，変わらないことがらは何か，と同時に，変えてもよいことがらは何か，を考えることを想定している．よって，変わらないものに着目して定理を証明しようとしたこの学習が大きくかかわるととらえる．したがって，実践授業は,「円周角の定理」を学習した中学校３年生を対象に行う．

３．１．２　補助線の本質への着目を志向した授業の意図

一時間目の授業の最も重要な意図は，生徒が問題を解決しようと既習の内容を利用し試行錯誤をして，現れた補助線の正体を知ろうとする態度が促されることである．次にそのことを具体的に示す．

まず,「ラングレーの問題」をそのまま解決させる．すると，例えば，平行線を引くといったアイデアが多く生まれることが予想される．ただ，平行線を引く考えでこの問題に取り組む２．１．３の解法は，非常に困難な解法で，結果，解は求まらないだろう．また，延長線で二等辺三角形をつくることも予想される．ここからの解法として２．１．２があったが，これも困難であると予想される．以上の理由から，生徒から反応が見られない場合には，生徒の様子をよく観察しながら，必要最低限の誘導をするように努める．その一つの手立てとして，辺を等しく移動する見方を強調することがある．辺を等しく移動することで，二等辺三角形が作られ，等しい辺が新たに発見でき，問題が解けるという意識を持たせる．また二等辺三角形を作る反応があった場合は一つ試して諦めずに他にも試すように誘導する．また，この試行錯誤を促す手立てとして，ワークシート（資料③）には多くの「ラングレーの問題」を載せ，生徒が考えを消さなくてすむようにする．このようにしてよく生徒の試行錯誤の様子を見ながら，等しい辺に着目した解決過程が望める２．１．１での解法に現れる補助線 AE を発見させることに導く．

そこで，授業の終盤，補助線 AE が発見された際には,「ラングレーの問題」にもともと存在する等しい辺（AB=AD）を利用して，辺を等しく移動させたために現れた補助線（AB=AD=AE）であることを確認する．しかし，補助線を引いた結果は，等しい辺が５本

発見される．(AB=AD=AE=EC=DE）という事実から意図的に引いた３辺（AB=AD=AE）と，そうでない２辺（EC=DE）があることに気付いてもらう．つまり，今引いた補助線の役割の中で，引いた本人にさえ理解されていないことがあると感じさせたいと考える．なお，一時間目の学習指導案は資料②に示す.

３．１．３　補助線を２円の中心線とし△ABC を「∠B＝２∠C の三角形」として統合する活動を促す授業の意図

３．１．２で示した一時間目の授業には，等しい辺に着目した解決過程を経験することで，意図しない等しい辺がなぜ存在するのかに疑問を持ってもらう意図があった.

二時間目の授業の最も重要な意図は，一時間目の，意図しない等しい辺がなぜ存在するのかという疑問を解決するために，補助線を見直して，これを満たす図形をいろいろ考え，補助線の本質を発見し，統合する活動がなされることである．次にこのことを具体的に示す.

まず，どのようにしてその本質を探すのか．この方法は，角度を変数としてとらえて，角度を変えることによってできる図をかくこと，すなわち拡張することである．これを促す手立てとしては，補助線を含む図形として，四角形 ABCD の中から△ABC を抜き出して補助線 AE を引く．そしてその中で補助線 AE を見直し，三辺が等しくなることを確認する．ここから，三辺がいつも等しくなるような△ABC はどのようにつくられるのか考えさせる．このために，等しい辺を保存した△ABC をいろいろつくる作業を取り入れることになる．ただし，その過程で，定規の目盛の使用や，分度器の使用を認めるため，作図ではなく，図形をつくるという表し方をする．ワークシートには以上のような目標と，補助線 AE だけを載せる（資料⑤）．それを基に，三辺が等しくなるような△ABC をつくる作業をしてもらう．

そこで，△ABC をいろいろつくる過程あるいは結果から，いろいろつくった△ABC の補助線 AE を２円の中心線として統合する活動を実現したい．また，いろいろつくった△ABC について角度に着目すると，円周角と中心角の関係から，△ABC を「∠B=２∠C の三角形」として統合する活動を実現したい．なお，二時間目の学習指導案は資料④に示す.

３．２　指導の概要と生徒の活動の実際

３．１で示した授業の意図を踏まえ実践した授業の中で，指導の概要と生徒の活動の実際を示す．なお授業プロトコルは資料⑥である．

３．２．１　補助線の本質への着目をねらった指導と生徒の活動の実際

（１）　辺の長さを等しく移すことを促す指導と生徒の活動

一時間目の授業の指導の概要と生徒の活動の実際を示す．指導の概要は以下である．

課題を提示すると，宿題でも提示していた分，問題についての質問はなかった．(また，何人かの生徒は，塾で正答を教わってきていたようだった.）そこでいくつか，求まった角度の確認をした．すると，∠ADB=50°と∠ACB=40°，また対角線のなす角度 70°，110°は埋めていけた．そして，等しい辺の存在に着目することを狙って，ほかに何かわかったことはないかということを質問した．すると，△ABD が二等辺三角形であるといったこちらが着目してほしい言葉が出てきたので，それをひろい，黒板の図にも強調した．その際に，二等辺三角形になる条件を確認した．そして，ここから補助線を引いて考えるということを確認し，小グループを構成し，補助線を探すといった活動を始めた．

すると，多くの生徒の考えである，平行線を引くことが流行した．どこに平行線を引けばよいのかという方針で生徒が活動を始めたのである．そこで，こちらから，「等しい辺を移動して考えましょう」と指導した．

この指導に対しての生徒の活動の実際は次のとおりである．つまり，等しい辺を移動して考えることを指導することで，問題に対してどのような活動があったのか整理する．ワークシート（資料③）には複数の同じ図を６つ載せ，枚数も多めに配った．これは生徒が自分の考えを消さないで，いくつも試してもらうためという意図があった．このワークシートを分析する．まずは，生徒の活動を分類し，分析をする．以下①～③は，生徒に多く見られた活動の分類である．

①　AB=AD の等しい辺を二等辺三角形で移動する活動

図３．２のように，二等辺三角形をつくって，移動している活動が見られた．そして図３．３は正答となる補助線を発見した生徒のワークシートである．はじめは AC 上に移しているが BC 上にも同様に移せることに気付いていった．また，正三角形で移動させる生徒も数多くいた．

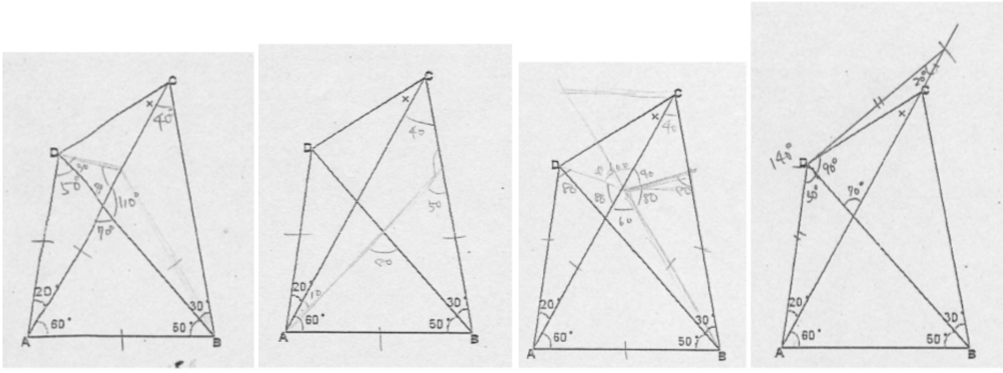


図３．　２　AB=AD の等しい辺を移動した生徒

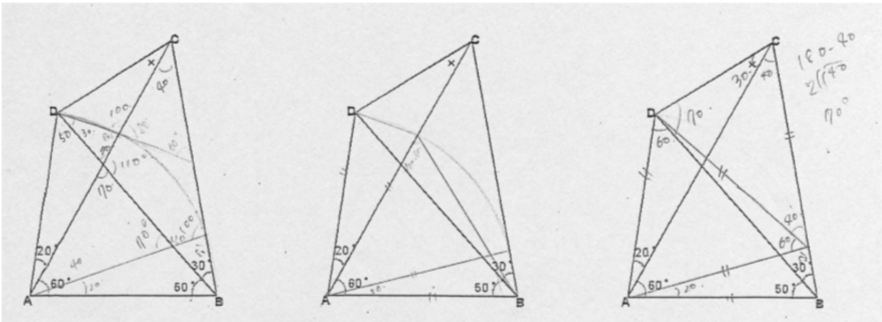


図３．　３　補助線 AE を見つけた生徒の解決過程

また図３．４は，はじめに BC 上に移したものである．この移し方は生徒が試しに移したものであるが，実際は正答と同じである．しかし，底角が求まらないため断念していた．つまり，AE の長さが等しいかわからないために見通しが立たなかったと推測される．

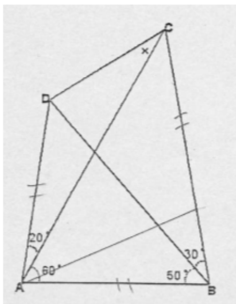


図３．　４　AB=AD の等しい辺を BC 上に移した生徒

②　AC を移動する活動

図３．５は２．１．２で示した大きな二等辺三角形と合同の解法の中の等しい辺である AC を移動しようとしたと推測されるものである．正三角形を利用しようとして，移す方向が点 B 側ではなくて点 D 側であったなら，別解となっていたような生徒もいた．

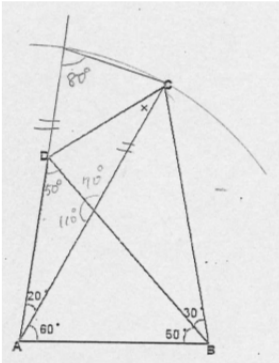


図３．　5　AC を移動した生徒

③　AB=AD の二等辺三角形の等辺ではない二等辺三角形で移動する活動

図３．６の生徒たちは，着目させたい等しい辺ではないが，移動して考えている例である．∠ｘの周りでの活動が多いことから，∠ｘの周りに移動するといいのかもしれないと考えたと推測される．

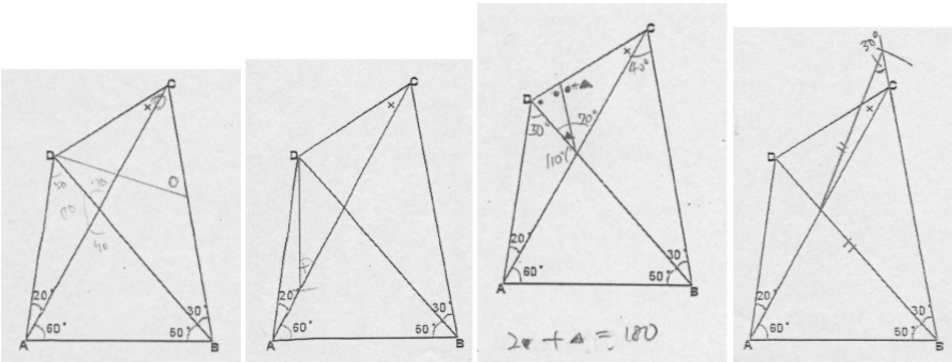


図３．　6　AB=AD の二等辺三角形の等辺ではない二等辺三角形で移動する活動

またこの中で，対称移動の考えがあったと推測できるのが図３．７である．この場合，移す前の辺が存在していないのが特徴だと考えられる．BD の垂直二等分線を引いた痕跡があることから，等しい辺を，線対称な図形を基に作図したことがわかる．これも既習を活かした活動であるととらえられる．また，線対称移動の他にも，正三角形，平行四辺形で等しい辺を移動したものがあった．

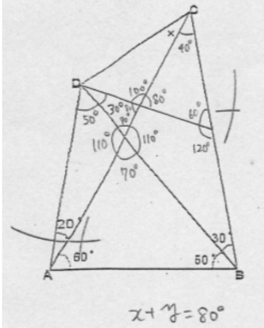


図３．　7　同時に等しい辺の組を移動する活動

以上のように生徒の活動の実際には，①～③の反応があったことがわかった．

（２）　補助線の発見に関する指導と生徒の活動

では次に，これによって補助線 AE を発見した後の指導の概要と生徒の活動の実際を示す．指導の概要は以下のようだった．まず，補助線 AE を引けた生徒にどこに引いたのかを聞いて，黒板に示した．ここで，生徒にどうして引いたのかをきくと，二等辺三角形だからという回答だった．なので，筆者が，二等辺三角形がもとからあったわけではなく，今自分で作ったんですよねと確認した．補助線 AE がひけた後に，あとどのようにすればいいかときくと，そこからは正答となる回答がかえってきたので，それを黒板でも示した．以下がそのプロトコル（資料⑥）である．以下の生徒と教師の応答における補助線を説明する場面では，等しい辺を移動して考えたと説明を S21 が発言している．そして，これを最後の T25 でまた確認したのは意図して引いたことを強調するためである．

T19：　では，せっかくなのでさっき名前を覚えた人から聞きましょうか．T 君，どこに補助線を引きました？
S19：　（ジェスチャーでななめにひく）
T20：　どこから引きました？
S20：　角 A から
T21：　A から？
S21：　長さが AB と等しくなるように移した
T22：　（図に定規をあてながら）上に？下に？
S22：　上に移した
T23：　（長さを計って図に等しい辺を書き込んだ）はい，このような AE が引かれているでしょうか？このような線を引くとどんなことがいえるのでしょうか？
S23：　（∠EAB が）20°，（∠AEB が）80°
T24：　なんで？（書き込みながら）
S24：　二等辺三角形だから
T25：　はい，今自分で，等しい辺を移動して二等辺三角形を作ったんですから，当然底角は等しいですよね．このほかにはどうでしょうか？

この後は以下のように∠ x が求まった．

S25：　B と D を結ぶ
T26：　するとどうなるんですか？（書き込みながら）

S26：　正三角形ができる

T27：　なぜ？

S27：　（グループで確認しながら）AD と AB が同じだから…まず，さっきの二等辺三角形によって，頂角が 20゜になって，全部で 80゜だから，それから引くと，∠DAE が 60゜になるはずです.

T28：　なるほど，それで，この三角形は？

S28：　正三角形

T29：　いいですね，他には？

S29：　△CAE が二等辺三角形

T30：　角が？

S30：　40゜

T31：　なんででしょう？（△CDE を抜き出し板書しながら）ここまで来て，まだって人もいます．助けてください.

S31：　AE と CE の長さが同じなので，AE と DE の長さも同じなので，つまりは DE と CE の長さは等しい．そっから…

T32：　あとどこがわかればいいんだろう？

S32：　（何人かが）∠CED

S33：　∠CED が 40゜になる．それで，∠ECD と∠EDC は同じ角になるので，180゜から 40゜を引いて，それを半分にすれば，同じ角は 70゜になる．最初に 40゜はあったので，40゜＋ｘが 70゜なので， ｘは 30゜

このようにはじめは, S26 が正三角形になることを発言している. これを S27 が AD=AB であることと，∠DAE が 60゜であるかと説明がされ，正三角形であることは理解されたと判断した．そこで T29 で次へ進む発問をした．すると S29 のように△CAE が発言された．これから，理由を聞くと，しばらくして S31 が AE=CE と AE=DE から DE=CE を示してくれた．その後，二等辺三角形△CDE の底角を求め∠ｘが求まった．求まって喜ぶ生徒が多かった．注意深く観察したが，生徒は解を得て満足していた．そこで次に T33 で以下のように発言し，等しい辺に着目することをねらった.

T33：　ありがとう．ここまでいいかな？なんか，等しい辺をとったら，新しく等しい辺が見つかっていき，最後には∠ｘが求まりました．ここで皆さんに考えてほしいことがあります．今等しい辺を取りましたよね．はじめの方はわかるんです．でも，こっちの予期しないところにも等しい辺が出てきてませんか？つまりはこれ，EC です．これって突然出てきたように感じませんでした？

S34：　（何人か頷く）

T34：　もしも，この突然に，何か意味があって引けたものだったら嬉しくないですか？何かの理由があって，だからここに引くんだよと．次の時間にはその意味を探しましょう．一旦休み時間入ってください．

T34 には以下のような意図があった．問題に対しての補助線と解が求まった．それを再確認しながら，生徒の反応に注意して観察した．すると，ほとんどの生徒が解が求まって終わったという感じでいた．そこで，T33 で，補助線が突然出現しませんでしたかときいた．つまり，補助線によって予期している辺と予期しない辺があって，特に辺 EC は予期していなかったのではないかと聞いた．すると多くの生徒は，頷いていたので，T34 のように，補助線が発見された後にその意味を探すことの価値を強調した．

３．２．２　統合する活動を促した指導の概要と生徒の活動の実際

（１）　正三角形の作図から条件を基に修正する活動

はじめに，前の時間で等しい辺を移動するときの方法を確認した．具体的には，長さを定規で測ることはせずに，コンパスで測り取るべきであることである．したがって，授業の意図とは異なるが，図をつくるとはせずに，作図するということにした．次に，補助線をもう一度黒板の図に引いてみた．その際に，生徒の図形は四角形のままであることを考慮しながら，補助線が引かれる△ABC を抜き出した．そして，引かれた後の等しい長さを確認した．つまり，等しい三辺 AB=AE=EC を確認した．そして，これからその三辺がどうして等しくなるのかを考えるということを念押しした．そのための方法は，三辺が等しくなるような△ABC をいろいろつくることであるということを確認し課題提示した．ワークシート（資料⑤）を配り，しばらく考えてから，生徒の活動がはじまった．

以上のような指導による生徒の活動の実際を次に示す．つまり，三辺が等しくなる△ABC をどのようにつくったのかみていく．生徒の多くが行ったはじめの活動は，図３．８のようにコンパスを使用して AE を一辺とする正三角形を作図することであった．三辺が等しいという条件で予想したと推測される．そして補助線の条件を確認しながら，少しずつ修正していった．その確認の方法として，予想図をワークシートの隅にかいていた．具体的には，図３．９の通りで，はじめに△ABC を写し取る．そして，点 A に針を置いて AB=AE であることを確認して，実際のワークシートにもどって AB=AE となるように点 B を作図していた．

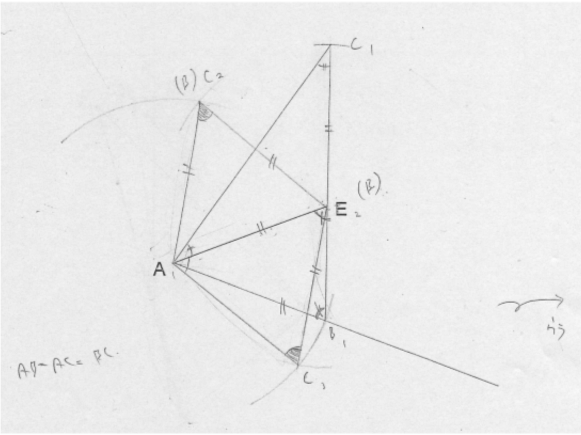


図３．８　正三角形を作図した生徒

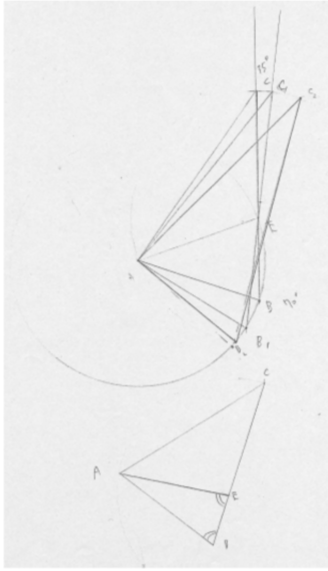


図３．９　予想図をはじめにかいていた生徒

（２）　角度を変更して図をつくり２円が現れた活動

また，しばらくしてから様子をみて，活動に具体性をもたせるために，変えるものについての発問 T2 をした.

S1：　（配布後，自己活動）
T2：　はい，じゃあ一つ例を見せちゃいます．今，AE があって，点 B をとります．
　　　長さは変えないんですが，何かを変えてますね？
S2：　（反応薄）
T3：　長さは変えずに，AE と AC の間の？
S3：　角度？
T4：　うん，角度を変えていきます．さっきは 20°でしたが，それを変えましょう．次に，B と E を結んでください．そしてその直線上に，C をとって，△ABC が作れましたね．長さは変えずに，逆に角度を変えて作ることが出来ます．
　　　はい，じゃあいろいろ作って探していきましょう．
S4：　（活動再開）

以上のような指導を行い，生徒が角度を変更して，作図を行うことで，２つの円の中心を結んだ線分であるという補助線の意味を発見し統合する活動をねらった．すると，角度を変更することを強調した方が，多くの生徒が△ABC の作図ができるようになった．またそのワークシートから∠EAB=20゜ではなく，30゜にしてみるといった具体的な作図をし始める生徒が現れた．そしてこのようすを観察していると，ここから延長線を引いて等しい長さで C を決めて△ABC をつくる活動は，ものの数分でできていた．またこの活動をくり

返して，図３．１０のように熱心に多くの作図をする生徒も現れた．

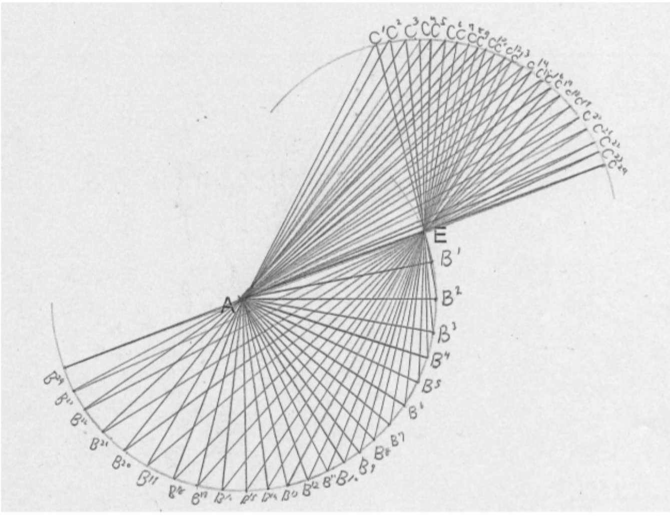


図３． 10　いろいろな△ABC を作図した生徒

複数個かかれていることを確認して，全体に問題に隠れていた図形は何か，補助線の正体は何かきいた．

T15：　それでは聞いていこうと思います．問題に隠れていた図形はなんですか？
S15：　円
T16：　円？どんな円ですか？円を説明するときは中心が必要ですね．
S16：　中心 A，半径 AE
T17：　（黒板に円を作図）あとは？
S17：　中心 E，半径 AE
T18：　（黒板に円を作図）ということで隠れていた図形は？
S18：　AE を半径とする２円
T19：　そうですね，つまり半径の長さが等しい２円です．じゃあ補助線はどのような線でしょうか？
S19：　中心 A と E を結んだ線

すると，S18 のようにAEを半径とする2円という言葉がかえってきた．中心や半径をきいていって，その2円が半径が同じであることが確認された．
また同時に S18 は，補助線はその２円の共通の半径であったことも発言している．ここで，コンパスを配って，角度についてもなにかいえないか確かめさせた．すると，三角形の角度について，二倍であることが確認された．最後に，元の問題でも△ABC は二倍の角度をもつ三角形だったと見直して，授業の感想をかいてもらった．

以上のように，△ABC をいろいろつくる過程あるいは結果から，△ABC の補助線 AE を２円の中心線として見直した活動がなされたといえる．

（３）　２円の条件を整理する活動

（２）の活動の過程で以下の二つの質問があった．一つは，頂点に関する質問である．具体的には，点 B，E，C の順番についてである ．ここで，元の△ABC の順に合わせようということで，順番について決まりをつくった．その生徒のワークシートは以下で示す．

具体的には図３．１１のように，はじめに B，E，C の順について整理していた生徒がいた．以下は，質問した生徒のワークシートである．一番右の図で，三辺が等しいという条件を整理している．そこではじめて，今考えている等しい三辺が生徒の中で理解されたととらえられる．これより，黒板でも等しい三辺を確認し，E が BC 上であることを確認した．

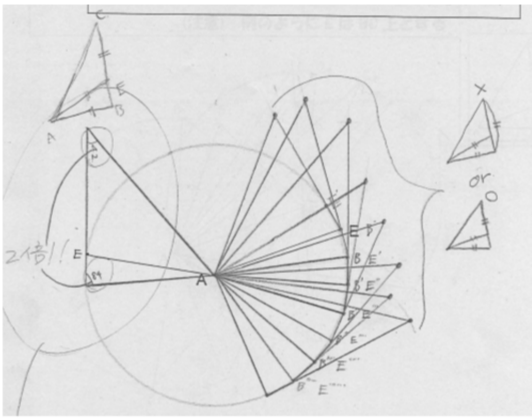


図３．　11　点の位置関係を考えている生徒

二つ目が，一直線上になるときの質問である．この質問をした生徒のワークシートを以下に示す．図３．１２の生徒は，特殊な場合として，B が直線 AE の延長上の場合を考えていた．すると，B４と E を結んで，また等しい距離に C４がとらている．この場合，△ABC とはならないが三辺が等しい．

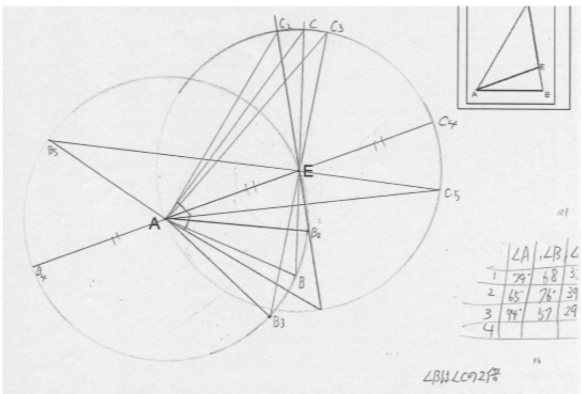


図３．　12　一直線上になるときを考えた生徒

３．３　教材の有効性

本研究の目的は，統合する活動を促す教材開発である．そこで統合する活動とは，第１章で先行研究を基に，数学的活動の一つに位置付けた，「統合」に観点をもった創造的な活動であった．すると今回の授業実践の中で，生徒は△ABC を１本の補助線の条件を基にしてつくり，それを複数つくることができた．これは，生徒が疑問だと感じるだろう部分として補助線を抜き出して提示したから達成できた統合する活動だととらえる．また，いくつかの△ABC をつくってみる過程で，２つの円が同時に現れることを体験させ，補助線を見直せたこともこの教材のよさだったととらえる．つまり，統合する活動の場の設定に関しては達成できたととらえる．

第３章第２節では，指導の概要と生徒の活動の実際が示された．ここではその中から，本研究における統合する活動を促す教材の有効性を分析する．するとはじめに３．２．２の結果より，生徒は，着目した補助線を基にして，図形をつくる活動は経験したととらえる．また，この活動の過程で，図３．１９で示したように，点の位置関係について考えている生徒がいたことと，図３．２０に示した一直線上にある場合を考えていた生徒がいて，これを生徒とともに修正していく過程は，補助線の条件から，適用範囲を広げようとした活動ととらえられる．このことから，統合する活動の表れであるととらえる．

次に量的に分析する．

（１）　統合する活動の促進に関する教材の有効性の量的な分析

生徒がどれくらい△ABC をつくることができたのか，２円を発見することができたのかワークシート（資料⑤）を基に量的に分析する．すると，以下の表３．１のようになった．一クラス目のワークシートは４０名分を調べ，二クラス目のワークシートは３７名分調べた．

表３．１　△ABC をいろいろつくることができたかどうか

	１クラス目　計４０名	２クラス目　計３７名
△ABC を複数個つくれた生徒	33 名	３３名
△ABC を１つのみ，またはつくれなかった生徒	７名	４名

量的に見れば，△ABC を複数個つくる活動は，８割以上の生徒が達成していた．また以下の表３．２は，表３．１で△ABC を複数個つくれた生徒のうち，円を発見していたかどうかを分析する．

表３．２　２つの円がかかれていたかどうか

	１クラス目　計３３名	２クラス目　計３３名
２円がかかれていた生徒	２７名	２９名
２円がかかれていない生徒	６名	４名

これも量的に見れば，２円が図に現れた経験をした生徒は５６名で，全体の生徒７７名の７割以上であった．次にこれを質的に分析する．

（２）　統合する活動の促進に関する教材の有効性の質的な分析

質的に分析していく．本研究の目的として，生徒の価値観を多様にもたせることがあった．そのため，数学の特性を活かした「統合」という観点に価値を置いた創造的な活動としての統合する活動を促した教材を開発し，実践した．そのためこの授業によって生徒の価値観がどのように変容したのかを明らかにして，実証しなければならない．よってここでは，この授業をとおして生徒からどのような授業の感想の記述があったのかを示すことで明らかにする．わかったことや気付いたこと，感想をかいてもらったワークシート（資料⑤）を分析すると以下のような記述があり，成果があったととらえる．

まず，授業を通して伝えたかったことでもあった，問題を解くこと以外の「統合」という観点を見出したとみられる生徒からは以下のような感想が確認できた．

・全く関係の無いような図形にも，円が含まれていることが分かった．根拠があるとすっきりした．また，図形の角にも法則があることがわかり，面白かった．
・偶然じゃなく，ちゃんと理由があって辺が等しくなってたんだとわかって感動した．とてもおもしろかった．
・補助線にも秘密があって，驚いた．今までは何も考えずに引いていた補助線だが，これからはどういう性質をもっているか気にするようにする．興味深かった．
・三角形から円が出てきて，数学は美しいなあと思った．円を使うアイデアは自分の中にはなかったので，これからこのような問題を見たときに使えるようにしたい．
・今まで習ったことを活かした問題など，やっていて自分が進化していることを実感できた．ただ問題をとくだけではなく，こういった問題に挑戦するのも面白いと思う．

以上のように，補助線についての正体がわかってよかったという，統合する活動の結果の部分への感想が多かった．すなわち２円での問題の見直せたことや，二倍の角度をもった△ABC の発見に対しての感想が数多くあった．

一方で，この問題が解けたときの感動もやはり大きなもので，特に自分の力で解けた生

徒は，そのことを重視し，なおかつ「統合」という観点にも価値を置いている．

・補助線の正体を探すのも楽しかったけど，∠x を求めるのがとても楽しかった．求められたときはとても嬉しかった．性質を見つけるのは面白かったです．

また，以下のように，結果を得る過程自体に価値を見出す生徒も多かった．

・図形をかいたり秘密を探れて楽しかったです．
・最初の角 x が円周角と関係があるとは思いませんでした．その図形の内だけで考えず，外側にも目を向けることが大切だと思いました．
・角や補助線の正体とか特徴が分かり面白かったです．いろいろ試しながらしたのでよく考えることができました本当に楽しかったです．
・AB=AE=EC となる△ABC をたくさんかいてみて，∠B が∠C の二倍であるときにつくられるという結果が得られてすっきりした．もっと特殊な三角形も探してみたいと思った．

以上のように，根拠を探ることだとか，図形の外側にも目を向けることだとか，まさに拡張のことを言い当てている生徒もいた．授業を通して，これからも発展的に数学を楽しんでいけるような感想をもった生徒も多くいた．中でも表３．１で，△ABC を複数個つくることができなかった生徒の感想にも，一つの△ABC をつくることで，以下のように過程自体を楽しんでいることがわかったことは成果だととらえる．

・補助線が何なのかが見えてくることによって，半径がどこも等しいことから点 B をどこに打っても，E をとおるようにつなげば△ABC を作れるようになることに気付けて，なるほどと思った．

この生徒にとって，課題に対しての解答よりも，経験した活動に価値観が生まれたのだと考えられる．

３．４　指導の改善

（１）　「ラングレーの問題」の補助線の本質が１つではないこと

指導の改善として「ラングレーの問題」の補助線について生徒がどのような認識を持っているのかを把握できていなかったことが挙げられる．そもそも生徒にとって「ラングレーの問題」はどのように見えるのか．問題に対しての取り組みはどのようになされるのか．正答となる補助線は本当に困難なのか．本研究では，この問題にそのまま直面した時の生徒の実態を整理しなければならないと考える．よってまず授業前に提示した宿題（資料①）から生徒の実態を明らかにする．その視点は，既習とのかかわりとする．具体的には，問題に引かれた補助線によって分類する．これは，解決に至っていないものがほとんどではあるが，この問題に対してどのような考えが生まれたのかを整理することで，既習とのかかわりを明らかにすることをねらっている．すると，①平行線，②延長線，③垂線，④外接円の四つの既習事項を含んだ生徒の考えがみられた．

①　平行線

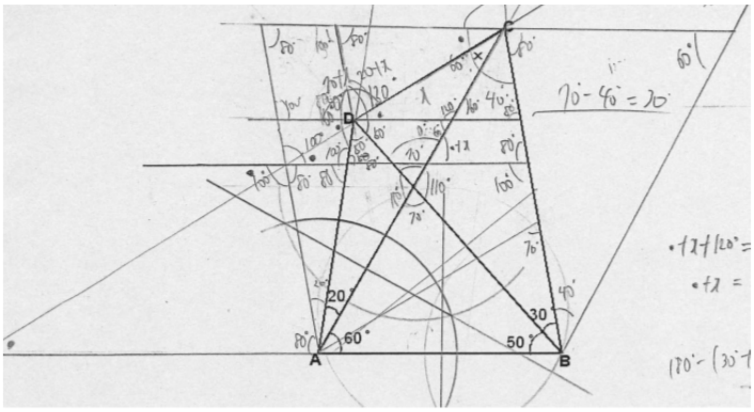


図３．　13　平行線を引いて考えた宿題

補助線で一番多かったのは，平行線を引く補助線である．２クラス合計７５名中２６名の生徒がこの補助線で取り組んでいる．一言で平行線を引くという補助線といってもそこにはいろいろなものがあった．四角形 ABCD は，対角線を含め，６本の線分で構成されている．このうちのいくつかの線分に対して，平行な直線を補助線としている．図３．１３のように考えた生徒も，AB に対しての平行線が３本確認できる．そして，四角形の頂点 C や頂点 D を通るように引かれている．これによって，平行線の同位角・錯角は等しいということを利用している．つまり，角度を求める場合に，生徒の経験上最も有効だと考えられているのが，平行線を引いて等しい角度を発見する方法であることがわかる．また，この補助線の場合，平行線を二組以上引いて考えている場合もあった．しかし，そのように

して引いていって，解決までたどり着く生徒はいなかった．これは，補助線を引いても特殊な関係が見つからないからだろう．

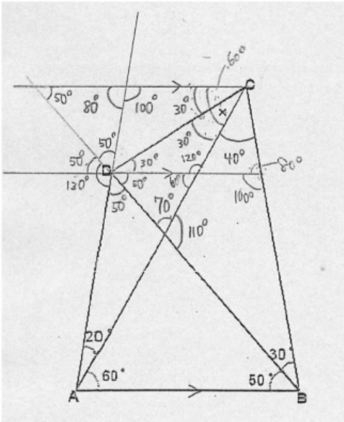


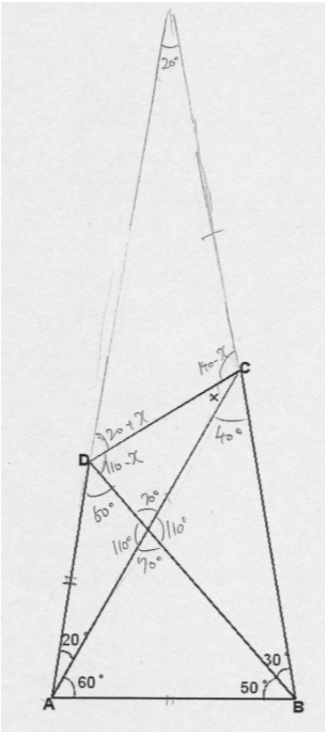
図３．　14　二等辺三角形を仮定して平行線を引いた宿題

何人かの生徒は, 図３．１４のように（説明のため点 D を通った AB の平行線を引き，AC との交点を E とする）△ECD が二等辺三角形なら∠ x が求まると言っていた．つまり，平行線を引いて，ある特殊な条件を仮定し，それが成り立つ場合を考えようとしていた．だがこの場合には二等辺三角形であることをを示せなかったので，解にはならなかったということである．解にはならなかったが，見通しをもって取り組んでいるようすだった．

以上から，平行線を引くということは，この問題に対して現れる既習の考えであることがわかった．

②　延長線

次に多かったのは，複数の線分を延長して交点をとる補助線である．そしてそこに現れる特別な関係を発見する．図３．１５は，９名が行っていた補助線であった．AD と BC を延長し，交わった点を E とすると，EA=EB を発見している．また CE＝CA を発見している生徒もいた．また，延長する線分は別な組み合わせもあった．解決には至らなかった．この補助線を引いたのはなぜかを個別で聞いてみたところ，なんとなくという意見が多かった．中には，∠DAB と∠CBA が等しいからと答えも挙がった．後者の場合は，二等辺三角形になるための条件という既習とのかかわりがあるとは言える．しかし，前者の場合は，図の向きが AB を底辺として示されていたため, この二辺を選んで延長したのかもしれない．よって，図の向きを変えて示した場合には，なんとなくという意見の生徒が AD と BC を延長するのかは不明である．ただ，どちらの場合でも，延長線という考えが生まれ，問題に取り組んでいた．



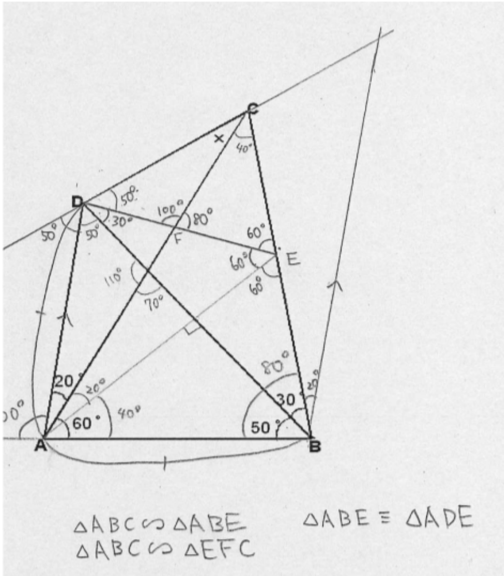


図３．　15　延長して二等辺三角形を宿題　図３．　16　垂線を引いて考えた宿題

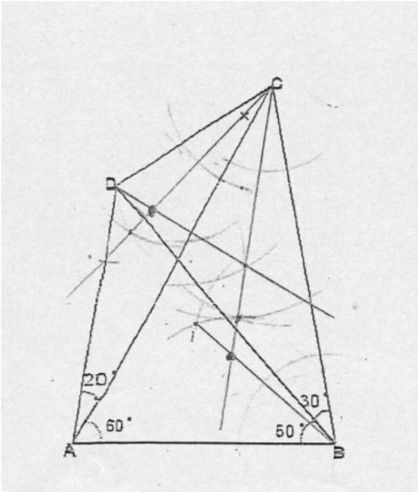
③　垂線

５名の生徒が引いていたのは，垂線であった．垂線を引いて，何か特別な関係を探していた．すると，ある生徒は，図３．１６のようにＡからBDに垂線をおろしていた．（垂線の足を　E　としている）そして，生徒の下のメモにある通り，△ABC　と相似な△ABE，△EFC を発見していた．（E と D を結び，AC との交点を F としている）また，△ABC と合同な△ADE を発見していた．

以上のような生徒がいたことから，垂線を引いて，相似な三角形や合同な三角形を発見することが生徒から生まれた考えであることがわかった．つまり，垂線を引く考えは，この問題に対して現れる既習であることがわかった．

④　角の二等分線

４名の生徒が引いていたのは角の二等分線だった．図３．１７のように，複数の角の二等分線を引いている生徒もいた．具体的には，∠B，∠ACB，∠ｘ，∠CDA の二等分線を引いている．また，第２章で示した別解の中の角の二等分線を利用した解法２．１．４でも現れた△ABC の内心を作図していることが推測される．



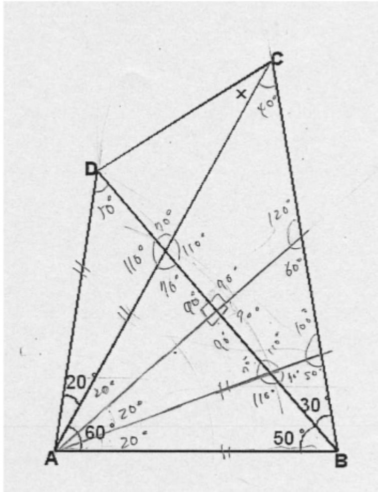


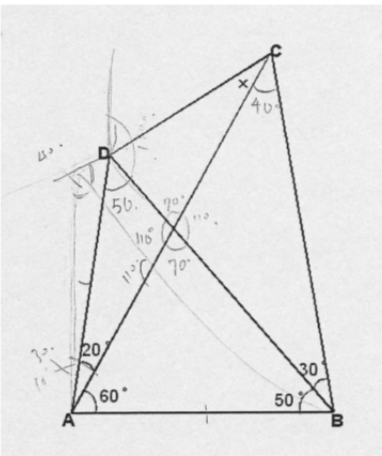
図３． 17 角の二等分線を考えた宿題図３． 18 角の二等分線から等しい辺を発見した宿題

中でも，図３．１８の生徒は，∠A の二等分線を引くことによって，最終的に AB と長さが等しい補助線を発見していた．具体的には，∠A の二等分線を二度引いて，四等分にしてひくことによって第２章で示した有名な解法による補助線が見つけられている．

どちらの例の場合でも，この問題に対して，角の二等分線を補助線として引くことが自発的に行われている．よって角の二等分線は，この問題に対して現れる既習であることがわかった．

⑤　外接円

４名の生徒が考えた補助線は，外接円であった．図３．１９のように考えた生徒がいた．具体的には，まず△ABC の外接円を考えていた．次に，D が円周上にないことを指摘して，もしあったなら，CD の延長上に，円周角が 40゜となるようにとれるとしていた．このように D を決め直し，円周角の定理を利用して，角度を求めようとしていた．しかしこの場合は求まりはしなかった．



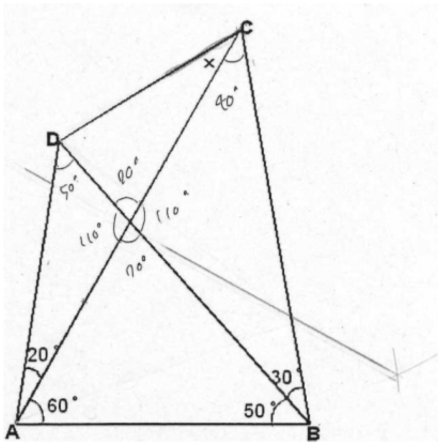


図３． 19　外接円を考えた宿題　　図３． 20　外接円によって発見した宿題

他に，△ABD や，△CDB，△CDX（対角線の交点を X とする）の外接円を考え，円周角

を利用しようとしていた．

また，一人の生徒は以上の考えから補助線を発見し，解を得ていた．すなわち，図３．２０のように，△CDA に対して，外接円をかいて考える生徒がいた．この考えは，筆者の中で，思いがけない反応で，授業中はもちろんしばらく理解できなかった．まず，３点 CDA を通る円を考えていたようだ．それは△CDA の外接円である．これをかくために，AC の垂直二等分線をひく．そして，BC との交点を E，垂線の足を H とする．すると，△EHC と△EHA は合同である．これと△EAB が二等辺三角形であることから，確かにこの点 E は筆者が想定していた∠EAB＝20゜とするような点である．つまり，△CDA の外接円を考えようとすると，CA の垂直二等分線を引くことになり，それを基にして，補助線を発見していることになる．（この生徒は，自分で解法を発見していたことに喜んでいた．）以上のから，外接円は，この問題に対して現れる既習であることがわかった．

以上のように，宿題の段階では，４つ，あるいはそれらを複合した生徒のアイデアが確認できた．つまり，「ラングレーの問題」を提示したところ，①平行線，②延長線，③垂線，④外接円の４つの既習事項を含んだ生徒のアイデアがみられたことが明らかになった．そしてそのうち，「ラングレーの問題」の角度を求められた生徒はごく少数であったことがわかる．

以上実証されたことから教材の改善を考える．反応分析によりわかったことは，AB=AD という等しい辺を移動させることを理解してからも，移動する場所に試行錯誤が生まれるということである．また，AB=AD を AE のように移動させて考えるということは∠ x を直接関係させて考えることにはならないので，見通しをもって引くことが難しいことが明らかになった．これに対して，あらかじめ延長線などを利用して等しい辺を他に発見していた生徒にとって，等しい辺というのは別にもあって，こちらの意図していない補助線を引くことが自然であった．このように考える反応には，別解で示した２．１．２への指導が必要である．また，平行線を引いた生徒に対しては，対称移動の考えが強く表れたことが指摘でき，それならば２．１．３で示した平行線による対称性を活かした解法への指導が必要である．これらの解法に対して，困難性は認めつつも，生徒の疑問を重視するならば，これを活かした発展の方向を考えるべきだと感じる．また，見つけさせたい補助線の本質が少ないことで，生徒の考えを１つにまとめ上げてしまい，この教材だけでは価値観のさらなる多様化が望めないことが難点であるととらえる．生徒の実態を基に，別解の中の補助線についても，新しい視点で統合する活動が出来れば，この教材の有効性は高まると考える．

（２）　辺の長さを等しく移す指導に関する課題

本研究では，辺を等しく移動するという目的をもち補助線 AE を引くことによって，EC が突然現れたと感じさせることをねらっていたが，これは修正する必要がある．これはコンパスの使用を暗に示してしまい，思考を伴わないまま円が見えてしまう．これでは，見

つけさせたい補助線の本質をただ教えているだけになる可能性すらあった．

一方で以下のような課題があった．それはコンパスの使用である．こちらから，等しい辺を移動しなさいといったすぐ後に，コンパスをつかっている生徒が多く見られた．これは，作図指導の際に，コンパスは長さをはかりとるものであることを確認しているので，自然である．そうすると，等しい長さを移すという具体的な指導を行ったことで，二時間目に発見させたかった円が思考を伴わないで現れた．したがって，この指導の仕方に大きな課題を残したと考える．

第４章（終章）
本研究の総括と今後の課題

４．１　本研究の総括

本研究では，「ラングレーの問題」の補助線の意味に焦点をあて，問題の本質的な構造を明らかにし，統合する活動を促す教材を開発するとともに，この教材を用いた授業を行い，生徒の価値観をとらえることで開発した教材の有効性を示すことを目的としていた．そして上記の研究目的を達成するために，次の三つの課題を設定した．

一つ目は，統合する活動にはどのような教育的な価値があるのかを明らかにすることだった．そこで，先行研究にける「統合」という観点に価値を置いた創造的な活動に着目し，現在の学習指導の課題を踏まえ，特に重視しなければならない活動として，統合する活動を整理することであった（第１章）．二つ目は，「ラングレーの問題」に対して，その問題の困難性と数学としての発展の方向性を明らかにし，その解法の理解とともに，そこから発展させる活動を経験できるような学習指導を構成することだった（第２章）．三つ目は，構成した学習指導を実践し，その有効性を考察することだった（第３章）．以下では，これらの課題についての成果をあげていく．

第１章第１節では，先行研究から，問題を解決すること以外にも価値を与えることができるということが具体例から整理された．その価値とは数学本来の特性から自然に生まれる，「簡潔」「明確」「統合」という価値観に支えられている創造的な学習から見出されていたと整理された．また，特に「統合」は数学で重視すべき観点で，さらに三つの場合になると整理された．そして第１章第２節では，中学校数学科での特に重視したいこととして，数学の問題を解決するとともに，その過程にも価値を見出そうとすることがあげられていると整理した．それらを踏まえ第３節では，本研究の重視したい活動を先行研究での創造的な活動の中でも，「統合」という観点に価値観を置いた活動として統合する活動を位置付けることができた．

第２章第１節では，「ラングレーの問題」の解法を整理した．生徒にとってどのような既習の知識があればそこにたどり着けるのかを明らかにした．すると，辺を等しく移動して考えているのが最も単純で理解しやすいだろうという予想がたった．また「ラングレーの問題」を，問題を解くこと以外に価値をもった問題として示せた．第２章第２節では，解法ではなく，本研究で先行研究を整理し，どのような発展なのかを明らかにした．すると，数学者が行った研究は，角度を変数にして考える「拡張による統合」であることがわかった．つまり，これが数学としてふさわしい活動であると整理されたことになった．これを踏まえ第２章第３節では，学習指導を想定し，教材の方針を考え示した．すると，生徒の疑問を基にして，発展させることが最も有効ではないかと考えられ，それは補助線を基に考えることになった．具体的には，補助線の意味に焦点をあてた拡張を行い，補助線を２円の中心線であると見直し，△ABC が「∠B=２∠C の三角形」であると見直し統合する活動を想定し構築することができた．

第３章第１節では，「ラングレーの問題」の統合する活動を促した授業の概要を示し，そ

の意図を明らかにした．それは，補助線の本質への着目を志向した授業では生徒が問題を解決しようと既習の内容を利用し試行錯誤をして，現れた補助線の正体を知ろうとする態度が促されることであった．また，補助線を２円の中心線とし，△ABC を「∠B＝２∠C の三角形」として統合する活動を促す授業では，等しい辺に着目した解決過程を経験することで，意図しない等しい辺がなぜ存在するのかに疑問を持ってもらうことだった．第３章第２節では，その意図を踏まえ実践した記録から，指導とともなって現れた生徒の活動を明らかにし，第３章第３節，第３章第４節から，教材の有効性と改善を示した．具体的には，辺の長さを移す指導と補助線の発見に関する指導によって，生徒が正答となる補助線を発見し，かつその補助線に対してのこちらの疑問に理解を示していたことから明らかになった．また，授業実践の中で，生徒は△ABC を１本の補助線の条件を基にしてつくり，それを複数つくることができた．これは，生徒が疑問だと感じるだろう部分として補助線を抜き出して提示したから達成できた統合する活動だととらえる．また，いくつかの△ABC をつくってみる過程で，２つの円が同時に現れることを体験させ，補助線を見直せたこともこの教材のよさだった．つまり，統合する活動の場の設定に関しては達成できた．

４．２　今後の課題

本研究における実践によって生まれた教材の改善が今後の課題である．つまり，有名な解法の中で，筆者にとっての疑問であった補助線に着目した統合する活動を構築した．その際に，いかに論理的に生徒に疑問をもたせるかに関しては達成できたととらえる．しかし，生徒のアイデアをもとにした統合する活動を構築し実証することができなかった．生徒が「ラングレーの問題」に補助線を引いたときに，多少困難であっても生徒の疑問にしたいならば，そこからの解決を図り，そこで現れた補助線に対してどのように感じているのかをはっきりさせた上で，統合する活動を経験させたいと考える．そのために，「ラングレーの問題」自体かあるいは同じように補助線に関して疑問をもたれそうな問題を探求し，「統合」という観点に価値を置いた創造的な活動として位置付けた統合する活動を促す教材開発を続ける．

資料①　宿題で提示した「ラングレーの問題」

問題　以下のような四角形において，∠x を求めましょう

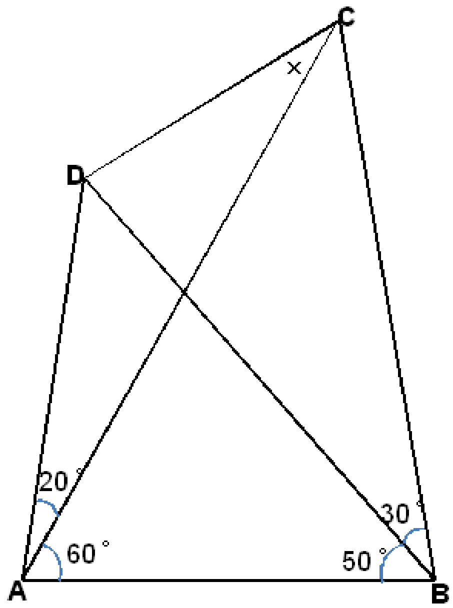
∠DAC=20°

∠CAB=60°

∠ABD=50°

∠DBC=30°

∠DCA=∠x=_____°

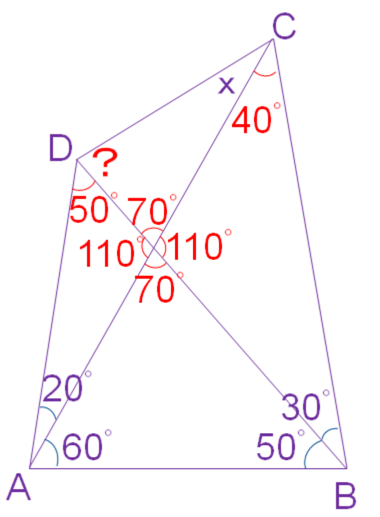


資料②　一時間目の授業の学習指導案

研究授業指導案

日時：2012 年　11 月 27 日　12 月 4 日　5・6 校時
対象：弘前大学教育学部附属中学校 3 年生
場所：各学級
授業者：澤頭　紀夫

本時の指導目標：ラングレーの問題における補助線を発見し，その補助線に着目させる

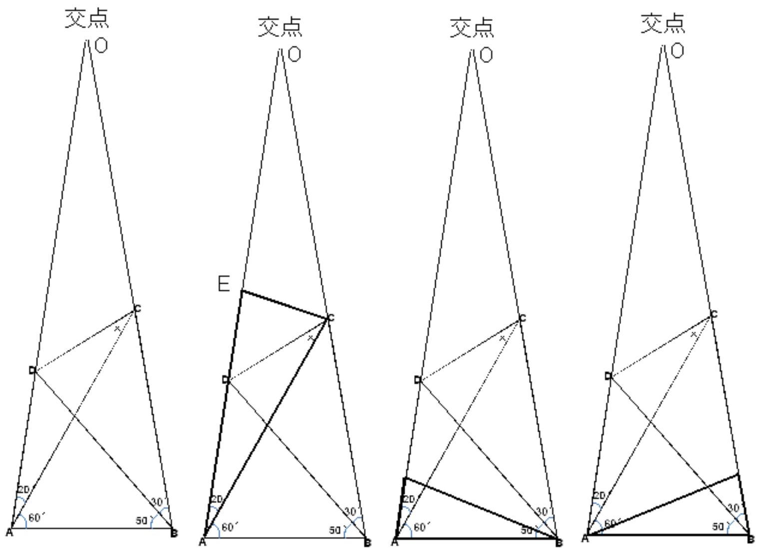
時　間 （分）	教師の働きかけ	予想される反応	留意点 評価
0~10 導入	・課題提示し，個人で考えたことをワークシート(資料②)に記入し再度考える時間にする 課題「∠x を求めましょう」 	・図を観察しわかる角度を埋める 50° 40° 70° 110° ・2 角が等しいことに着目すると AB=AD の二等辺三角形△ABD を発見する(底角が等しい三角形を見つけ，等しい長さを見つける)すると AB=AD	・あらかじめ前日に宿題として提示しておく(資料①) ・二等辺三角形になるための条件「2 角が等しいならば二等辺三角形である」の知識が必要である

10~15	・生徒の反応を基に，判明する角・等しい辺を確認する ・その後，補助線を引くというアイデアを引き出してそれを探す時間にする． 「グループを作って情報を交換しながら補助線を探してみましょう」	・このままでは解けないことから補助線を引こうと考え, 以下のような反応が予想される	・方針は補助線を引くことと限定する
15~30			

・予想される生徒の反応例

辺 AD と辺 BC を延長して，交点 O をとる．すると頂角 20゜底角 80゜の二等辺三角形 OAB となる．これと相似な図形を作ろうと考える．

①　②　③



このうち③のように引いた補助線によって解を求める

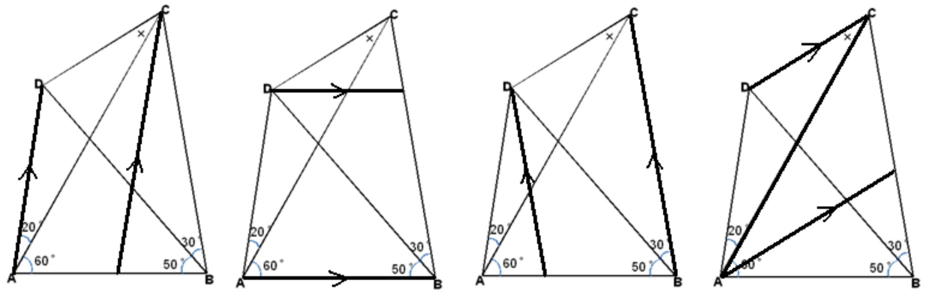
① の場合，CO=CA=A E であることが発見される．そして ED=EC が示され解ける．これは CE を延長し一辺が CO の正三角形を作り，三角形 ABC と合同な三角形が発見され示される

② の場合，解にはたどり着けないが同様な引き方なので③の補助線が発見される

資料

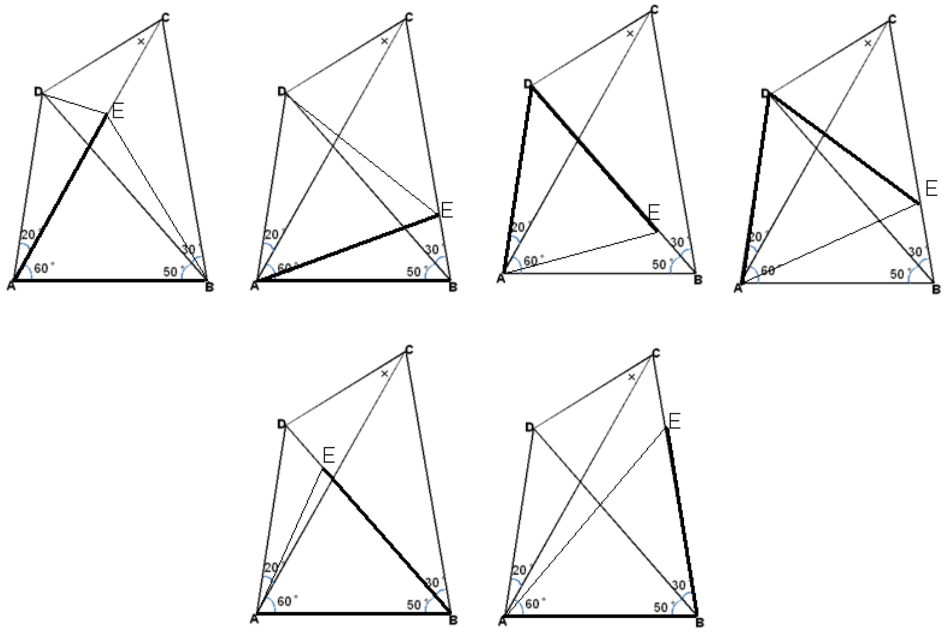
・予想される生徒の反応例

各辺に対する平行線で∠x や仮定の角度を同位角・錯角の位置に動かし考える



・予想される生徒の反応例

二等辺三角形△ABD の AB=AD に着目しこの等しい辺を新しく作り，二等辺三角形を利用して考える　　　　　正答↓



<table>
<tr><td colspan="4">

＊指導上の留意点

相似な図形を利用する際は，そのような経験がなければ二等辺三角形 OAB の相似形を考えることを引き出すのは困難であると考える．また二等辺三角形を新たに作る反応例においても，これが本当に正答となる解法なのかに見通しを持てないことが十分想定される．

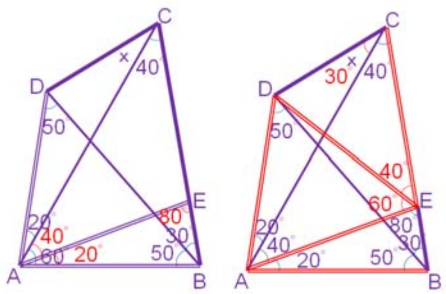
以上のような理由から，生徒から反応が見られない場合には，生徒の様子をよく観察しながら，必要最低限の誘導をするように努める．

その一つの手立てとして，長さの移動という見方を強調することがある．相似な図形で考えている場合は，相似でかつ二等辺三角形を作ることによって等しい辺が新たに発見でき，問題が解けるという意識を持たせる．また二等辺三角形を作る反応の場合は一つ試して諦めずに他にも試すように誘導する．

そこで，生徒の反応をみるためにワークシートに複数の図を用意し，生徒の考えを消さないような工夫が必要となる．

</td></tr>
<tr>
<td rowspan="2">30~40
補助線提示
40~50
まとめ
二等辺三角形や正三角形を探す時間</td>
<td>・生徒の反応から補助線 AE を引出し提示する
・提示した後に，時間をとり，板書で二等辺三角形･正三角形を確かめる</td>
<td>・正三角形△DAE を見つける
・二等辺三角形△CAE を見つける
・二等辺三角形△CDE を見つけ解を得る</td>
<td rowspan="2">・作業をして補助線を発見した際には，生徒は突然解けたと感じるので，これを教師が強調する
(EC が等しくなることがその原因である)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

・AB=AD=AE となる E (正答)



・EC を強調する

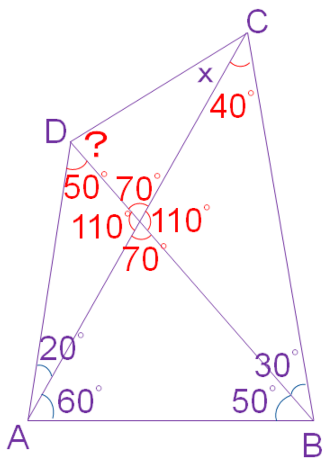
例「コンパスで移していないのに等しくなった辺がありませんか」

</td>
</tr>
</table>

資料

板書計画

以下のような四角形において∠x を求めなさい



わかること

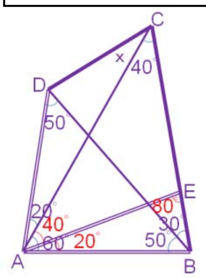
・50°，40°，70°，110°

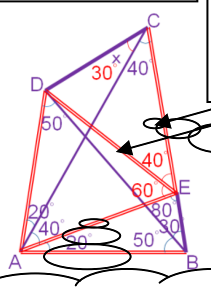
△ABD 二等辺三角形

AB=AD

どうやって解くか

・補助線を引くならどのように引くか





等しい辺を移動しよう

・点 E を AB=AD=AE となるように BC 上にとると…

AB=AD=AE

△ECA は 40°二つ

△AED は 60°の二等辺三角形⇒正三角形

⇩

=EC=DE

EC が突然等しいと分かった

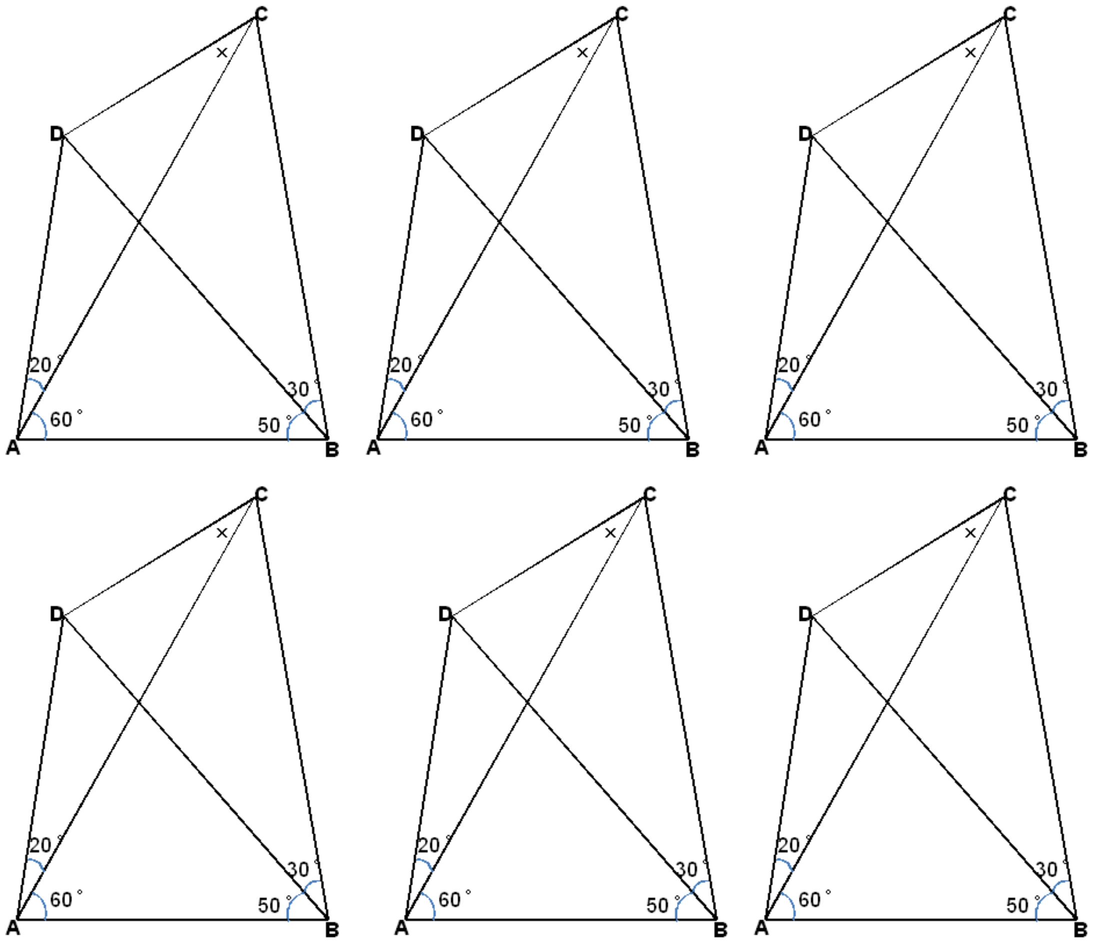
(板書に追加していくようす)

意図的に引いたので等しいのは当たり前だ

資料③　一時間目の授業のワークシート

目標　∠x を求めよう（考えたことは消さず次の図へ）

まずは自分で見つけたことを
この図↓に書いてください



資料④　二時間目の授業の学習指導案

研究授業指導案

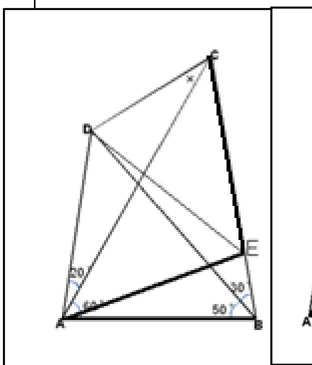
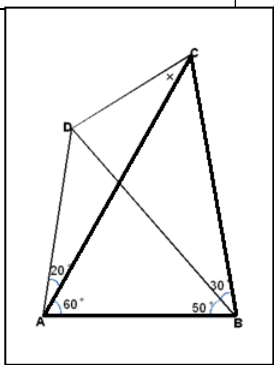
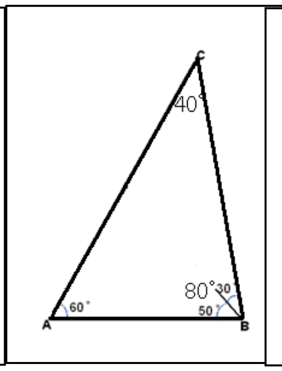
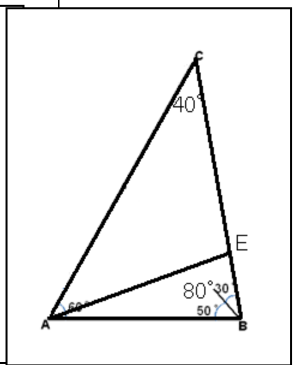
日時：2012 年　11 月 27 日　12 月 4 日　5・6 校時

対象：弘前大学教育学部附属中学校 3 年生

場所：各学級

授業者：澤頭　紀夫

本時の指導目標：ラングレーの問題の構造を明らかにする過程において，補助線と問題の構造を基につくり，背後に潜む図形を発見する

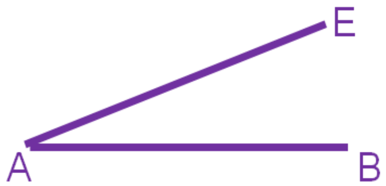
時　間 （分）	教師の働きかけ	予想される反応	留意点 評価
0~ 導入	・問題の構造として EC が等しいことを強調する ・△ABC を抜き出し，補助線 AE を引き，どのように等しい辺が見つかるのかを確認する	・△EAB の底角 80゜から頂角 20゜を求める ・△CAE において 40゜が二つあるので EC が等しい AB=AE=EC	
	 	 	
~10	・このような△ABC をつくって，問題に隠れている図形や補助線の正体を明らかにする 目標　「AB=AE=EC」となる△ABC をいろいろつくって問題に隠れている図形や補助線の正体を発見しよう		・考え方はこちらで提示する

資料

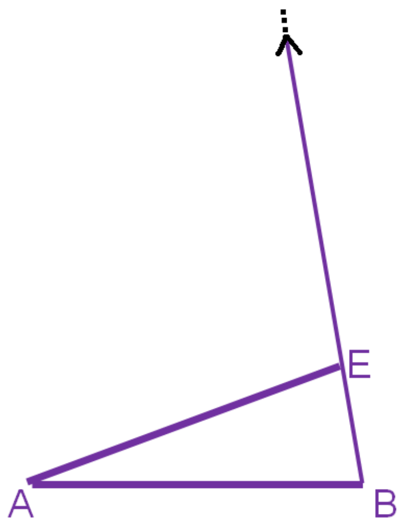
10~20 展開	・プリントを配布する(資料③) ・反応が見られない場合はこちらで角度を変えるように指示する必要がある	・定規と分度器を利用して，△ABC をつくる ・コンパスが欲しいと感じる ・①補助線 AE から考えることに疑問をもつ ・③点 C を先にとろうとして延長線上にあることに気が付く	・目標である補助線 AE をそのままに，新たな三角形をつくることを伝える

① 補助線 AE から考える

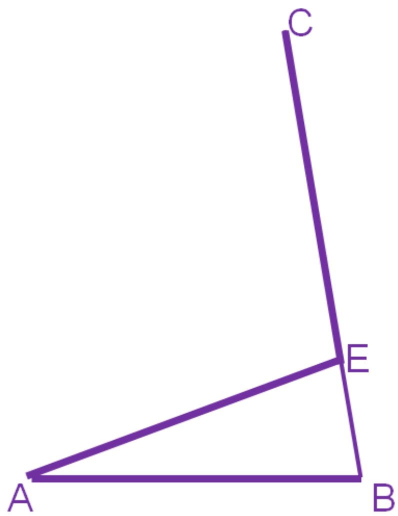
②AB が等しくなる点 B を決める



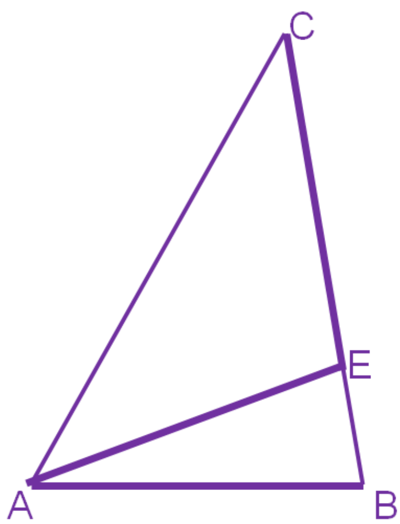
③点 B 点 E を結び，延長する

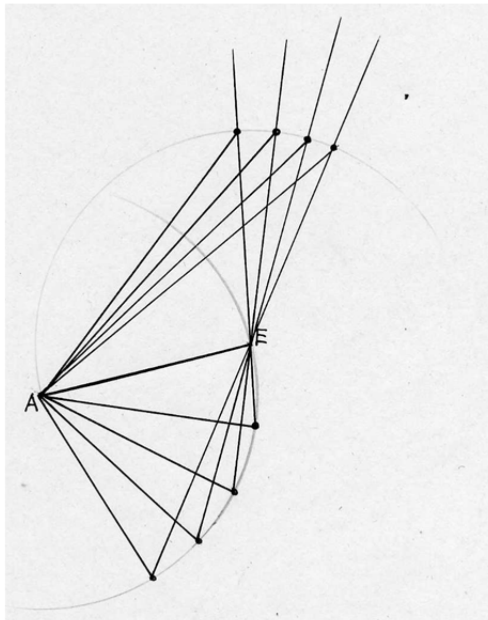


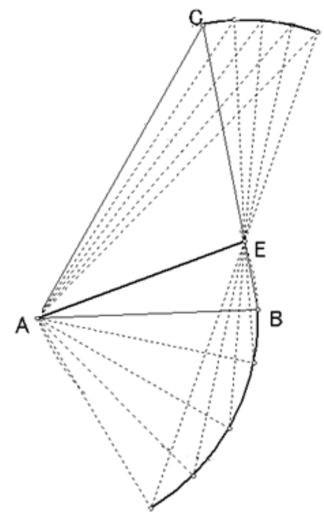
④EC が等しくなる点 C をとる



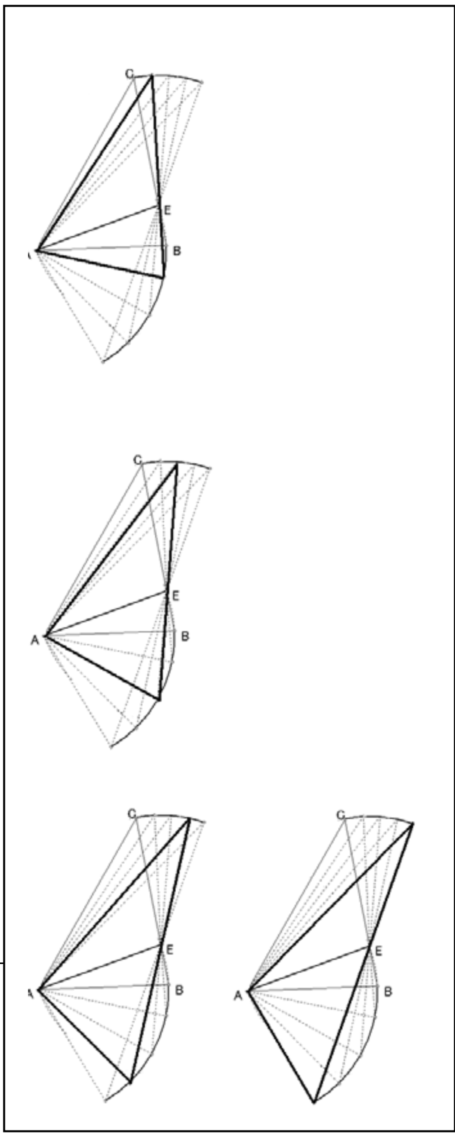
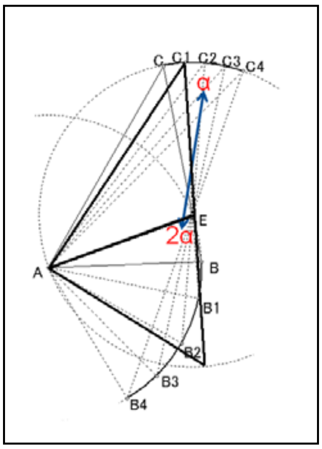
⑤三角形 ABC ができた



<table>
<tr>
<td>20~30</td>
<td>・確認後，三角形を複数かいて補助線の意味を調べるように指示する
「では補助線 AE の意味を考えるために三角形を２つ３ついろいろかいてみましょう」
「△ABC をいくつかつくってみると，点 B や点 C はどのように動いていますか, わかることをプリントにかいてみましょう」</td>
<td>

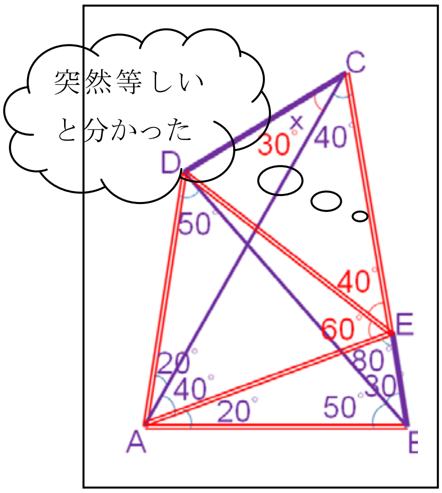

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

資料

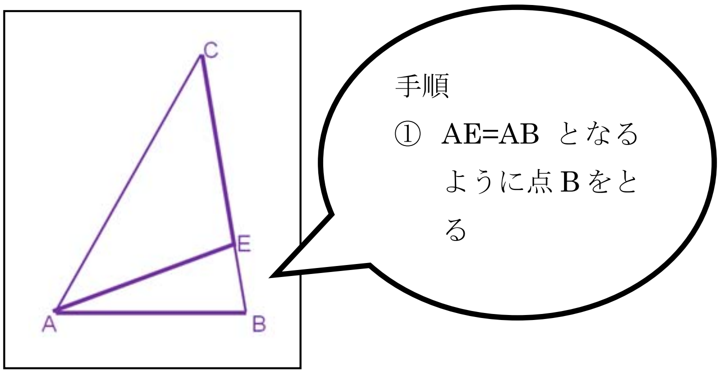
30~40 発表の 場面	・気付いたことを発表してもらい，隠れていた図形と補助線の正体を確認する ・また円発見後，角度関係に着目して二倍の角度を持つ三角形ということも発見させたい 「AB=AE=EC となる△ABC の角度には何か関係がないですか」 「作図した△ABC の角度を測ってみましょう」  	・三角形をかいていくと図のようになる <u>観察してわかること</u> ・補助線 AE はそれぞれ点 A と点 E が中心の半径が 5 ㎝である 2 円の中心を結んだ線であること ・点 B が点 C よりも大きく動いていること ・2 円の交点が原問における点 D であること <u>角度関係に着目する</u> ・それぞれ△ABC の角度を実測し二倍の関係だと予想する ・円周角中心角の関係から二倍の角を持つ三角形であることが証明される  	・２つの二等辺三角形から円が見え，補助線の意味とともに問題の構造が明らかになることに気付かせる ・CnBn(n=1,2,3,…)を延長して同じ弧に対する円周角と中心角の関係を発見する ・円周角と中心角の関係を習っていない場合でも，二等辺三角形の底角が等しいことと三角形のひとつの外角は他の２つの内角の和に等しいことからいえる ・三角形の角度を分度器ではかり，特徴をみつける
40~50 まとめ		・α，２αの二倍の角度をもつ三角形 ・条件を保ったままいろいろ作図することでみつけた	・原問の△ABC と生徒の△ABC を見直し統合する

資料

板書計画



目標　「AB=AE=EC」となる△ABC をいろいろつくって問題に隠れている図形や補助線の正体を発見しよう



<u>隠れていた図形は…</u>

・

<u>補助線 AE は…</u>

・

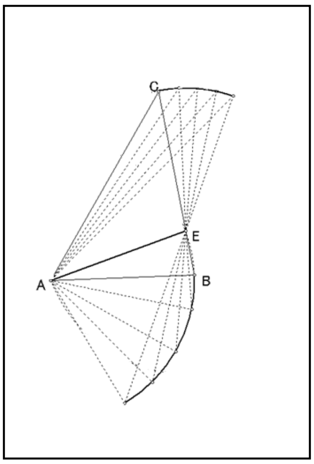
<u>いろいろな△ABC の角度に注目！関係はないか？</u>

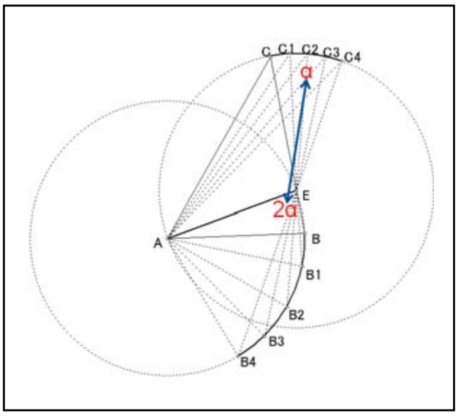
角　A　B　C

①　　　　　∠B は∠C

②　　　　　の二倍

③



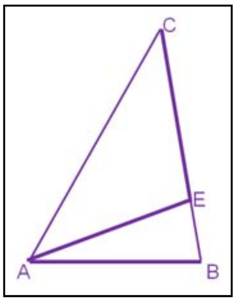


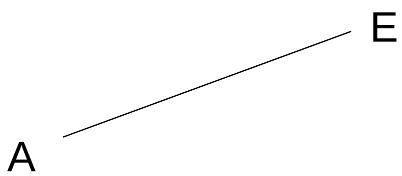
・実測から角度関係が予想された後に円周角中心角を確認する

資料⑤　一時間目の授業のワークシート

目標　「AB=AE=EC」となる△ABCをいろいろ作って、補助線の正体や問題に隠れている図形を発見しよう！ **（注意）　例のようにEはBCト上とする**

例





★補助線の正体は… ☆問題に隠れていた図形は…	＊この勉強を通してわかったことや気付いたこと等，感想を教えてください

資料⑥　授業プロトコル

中学校実践授業記録
2012.11.28 実施
第1時　13:55〜14:45
第2時　14:55〜15:45

【第1時】

(00:00)

T1：(あらかじめ黒板に模造紙に書いたラングレーの問題を貼った)
早速なのですが，昨日先生にお願いして，宿題を出してもらいました，これ，解けた人？

S1：(挙手はなかった)

T2：あてたりしないですし，方法も問いませんので角xはこれだってなった人はどれくらいですか？

S2：何人かが挙手

T3：これはすごいですね．大学生も怪しいです．はい，どうも下ろしていいですよ．では問題を確認します．「四角形 ABCD について，20°，60°，50°，30°のとき角xを求めよ」という問題でした．(図を指さしながら)

S3：(確認する)

T4：この問題を見たとき，はじめに何をしました？

S4：わかんないとこを埋めた

T5：はい，わかんないとこ，どこでした？

S5：角x

T6：角x？

S6：(笑いが起こる)

T7：角xを求めるために何か埋まりませんか？

S7：70°，110°

T8：たぶんここのことかな？そうですよね．あとはないかな？(以下図に書き込みながらきく)

S8：50°

T9：どこですか？

S9：∠ADB

T10：あとは？

S10：∠ACB が40°

T11：ここでいったんとまったかな？他に何かわかったひと？

S11：△ABD が二等辺三角形

T12：はい，(図に書き込みながら)ここが，なぜですか？

S12：ABD と ADB が 50°で同じ角なので，底角が等しい二等辺三角形だと思います

T13：はい，ありがとう．二角が等しいから，二等辺三角形ですね．さて，ここまでで解けなかった人いたと思うんだけど，みんなこっからどうした？

S13：（沈黙）

T14：質問変えます．なんか線をかいた人？

S14：線じゃない…

T15：おっ線じゃない？

S15：（沈黙）

T16：おそらく補助線を引いたと思うんだけどどうでしょう？

S16：頷く

T17：はい，ではこれから皆さんには補助線を探してもらいます．グループを作ってください．（ワークシートを配る）

S17：（グループになる）

T18：何人か出てるみたいですね．（3割できていたと判断した）どんな補助線でしょうか．ヒントというか方針だけ言います．それは等しい辺を移動して考えるということです．はい，続けてください．

S18：（発見した生徒は別解を探していた）

T19：では，せっかくなのでさっき名前を覚えた人から聞きましょうか．T 君，どこに補助線を引きました？

S19：（ジェスチャーでななめにひく）

T20：どこから引きました？

S20：角 A から

T21：A から？

S21：長さが AB と等しくなるように移した

T22：（図に定規をあてながら）上に？下に？

S22：上に移した

T23：（長さを計って図に等しい辺を書き込んだ）はい，このような AE が引かれているでしょうか？このような線を引くとどんなことがいえるのでしょうか？

S23：（∠EAB が）20°，（∠AEB が）80°

T24：なんで？（書き込みながら）

S24：二等辺三角形だから

T25：はい，今自分で，等しい辺を移動して二等辺三角形を作ったんですから，当然底角は等しいですよね．このほかにはどうでしょうか？

S25：B と D を結ぶ

T26：するとどうなるんですか？（書き込みながら）

S26：正三角形ができる

T27：なぜ？

S27：（グループで確認しながら）ADとABが同じだから…まず，さっきの二等辺三角形によって，頂角が20゜になって，全部で80゜だから，それから引くと，∠DAEが60゜になるはずです．

T28：なるほど，それで，この三角形は？

S28：正三角形

T29：いいですね，他には？

S29：△CAEが二等辺三角形

T30：ん？底角がどこの？

S30：40゜

T31：なんででしょう？（△CDEを抜き出し板書しながら）ここまで来て，まだって人もいます．助けてください．

S31：AEとCEの長さが同じなので，AEとDEの長さも同じなので，つまりはDEとCEの長さは等しい．そっから…

T32：あとどこがわかればいいんだろう？

S32：（何人かが）∠CED

S33：∠CEDが40゜になる．それで，∠ECDと∠EDCは同じ角になるので，180゜から40゜を引いて，それを半分にすれば，同じ角は70゜になる．最初に40゜はあったので，40゜＋xが70゜なので，xは30゜

T33：ありがとう．ここまでいいかな？なんか，等しい辺をとったら，新しく等しい辺が見つかっていき，最後には∠xが求まりました．ここで皆さんに考えてほしいことがあります．今等しい辺を取りましたよね．はじめの方はわかるんです．でも，こっちの予期しないところにも等しい辺が出てきてませんか？つまりはこれ，ECです．これって突然出てきたように感じませんでした？

S34：（何人か頷く）

T34：もしも，この突然に，何か意味があって引けたものだったら嬉しくないですか？何かの理由があって，だからここに引くんだよと．次の時間にはその意味を探しましょう．一旦休み時間入ってください．

（52:36）

【第2時】

（00:00）

T1：確認があります．先ほど二等辺三角形になるための条件を確認したんですが，もう一回確認します．何ですか？

S1：底角が等しい

T2：底角？

S2：二角が等しい

T3：そうでした．何回か僕も言い間違えてましたが，二角です．二角が等しいことから，それを底角とした二等辺三角形だといえるということでした，失礼しました．そしてもう一つなんですが，補助線を引くときに長さを定規で測ってしまいました．これは数学的には間違ってました．数学的には，長さはどうやって移せばよかったのでしょうか？

S3：コンパスか

T4：そうです．こうやってコンパスで移せばよかったんですね．（黒板の図でコンパスを使って再度移した）失礼しました．はい，じゃあ始めます．突然現れた EC の意味を考えましょう．EC にはどんな秘密があるのかとか，実は問題には隠された図形があるのではないか探してもらおうと思います．EC というのはここにありました．（△ABC を抜き出した図を出した）ここの△ABC を抜き出して，ここに，補助線 AE を引くと，どうなったかというと，二等辺三角形ができて，ここに（∠CAE が）40°，もともと（∠ACE が）40°なので，EC が等しいとわかったわけです．それで，この EC の意味を考える方法として，AB と AE と EC が等しくなるような△ABC を作図して考えることがあります．さっき，そっちのほうで，同じようにして作図して確かめようとしている人がいました．今回は AB=AE=EC となるような△ABC をいろいろ作図して考えましょう．各自でやってほしいのでグループ解体して作図しましょう．（ワークシート配布）

S4：（グループ解体後各自で作業開始）活動中，E，B，C の順序が違っても良いかという質問

T5：訂正です，B，C，E はこの順になるように作図してください．つまり E は間に来るようにしてください．また，複数作図している人が多いみたいです．名前をつけましょう．つまりは B1，B2，B3，としておきましょう．

S5：（記号をつけたり，複数個作図し始める）

T6：じゃあ確認していきましょう．まず何をしましたか？

S6：コンパスで B をとって，B と E を結ぶ

T7：わかった，はい，結びました（線分 BE をかいた）それで？

S8：つっきる

T9：つっきる，数学的にいうと？

S9：線分を伸ばす

T10：線分を伸ばすと？

S10：直線

T11：はい，直線というか？

S11：（沈黙）

T12：半直線ですね？次はどうしました？

S12：直線上に等しく C をとる

T13：はい，E からまた等しく C をとります，あとは結べば出来ましたね．これをいくつかかいてもらって，隠れた図形を探してもらっています．やってない人もやってみてください．（黒板でやっていく）

S13：（作業を続行する）
T14：点 B，点 C の動きに注目してください．
S14：（ワークシートの空欄を埋める）
T15：それでは聞いていこうと思います．問題に隠れていた図形はなんですか？
S15：円
T16：円？どんな円ですか？円を説明するときは中心が必要ですね．
S16：中心 A，半径 AE
T17：（黒板に円を作図）あとは？
S17：中心 E，半径 AE
T18：（黒板に円を作図）ということで隠れていた図形は？
S18：AE を半径とする2円
T19：そうですね，つまり半径の長さが等しい2円です．じゃあ補助線はどのような線でしょうか？
S19： 中心 A と E を結んだ線
T20：うん，中心を結んだ線ですね，2円の半径とかいている人もいましたね（黒板に図をはって確認する）まだあります．△ABC の∠B と∠C を測ってみてください．（分度器を配布し実測してもらう）
S20：（各自測る）
T21：どうですか？
S21： 30°，60°
T22：なるほど，他には？
S22：40°，80°
T23：他にはどうでしょう？もっと汚くてもいいですよ
S23：38°，70°
T24：ちょっとずれはありますが，いろいろ作図した三角形には関係がありませんか？
S24：二倍？うーん
T25：ありがとうそうなんです，実は皆さんが作図してくれた∆ABC は，∠B が∠C の二倍です．元の問題も見てください．80°の∠B と 40°の∠C だったわけです．もうひとつの隠された図形でした．これは円から，証明も出来ます．今回は，作図から，∠B が∠C の二倍になるのではないかという予想をたてることが出来ました．
最後に，EC という等しい辺が突然出てきました．このときどんなふうにして考えればいいのか？それは逆に，そうなるような三角形を作図して見つかる性質もあるということでした．今日は長い間ありがとうございました．感想をワークシートに記入お願いします．
（54:53）

資料⑦　授業プロトコル

中学校実践授業記録
2012.12.5 実施
　第1時　13:50～14:35
　第2時　14:45～15:30

【第1時】

(00:00)

T1:(あらかじめ黒板に模造紙に書いたラングレーの問題を貼った)
　早速ですが始めます. このような四角形で, ∠xを求めよということでした. ∠xを求めるためにここは埋めましたっていうところ, 新しくわかった角度教えてください. じゃあ S1 さんお願いします.

S1: 真ん中のところが 70°

T1: はい, ここですか?はいわかりますね, (以下, 板書しながらきく)他に?S2 さんお願いします

S2: ∠ADB が 50°

T2: ありがとう, ここが 50°ですね. 他に?S3 さん

S3: ∠BCA が 40°

T3: そうですね, 他には?S4 さん

S4: 70°の隣が 110°

T4: ここかな?はいそうですね, あと対頂角ですからここは 70°と 110°ですね. さてここまでで∠xとその隣の角以外は埋まりました. ここでひとつ質問です. 角度以外で何かわかることないですか?S5 さん

S5: たくさんの三角形がある

T5: そうですね, 例えば, 4つありますし, 2つにも見えますね. それらの三角形の中で, 何か特別な性質を見つけた人いませんかね?(挙手を求める)

S6: (挙手する)△ABD が二等辺三角形

T6: おっ, なるほど, △ABD が二等辺三角形?理由まで言えるかな?

S6: 三角形で 50°と 50°だから

T7: すばらしい, ∠ABD=∠ADB=50°で二角が等しいから AB=AD の二等辺三角形ですね.
　いまのように, 角度以外に, 等しい辺を見つけてくれました.
　で, ここまで埋めて, 残念ながら解けなかった人もいるのではないでしょうか?

S7: (頷く)

T7: このままでは解けないなら, 何か助けになるようなものをひいてはどうでしょうか?
　みなさん結構引いてきていると思います. 実はそのやり方で解ける問題となってます.
　はい, 補助線です. 今日は, みんなでどこに補助線を引けばとけるのかを考えていき

ましょう．グループになってください（ワークシート配る）いま配ったものにはたくさん図があるので，たくさん考えてくれたものを消さないで次の図へ次の図へとやってみましょう．

S7：（グループで考える）

T8：どんな補助線か，ひとつだけヒント．等しい辺，どことはいいません．移動して考えます．移動ってなんだよ，等しい辺をどこかに新しく作るということです．続けてください．

S8：（作業再開する）

T9：A から引いてみて下さい

S9：何を引くの？

T10：そこまでは言えません

T11：はい，答えあわせしましょう．A から 20°を測ってこのような補助線を引きます．（黒板で確認）ここに引くとどうなりますか？

T12：残り 5 分になってしまいました聞きます．∠AEB 何度ですか？

S10：80°

T13：はい，ありがとう．補助線を引くと等しい辺 AE が見つかりました．つまり，このように引くと，さっきの二等辺三角形の等しい辺と同じ長さになりますね．どんどん見つかるかと思います．ここが？（∠CAE）

S11：40°

T14：うん，それで，あわせたら 60°が見つかりました．さて 60°の二等辺三角形が見つかりましたが，これなんですか？

S12：正三角形

T15：はい，正三角形ですよね．ん？見つかってますか？

S13：結べばです

T16：うん，D と E を結んでみてください．すると見つかりましたね．他にも 40°から二等辺三角形が見つかったと思います．そうです，△CAE も二角が等しいですね．それぞれもとの二等辺三角形 ABD の等辺と等しいです．これらより二等辺三角形 CDE が見つかると思います，確認してみてください．はい，後は頂角が 40°だから，底角が計算で求まって，70°です．だから∠x＋40°が 70°だから∠x は 30°です．そこで，次の時間，みんな何すると思う？問題はもう解けたよ？僕はこの問題が解けたとき，気持ち悪いなぁと思いました．皆さんはどうでしょう？

S14：（反応薄かった）

T17：補助線を引いて，等しい辺の AE を作りました．それはいいです．でも，こんなところに（EC）等しい長さが出てきています．なんででしょう？何か意味があったら嬉しくないですか？次の時間はこの EC がなんで等しくなったのかを考えていきます．

（45:39）

【第2時】
（00：00）

T1：補助線がなんでここに引かれたのかを明らかにしていきましょう．つまり，補助線の正体や問題に隠された図形を見つけよう．補助線が見やすいように，抜き出したいと思います．△ABC です．60°，80°，40°変わりませんね．この△ABC に角度が 20°になるように E をとって，補助線を引きました．すると，このようにして…40°になり，EC が突然等しくなりました．抜き出した三角形は，二辺が等しいように引いた補助線で，新たにもう二辺が等しくなり，結果三辺が等しくなっていたということになります．では，なぜこうなるのかを調べることになりますが，その方法は，こうなるような図形を逆に作って考えるという方法です．ちょっと難しいかもしれませんね．でも，自分で作ることが出来れば，今ある図形だけを見るのでなくて，作った図形と比べることが出来る．だから，こうなるような△ABC をいろいろつくって考えよう．はい，グループを解除してください．（ワークシート配布）

S1：（配布後，自己活動）

T2：はい，じゃあ一つ例を見せちゃいます．今，AE があって，点 B をとります．長さは変えないんですが，何かを変えてますね？

S2：（反応薄）

T3：長さは変えずに，AE と AC の間の？

S3：角度？

T4：うん，角度を変えていきます．さっきは 20°でしたが，それを変えましょう．次に，B と E を結んでください．そしてその直線上に，C をとって，△ABC が作れましたね．長さは変えずに，逆に角度を変えて作ることが出来ます．はい，じゃあいろいろ作って探していきましょう．

S4：（活動再開）

T5：はいじゃあ，きいてみたいと思います．何が見えました？

S5：円

T6：円？はい，いくつですか？

S6：二つ

T7：二つの円，見えてますか？

S7：最初から見えてた

T8：最初から見えてた，うん，でもそのために何をしたのか？それは，他の場合をつくって考えたよね？それによって見えたんじゃないかなあ

S8：うーん

T9：まあこのように2円が見えたとしましょう．じゃあ，補助線 AE の正体はなんだったの

S9：半径，二円の中心を結ぶ線

T10：半径，うん，あるいは，二円の中心同士を結ぶ線とかいていた人もいましたよね．どっちも正解．多かった二円の中心同士を結んだ線が多かったから，黒板にはこっちをかくね．はい，もとの図形で二円見えるか見直してみてください．

はい，見直せましたね，実はもう一つ隠れた図形があるんです．どうでしょうか？

S10：（反応薄）

T11：さっきいろいろな△ABC を作りましたが，それらについて，角度に注目してみてください．注目というのは，これを使ってもいいです．（分度器を配布）どうでしょう？

S11：（実測する）

S12：あれ？180°になんない

T12：実際に測っているので，少しずれても仕方ないですよね，だいたい見てみましょう．（①∠A=98°∠B=54°∠C=27°②∠A=115°∠B=43°∠C=21°③∠A=134°∠B=30°∠C=15°）

T13：どうでしょう？何かありませんか？

S13：二倍？

T14：おっ今聞こえてきた気がする，ここです．（∠B と∠C の表を囲う）

S14：二倍だ

T15：うん，∠B が∠C の二倍になってますよね．はい，もとの図でも確認してみてください．80°と40°になってますから，二倍ですよね．こんなことが発見されたかと思います．よくあるのが，二等辺三角形で垂線おろしたら半分とかってあるけども，それと同じ．二倍の角度があったらこんな補助線が引けて，三辺がいい感じに等しくなります．

S15：ほう

T16：ただし，これはまだ証明されていません．隠れた図形を利用したりして，証明は各自でやってみてください．今日は長い間ありがとうございました．感想をワークシートに記入お願いします．

（４７：３７）

引用参考文献

中島健三（1981）．『算数数学教育と数学的な考え方』．金子書房
清宮俊雄（1968）．『モノグラフ「幾何学」―発見的研究法―』．科学新興新社
清宮俊雄（2005）．『エレガントな問題をつくる―初等幾何発見的方法―』．日本評論社
杉山吉茂（2012）．「教材の新しい見方への挑戦を」（杉山吉茂（2006）．
「学芸大数学教育研究」第 18 号．東京学芸大学数学科教育学研究室）．
『杉山吉茂算数・数学教育論選集　確かな算数・数学教育をもとめて』．東洋館出版社
E.M.Langley（1922）．『The Mathematical gazette / Mathematical Association vol.11』
「MATHEMATICAL NOTES」644. A problem.
中村幸四郎ほか訳（1971）．『ユークリッド原論』．共立出版株式会社
島田茂（1990）．「拡張と一般化」．『教師のための問題集』．共立出版株式会社
松原元一（1990）．『数学的見方考え方』．国土社
斉藤浩（2009）．『ラングレーの問題にトドメをさす！』．現代数学社
澤頭紀夫（2012）．『ラングレーの問題における統合する活動を促す教材の開発』．
日本数学教育学会第４５回数学教育論文発表会論文集．pp.569-574
国立教育政策研究所（2012）．『国際数学・理科教育動向調査 TIMSS2011 国際調査報告』
文部科学省（2008）．『中学校学習指導要領』．東山書房
文部科学省（2008）．『中学校学習指導要領解説　数学編』．教育出版
新村出編　（1993）．『広辞苑　第四版』．岩波書店
俣野博・河野俊丈編（2012）．『新編　数学Ｉ』．（平成 23 年検定済み）．東京書籍
藤井斉亮・俣野博（2012）．『新しい数学２』．（平成 23 年検定済み）．東京書籍
藤井斉亮・俣野博（2012）.『新しい数学３』.（平成 23 年検定済み）．東京書籍

謝辞

修士論文を作成するにあたり，多くの先生方に御指導を賜りました。深く御礼申し上げます。

指導教員である中野博之先生には，学部時代から御指導していただきました．不真面目な私が，心を入れ替え，数学教育について真面目に向き合うきっかけと道を示してくださいました。

田中義久先生には，大学院入学から，この文章をかいている前日まで，初歩の初歩から懇切丁寧に指導していただきました．二度ほど挫折しましたが，先生の「もうひとふんばりだよ」によって頑張れました。様々な場面でいつも先生に助けられました。

山形昌弘先生には，幾何学ゼミで，「ラングレーの問題」との再会という私にとって重要な経験をさせていただきました．また問題に対して，順序よく精密に考えることの楽しさを教えていただきました。

佐藤秀仁先生はじめ弘前大学教育学部附属中学校の数学科の先生方と生徒達には，実践授業のために貴重な時間を頂戴した上に授業に関しても多くのご配慮いただきました。先生方からはもちろん，生徒たちの考えから多くを学びました。

東京学芸大学太田伸也先生は，数学教育ゼミ合宿や論文発表会の際に，いつもお声をかけてくださいました。「統合」に関して，はじめから私の考えの欠陥をご指摘いただいたにもかかわらず理解が遅く申し訳ありませんでした。

宮崎研也先生には，昨年までは大学院の先輩として，今年も実践授業の際に足を運んで下さり，ワクワク感を大切にすることを教えていただきました。

大学院の授業では，伊藤成治先生，西澤道知先生，昆正博先生，高橋敬夫先生といった素晴らしい先生達にもほぼ一対一でご指導いただきました。

奈良論文発表会を通しては，普段から教材研究の熱心さの噂を伺っていました川村栄之先生から貴重なアドバイスをいただきました。現在研究中ですがアドバイスを基に考え直しております。また他の様々な大学の先生方との出会いもこれからの教材研究で大切にしていきたいです。

大学院の先輩や仲間とは，ホワイトボードでの数学の議論が心に残っております。最後まで大学に残っていたころは，本当に楽しかったです。今年は学部生とも多く交流があり，数学科室に行けば誰かがいて，励みになりました。

最後に，このような本当に素晴らしい方々に出会うことができる環境を与えてくださった両親と祖父母に感謝いたします。