「仮定の意識化」を重視した
数学的モデル化教材の開発と実践に関する研究

弘前大学大学院 教育学研究科

教科教育専攻 数学教育専修

13GP207　毛　内　一　元

「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の開発と実践に関する研究

論文要旨

全国学力・学習状況調査の数学の「主に知識に関する問題」の A 調査に対して，「主に活用に関する問題」の B 調査が一貫して低い正答率であることや，PISA 調査の質問紙の結果で，現実事象の問題に対して数学を使って問題解決する姿勢が非常に低いという生徒の実態がある．これまでの先行研究において現実事象の問題を数学を活用して解決する方法の研究をして三輪辰郎(1983)の数学的モデル化による問題解決が考えられる．これは現実の世界から定式化の段階を踏むことで数学的モデルを作り，そこから数学的結論を導き，元の事象に対して解釈・評価することで現実事象の問題解決を行っている．特に定式化で単純化・理想化や近似・仮定の設定等が適切になされないと，解決する事象の本質を理解できないため，適切に問題解決ができず，導き出された結論も現実事象に対して妥当でないものとなってしまう．生徒はこの定式化が困難であるため，生徒の実態の改善ができていないと考える．ゆえに，生徒が問題解決において，設定する仮定がいかに重要な要素であるかが実感できれば，その必要観から定式化の充実を図ることができると考えた．結果として，問題解決が進展していること，そして現実事象と数学の関連が感得できればよいと考える．そのための方法を 2 点挙げる．第一に，問題解決で導き出した結論の妥当性を判断する場面を数学的モデル化過程で設定すること，第二に清野辰彦(2006)が述べる「仮定の意識化」を重視することである．この 2 点を踏まえ，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決をすることで，現実事象の問題解決が困難である生徒の実態改善につながると考える．

よって本研究の目的は，数学的モデル化による現実事象の問題解決において，「仮定の意識化」を重視した教材を開発し，現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果を，開発した教材の授業実践を通して明らかにすることである．このことを通して生徒のより良い数学観の獲得を目指していく．

本実践で得られた本研究の成果は，現実事象の問題解決において，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決をすることで，現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果の有効性を明らかにできたことである．

「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の開発と実践に関する研究

目次

目次

序章

本研究の目的・方法

第 1 節　本研究の背景と目的

小学 6 年，中学 3 年を対象に全国学力・学習状況調査(以下，全国調査)が 2007 年から行われている．その中で数学の「主に知識に関する問題」の A 調査に対して，「主に活用に関する問題」の B 調査が一貫して低い正答率になっている．B 調査は「知識・技能等を実生活の様々な場面に活用する力や，様々な課題解決のための構想を立て実践し評価改善する力等」を問う問題となっているが，清水美憲(2012)は「全国調査の「活用」の問題が，新しい時代に求められる「数学的に考える力」についてのビジョンを具体的に例示している」と述べている．正答率が低い設問として，「グラフの特徴を事象に即して解釈し，結果を改善して問題を解決する方法を説明することができる」という出題の趣旨の設問があり，正答率は 30.7%となっていた．このような設問の正答率が低いことは，現実事象と数学の関連を意識しながら問題解決をすることができない生徒が多いことを示していると考える．

また，現在の学校教育において数学を学習する意義として，勉強する価値を見出せない生徒が多い，そして日常生活での問題解決に数学を使えない，または使おうとしない生徒が増えているという実態がある．2012 年に行われた PISA 調査において，学習の成果もしくは結果としての数学的リテラシー得点の影響を与える背景要因として 5 つの観点を挙げて生徒質問紙で調査を行っている．この調査結果で日本の生徒は OECD 平均と比べて，数学という教科に対し，勉強して将来役立つといった積極的な考えをあまり抱いていないことが分かった．これは生徒が数学に対して積極的に勉強したいといった意欲・関心・態度の観点からみると悪い結果となっている．この状況を改善するには，単純な考えではあるが，まず数学が自分の生活や将来に役立つといったポジティブな考えが持てるような授業を行う必要があると考える．しかし，現在の中学校や高等学校における数学の授業は，新しい公式などを学ぶことで知識を得て，それを使って問題を解き，それを反復して解く，といったことが一般的である．これにより，問題の内容が理解できず解けない生徒は全く意欲が起きない上，理解し解決できる生徒とできない生徒の数学に対する力や意識の差が広がる一方である．この状況を改善するために少しでも意欲を持って取り組める状況であれば，実態を改善できると考える．

さらに PISA 調査において，「あなたは，次のような数学の問題を解く自信がありますか」と尋ね，「数学における自己効力感」に関する 8 項目について，生徒に「かなり自信がある」「自信がある」「自信がない」「全然自信がない」の 4 つの選択肢から 1 つ選ぶ質問がなされている．先の結果を踏まえ，この結果をみると，現実事象の問題に対して数学を使って問題解決する姿勢が非常に低いということが明らかにわかる結果となっている．一方で単純な数式の処理のような問題は日頃から実践していることから，他と比べて出来る割合が明らかに高くなっている．ゆえに，単純に言うことは難しいが，日頃から現実事象の問題解決を実践し，生徒が自信を持って問題解決に取り組める状況であれば，現実事象の問題に対しても実態より取り組める生徒が増えると考えられる．

これまでの先行研究において現実事象の問題を数学を活用して解決する方法の研究をして三輪辰郎(1983)の数学的モデル化による問題解決が考えられる．これは現実の世界から定式化の段階を踏むことで数学的モデルを作り，そこから数学的結論を導き，元の事象に対して解釈・評価することで現実事象の問題解決を行っている．これを図式化したものが図 0-1 である．

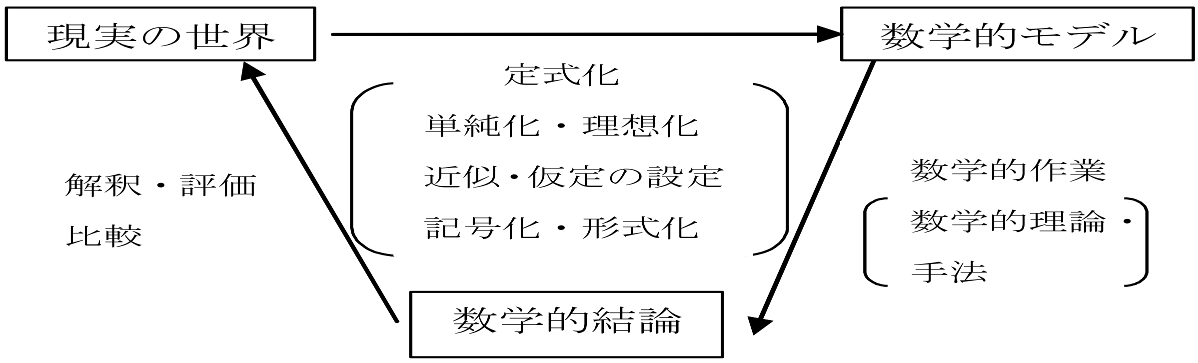


図 0-1：三輪辰郎(1983)の数学的モデル化過程

特に定式化で単純化・理想化や近似・仮定の設定等が適切になされないと，解決する事象の本質を理解できないため，適切に問題解決ができず，導き出された結論も現実事象に対して妥当でないものとなってしまう．生徒はこの定式化が困難であるため，生徒の実態の改善ができていないと考える．この改善のためには現実事象に対してよりよく問題解決を行う上で定式化を特に重視することが求められる．筆者は生徒が問題解決において，設定する仮定がいかに重要な要素であるかが実感できれば，その必要観から定式化の充実を図ることができると考えた．結果として，問題解決が進展していること，そして現実事象と数学の関連が感得できればよいと考える．そのための方法を 2 点挙げる．第一に問題解決で導き出した結論の妥当性を判断する段階を数学的モデル化過程で設定すること，第二に清野辰彦(2006)が述べる「仮定の意識化」を重視することである．この 2 点を踏まえ，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決をすることで，現実事象の問題解決が困難である生徒の実態改善につながると考える．これまで定式化を重視した先行研究はあるが，特に設定した仮定を意識化して定式化を行っている数学的モデル化教材はまだ少ないというのが現状である．実際教科書やドリル問題を見ると，現実場面を扱う発展問題でさえ初めから仮定や条件が設定されているため，適用問題のようになってしまい，生徒が現実事象と数学の関連を感得できないでいるのではないだろうか．このことから「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決が行える教材の開発の必要性があると考える．

よって本研究の目的は，数学的モデル化による現実事象の問題解決において，「仮定の意識化」を重視した教材を開発し，現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果を，開発した教材の授業実践を通して明らかにすることである．このことを通して生徒のより良い数学観の獲得を目指していく．

第 2 節　本研究の方法と構成

上記の研究目的を達成するため，以下の 4 つの課題を設定した．なお，第一，第二の課題は第三，第四の課題を達成するための基礎的な作業となる．第一の課題は，先行研究を参考にしながら，数学的モデル化による問題解決の教育的価値を明らかにし，現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得を目指すことのできる数学的モデル化過程の同定を行うことである（第 1 章）．第二の課題は，生徒がより現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得ができるよう，数学的モデル化による問題解決を充実させるために，仮定の設定に関してより重視するために必要な視点を明らかにし，さらに同定した数学的モデル化過程において，どのような問題意識を持ち，どのような行為ができれば

さらに定式化を充実させることができるのか，その視点を明らかにすることである（第 2 章）．第三の課題は，数学的モデル化教材の開発に取り組むことである．このとき，第一，第二の課題で明らかになった，「仮定の意識化」を重視する．まず，筆者にとって身近な現実事象となる場面から必要観に迫られ，問題意識を持った状態で課題を実際に解決していく．次にこれを教材化すること及び，授業化を目指し，教材を吟味することである（第 3 章）．最後に第四の課題として，開発した教材の授業実践を通して，生徒の現実事象の問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果の有効性を明らかにすることである（第 4 章）．

本研究の方法は，第一，第二の課題は主として，これまで数学的モデル化を研究してきた清野辰彦(2006)や西村圭一(2012)の先行研究の文献の整理をもとにした解釈による理論的考察を研究方法とし，第三の課題については筆者の問題解決の実践並びに教材化・授業化を目指し，第四の課題については開発した教材をもとに授業実践をし，ここでの授業の実際を表したプロトコルや生徒の問題解決のワークシート，感想のプリントからの分析による実証的考察を研究方法とした．

次に，本研究の構成について述べる．

第 1 章第 1 節では，これまでの先行研究を踏まえ，本研究における数学的モデル化の概念規定を行う．すなわち，モデル，数学的モデル，数学的モデル化過程の定義を述べる．さらに本研究において問題解決が進展していること，現実事象と数学の関連が感得させるために，問題解決で導き出した結論の妥当性を判断する段階を設定し，定式化の充実を目指した数学的モデル化過程を同定する．

第 1 章第 2 節では，まず，学校数学における数学的モデル化において，どのような教育的価値が指摘されてきたのかを整理する．そして，本研究で重視する数学的モデル化の教育的価値を明らかにし，考察を行う．

第 2 章第 1 節では，数学教育において仮定がどのように捉えられているかを整理する．

第 2 章第 2 節では，「仮定の意識化」を重視することで果たされる役割の実現のためにすべき行為と，それをどの段階で行うことで，問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得により生徒の実態を改善できるかを第 1 章で同定した数学的モデル化過程との関連を踏まえながら吟味し，整理する．そして「仮定の意識化」をすることがどのような教育的価値を持つのかを整理する．

第 3 章第 1 節では，筆者の身近であった解決したい問題場面について，数学的モデル化による問題解決を実践した．この問題解決の過程を整理し，考察を加えることで，教材の価値を明らかにする．

第 3 章第 2 節では，第 1 章，第 2 章で整理してきた，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化と開発した教材の問題解決との関連を明らかにする．

第 3 章第 3 節では，開発した数学的モデル化教材の授業実践に向け，生徒の問題解決が可能となるような数値の吟味をすることで，問題場面の再設定を行い，開発した教材を洗練する．そして，数学的モデル化教材の実践に関する先行研究をもとに，学習指導の展開を考察し，本教材の授業実践での実際の学習指導の展開の構想を整理する．

第 4 章第 1 節では，開発した教材の授業実践の構成と実際を整理する．

第 4 章第 2 節では，本教材の授業実践で明らかになった，生徒の現実事象の問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果の有効性についての成果並びに課題を，生徒の問題解決のワークシートや授業感想のデータから分析・考察を，本研究の目的を踏まえ 2 つの分析の視点を挙げ，本実践で達成されたか明らかにすることである．

第 1 章

本研究における数学的モデル化について

本章の意図と構成

本章の意図は，先行研究を参考にしながら，数学的モデル化による問題解決の教育的価値を明らかにし，現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得を目指すことのできる数学的モデル化過程の同定を行うことである．

本章の構成は以下の通りである．

第 1 節では，これまでの先行研究を踏まえ，本研究における数学的モデル化の概念規定を行う．すなわち，モデル，数学的モデル，数学的モデル化過程の定義を述べる．さらに本研究において問題解決が進展していること，現実事象と数学の関連が感得させるために，問題解決で導き出した結論の妥当性を判断する段階を設定し，定式化の充実を目指した数学的モデル化過程を同定する．

第 2 節では，まず，学校数学における数学的モデル化において，どのような教育的価値が指摘されてきたのかを整理する．そして，本研究で重視する数学的モデル化の教育的価値を明らかにし，考察を行う．

第 3 節では本章の総括を行う．

第 1 節　数学的モデル化の概念規定

本章では，これまで数学的モデル化に関する研究をしてきた清野辰彦(2006)，西村圭一(2012)の先行研究において整理されている概念規定を参考にし，本研究における数学的モデル化過程の同定に至るまでの概念規定の整理を行っていくこととする．

1．モデル

モデルとは世間で多く耳にする言葉であるが，実際はどのような意味をもつものであるのか．この項ではモデルの特徴を理解し，定義付けを行うことを目的とする．

まず，model という言葉は辞書では次のような意味をもつ．（ロングマン現代英英辞典[5 訂版]）

1 SMALL COPY
a small copy of a building, vehicle, machine etc, especially one of that can be put together from separate parts
2 FASHION
someone whose job is to show clothes, hair styles etc by wearing them at fashion shows or for photographs
3 TYPE OF CAR ETC
a particular type or design of a vehicle or machine
4 DESCRIPYION
a computer representation or scientific description of something
5 SB/STH TO COPY
Someone or something which people want to copy because they are successful or have good qualities
6 model of efficiency/virtue etc
Someone or something that has a lot of good quality
7 ART
Someone who is employed by an artist or photographer to be painted or photographed

これらを和訳すると，以下のようになる．

1　小さな模写
建物，乗り物，機械など，ある小さな模写．特に，別々の部品から一緒にまとめることができるものの一つ．
2　流行
ある人の仕事は衣服，ヘアースタイルなどをファッションショーや写真で身につけることで見せる仕事である．
3　車の種類など

ある特別な種類またはデザインの乗り物または機械

4　描写

何かのコンピュータ表現または科学的描写

5　だれか，なにかをコピーする

誰かあるいは何かコピーしたい，なぜなら彼らは成功しているか素晴らしい性質を持っているからである．

6　能力，長所のモデル

誰かあるいは何かの持っている沢山の素晴らしい性質

7　芸術

ある芸術家または写真家によって表現されるまたは写真を撮られるために使用されている誰か

この内容から考えると，4 の意味，すなわち「何かのコンピュータ表現または科学的描写」が本研究におけるモデルの意味として捉えやすいと考える．自然科学や社会科学において現実の事象を理解する上で置き換えをして表現をすることにより理解しやすくすることが model の役割ともなっている．数学教育で考えると事象を数学の知識を使える形に変えることにより，問題解決をはかることにこの model の作用を使うことができると考える．

清野(2006)はモデルの特徴の観点として R.D.Nelson(1977)の見解を示し，「幾何学的モデル」と「抽象的体系のモデルまたは表現」を挙げている(p.83)．前者の例として多面体の模型とグラフ用紙に描かれた y＝2x を挙げている．Nelson(1977)は多面体の模型については「ある理想的な（精神的な）幾何学的構造の触れることができる 3 次元の形をしたもの」という意味でこれはモデルであると述べている．また，グラフ用紙に描かれた y＝2x については「y=2x のグラフの 2 次元の形での理想的な表現」であるとし，多面体の模型のように触れることはできないが，これもモデルであるとしている．これら 2 つのモデルの例は実際にはない数学的概念を目に見えるように視覚化し，数学的概念の理解を深める上で重要な役割を果たしていると清野(2006)は述べている．一方後者は数学的概念に対して，数学的理論においてもモデルがあるとし，その例として Nelson(1977)は群の行列による表現を挙げていた．

これら 2 つのモデルは数学的概念や数学的理論を対象としたものとなっている一方で，現実的な事象としてモデルを作成する場合もある．三輪辰郎(1983)はその例として，経験科学の例を挙げ，「構成モデル（例：太陽系，分子模型)」，「類比モデル（例：電流のモデルとしての水流)」，「近似モデル（例：理想気体，完全流体，自由落体)」，「スケールモデル（例：地球儀，地図，原子モデル)」を挙げている(pp.117-118)．ここまで挙げた 2 つのモデルの分類について挙げたが，清野(2006)は W.Servais，T.Varga(1971)のモデルについての見解を挙げている．見解については以下の通りである．

「モデルという言葉は，公理系を満たす数学的モデルとはほぼ反対の意味で，別の数学に用いられている．公理系はそのモデルより抽象的であるが，物理的体系は，その数学的モデルより抽象的でないということを意味している．」(p.15)

また，Mary Grace Kantowski(1986)はモデルについて以下のように述べている．

「モデルとは，モデル化することとして同じ方法で作用するためにデザインされた出来事，状況，あるいは考えの表現を具体化，視覚化，あるいは記号化することである．
　数学において，モデルをつくることは，状況の数学的表現をはっきりと定義された状況と構成からキーとなる要素を抽象化する活動である．」(p.427)

A.Pinker(1981)もモデルについての見解を以下のように述べている．

「直観的に，体系のあるモデルは原物と同一の他の体系である．しかし，ある意味である程度原物と似ていて，それが特定の目的のために原物にとって変わることができる．
　もし抽象的な体系が考慮されるなら，それは原物とそのモデルの間にある関係が法則と理論の準同型写像（あるいは同型写像）のそれになるだろうことを期待されることができる．
　もしそのモデルが原物よりも抽象的でないのであれば，そのモデルはいくつかの理論（原物）の結果が実現される体系になるということが思いつくことができる．」(p.696)

これらから考えられることは事象をモデルにより表現することは現実の問題を解決するために，モデルが原物にとってかわることができるということである．原物とモデルの間には写像の関係がある．松原元一(1990)は写像について,「二つの集合の間の一意対応のこと」と述べている. 例えば集合 X を原物，集合 Y をモデルとし，X→Y が f によって対応していると考えると，原物を f によって Y に一意対応によって置き換えをすることができ，問題解決の手段の一つとすることができると考えられる．
また，事象からつくられたモデルは，事象よりも抽象的である，つまり事象を数学が使えるような側面・性質を使える形にして考えると言うことである．これらの特徴としては，モデルの考察が数学的概念・数学的理論（公理）あるいは事象の理解を促進し，問題解決の手段となると考えられる．
A.Pinker(1981)は先に述べたモデルの内容から，モデルの特徴並びに定義について次のように述べている．

「「モデル」の一般的な概念の基本的な特徴は下記に現れている．
　モデルは心で考えられる，あるいは物理的に実現できる体系である．
　モデルは原物の像をはっきりと定められたものである．
　モデルは討論や研究における現物の代理をできる．
　モデルの学習は原物にとって意味のあるいくつかの新しい見識を引き起こす．」(p.697)

さらに A.Pinker(1981)は次の定義を提案している．

「もし（体系）M が（体系）O をその目的のために代用となることができるならば，そしてもし，この文脈において M の学習が O にとって意味のある結果を引き起こすことができたのならば, その体系 M はある目的において体系 O（原物）のモデルである．」(p.697)

A.Pinker(1981)が述べるモデルの一般的概念の基本的特徴は，モデルによる事象の問題解決の手段とするには非常に適していると考えられる．これを数学教育の視点から考えると，1 つ目の特徴は「事象を数学に置き換えると解けるかもしれない」という仮説を立てる思考と対応している．これは数学的に考えてみようと言う姿勢をもっていることを指している．

2 つ目の特徴は原物の像をはっきりと定めるとは, 数学を用いることができる形におき換えると言うことである．このためには原物の様相を数学ではどのように表わせるか考える必要があり，仮定の設定が求められる．変数となるものも存在していると思うが，それを数学的に考えることがこのモデルへの置き換え，つまりモデル化においては必要不可欠で重要なものとなる．

3 つ目の特徴はモデル化により数学的処理をして出た結論が，現実の事象を照らし合わせることで，どのような現実の答えが導き出されるか，授業であれば議論をすることで検証の手立てとなるということを指している．

4 つ目の特徴はそのモデルにより解決されたものが正しければ，さらに詳細な仮定を設定することで，さらに詳細な結果を求めることにつながったり，異なる場面の検討をしたりと，さらに思考を広げたり深めたりすることができたり，一方で解決に導けなければ，モデルの再作成を通じて，解決に向かうことができたりと，新たな見識を生み出せるということを意味している．

ゆえに，A.Pinker(1981)が提示する定義では，上に挙げた 4 つの特徴が考えられることから，この定義を本研究においてのモデルの定義とする．

2．数学的モデル

本項では前項の内容をもとに，モデルをより数学教育の視点からみて，数学的モデルの定義を設定することを目的とする．前項においてモデルには，数学的概念や数学的理論から作成されるモデルと事象から作成される 2 つのモデルの方向性があるとしていた．まず前者について清野(2006)は Kantowski(1986)が述べる数学的モデルの題材を挙げている．Kantowski(1986)は数学的モデルを以下のように述べている．

> 「数学的モデルは具体的かもしれない．数のパターンを表現するために立体形をつくることのように．例えば，データを明らかにするためや直接的に観察することができないものを視覚化する手助けをするための図やグラフ等のような視覚化，あるいは物理的な事象の数学的描写を表現する公式のような記号化があげられる．モデル化は数学教育の方法の種類の一つに見られる．数学の授業においてとても一般的な応用であるモデルは数学的な概念や考えを説明することである．他の活動は，与えられた出来事を表現するために実在する数学的モデルと構成された数学的モデルを証明し，検証することを含んでいる．」(p.430)

Kantowski(1986)はモデルの例として，以下の例を挙げている．

> 「この数学的モデル化における応用は数の定理を説明するだけでなく，定理の証明の方向性を提案することにも使うことができる．」(p.430)

例えば，$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ （相加相乗平均）の定理の証明の 2 つの幾何学モデルは以下に与えられている．

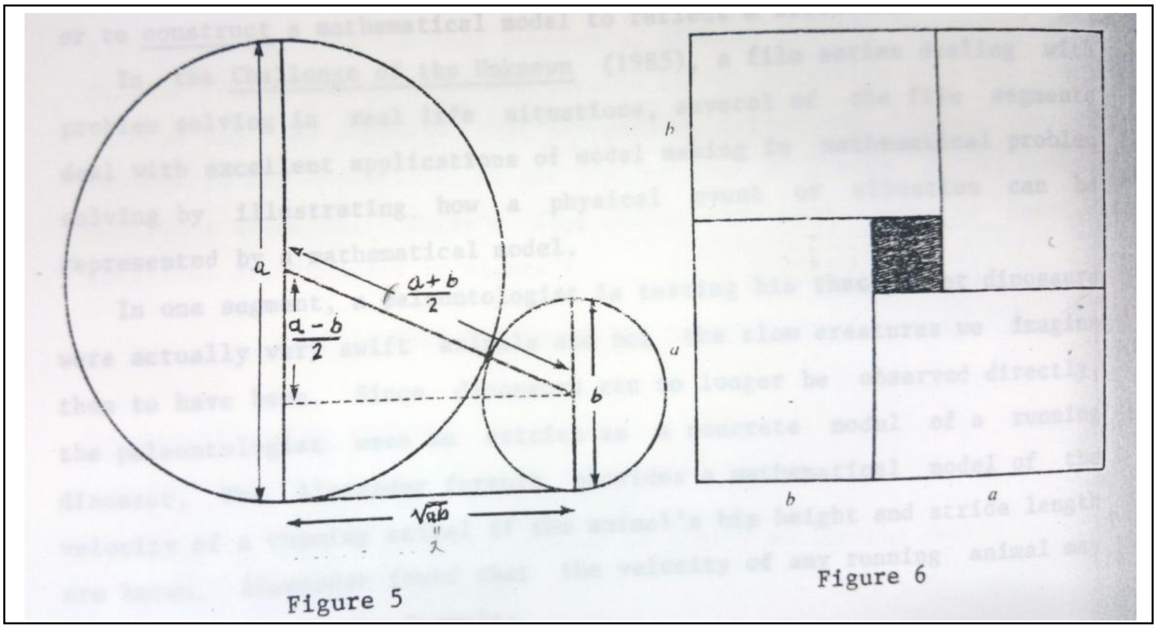


図 1-1：Kantowski(1986)の相加相乗平均のモデル

この例について Kantowski(1986)は「これらのモデルは定理を説明し，証明の方針を提案するだけでなく，それらは幾何学的に考えることや理論的な数や代数的な概念の幾何学的な解釈を得ようと求めることの訓練をする生徒の進歩を助けることもできる．」(p.430)と述べている．すなわち，A.Pinker(1981)の前項におけるモデルの定義に照らして見ると，このモデルは体系 O にあたる相加相乗平均に代用され，この図のモデルの考察が証明の方向性を定め，概念の理解に役立っている．ゆえにこのモデルの例は数学的概念や理論から作成されるモデルの数学的モデルと言えるだろう．

続いて事象から作成される数学的モデルの例を考える．A.Pinker(1981)が次の例を挙げている．

「方程式 $x=\frac{1}{2}gt^2$ は真空中の引力下の動きの解析の目的のために自由落下する数学的モデルになる事を考慮されることができる．

このように，もし私たちがどんな時でも速度を知るためにこの分析において望めば，私たちは $x=\frac{1}{2}gt^2$ を $v=gt$ だと推測するために使うことができる．

$x=\frac{1}{2}gt^2$ の学習は確かに原物の体系の意味のある結果を引き出せる．

例えば，そのような学習は同じ時間で同じ距離では落ちないかもしれない自由落下（真空中の引力下で）という情報へ導くかもしれない．最初と二つ目の間の異なる惑星上での異なった距離はカバーされるかもしれない．

方程式 $x=\frac{1}{2}gt^2$ は空気の影響力や大気運動，摩擦などの下では自由落下の数学的モデルとはならないかもしれない．

その理想のモデルは修正されなければならないか，あるいは完全に変更されるか，すなわち新しいモデルが構成されなければならない．」(p.697)

この例により，事象から作成される数学的モデルがあることがわかる．これを実測値からのデータを採用する（例えば $g=9.80665\mathrm{m/s^2}$ とする）ことで，より詳細な数学的モデルとしての式が作成できる．

以上のように，数学的モデルにも 2 つの方向性があることが確認できた．ただその中で，モデルには数学的ではないものもあると考えられる．よって，数学的であるとはどのようなものであるのか．三輪(1983)は数学的モデルについて以下のように述べている．

「モデルは，対象とする事象，それを取扱う目的と手法によって，それを表すのに，ことば，図などの視覚的手段，数や式などの数学的手段など，いろいろのしかたがある．

数学的モデルというのは，数学的手段を主な表現方法としてとっているものであり，したがって，モデルの運用においては，当然のことながら，数学的作業が伴うものである．」(p.118)

すなわち，三輪(1983)は数学的手段を表現方法とし，数学的作業が伴うモデル化のことを数学的モデル化としている．数学の教材であれば数学的作業を伴うのは当然のこととして，数学的表現とは具体的にどのようなものがあげられるか．三輪(1983)が述べていたように，主な数学的表現は数や式での表現，つまり数値的表現や代数的表現であろう．例えば，D.N.P. Murthy(1979)は以下のような数式で表現しているものを例としてあげている．

A1　$S \neq \emptyset$
A2　(a)$F : S \to R$.（b)$S \times S \to R$.（c)$H : S \times S \to R$
A3　$s, s' \in S \to H : S(s, s') = h \in R$
A4　(a)$\bigcirc : R \times R \to R$.（b)$\square : R \times R \to R$
A5　$s, s' \in S \to G(s, s') = h[F(s') \square F(s)]$　　　(p.98)

ここまで示したように数学的表現には数値的表現や代数的表現が挙げられるが，それだけにとどまらないと考える．例えば，先に示した Kantowski(1986)の例は幾何的表現も数学的表現になり得ることを示唆している．その教材の例として太田伸也(1977)の教材を挙げる．この教材の解決は，校舎の写真を取り，窓の大きさ等から写真と実際の大きさの比較を図を用いて行われている．このようなものも幾何的表現といえるであろう．ゆえにこれも数学的表現に含むことにする．

さらに永田潤一郎(2003)や清水宏幸(2003)，清野辰彦(2005)のように実際の事象をグラフにして表現することで，事象の様子や特徴を数学的に表わすことができ，これもモデル化の一つであると考えられる．ゆえにグラフ表現による数学的表現も数学的モデルとする．

Murthy(1979)は数学的モデル化の特徴について以下のように整理している．

（1）数学的モデルは演算子による変数の間の記号や関係によって表現された変数による公式化である．

（2）モデルの変数は外部の（現実あるいは物理的な）世界における物理的量を関連づける能力があるべきである．

（3）モデルにおける演算子は外部世界の物理的変数の間を関連づける能力があるべきである．

（4）モデルは一般的に，一対一の基礎（一意対応）の外部世界を関連づけられるべきではない．これはモデルが外部世界の側面のすべてに関して情報をもっているということを含意している．
（5）外部世界の情報のすべては数学的モデルがどのように使われるかということに依存しているということを含んでいる．例えば，モデル作成者のゴールのように．これは最終目的に依存している異なる数学的モデルをもつ同様の状況であるということを含意している．　(p.97)

Murthy(1979)は数学的モデルを考える上で重要な要素を以上の 5 つを挙げていたが，特に(1)〜(3)に関しては事象の問題を数学で解決する上では必要不可欠の力であり，これは先程述べた松原(1990)が述べる写像の関係や関数の一意対応といった数学的見方考え方につながると考えられる．

以上の内容と考察を踏まえ，数学的モデルとは，現実事象と数学を関連付けるように作成されたもので，数値的表現，グラフ表現，代数的表現，幾何学的表現のようなものが挙げられる．清野(2006)の数学的モデルの定義を本研究では参考にしていきたい．清野は以下のように定めている．

「数学的モデルとは，数値的表現，グラフ表現，代数的表現，幾何学的表現によって表わされたモデルである．」(p.13)

3. 数学的モデル化過程

数学的モデル化過程とは前項で挙げた現実事象にあたる体系 O を数学的モデルを作成することで体系 M を作り出す過程であると言える．さらに，これにより現実事象を数学を活用して問題解決が可能となる．ここでは，この過程をより詳細な視点で考察し，問題解決において数学的モデル化を用いるためには，どのような視点を重視すべきか明らかにすることを目的とする．まず，H.O.Pollak(1970)が示している数学的モデル化の内容について以下に筆者の和訳を示す．

私たちが学ぶ数学の応用について，その次の主要な点は，その応用が現実のものについてであり，そして現実世界と実際に結びついていなければならないということである．いくつかの他の訓練から言葉をささやき，それから頭の外にある公式を引っ張り出すことは生徒に動機を与えると考える人は，おそらく自身を誤った方向へ導くだろう．本物の数学の応用は良い理解でないか，それがよりよい理解に価値があるだろうといういくつかの他の領域の状況を始める．その希望はその数学的問題が原物の状況において最終的に結論が見識（あるいは予測の力）を与えると言うことを見つけられるということである．したがって，数学の応用の実際において，最初の段階では，探求する必要があるという認識がある．

その次の（しばしば最も難しい）段階では認識されている状況のいくつかの光を発し，明確な数学的問題に定式化することである．ここには二種類の困難がある．まず第一に，実際に現実の状況を表現するために，十分複雑な数学的問題を定式化する必要がある．しかし，その解決のわずかな機会が少なくともあるということは十分単純である．同時にこれらの二つの特質を手に入れることはとても難しい．もし，ある人がある朝，特に高潔な気持ちで起き，この時本当に重要かもしれない問題に全てのものを入れる決心するならば，彼はおそらく彼が再び見ないであろう 3 つの長い記

録の関係のシステムをもたらすだろう．ある人はそれゆえ，ひょっとすると高潔すぎたり，いくつかの側面が他ほど本当に重要でなかったりすることを彼が決心するかもしれない．そして彼は問題を単純化するためにものを打ち捨て始めるかもしれない．彼はおそらく最終的に解けるか，または「湯水と一緒に赤ん坊を流す」という全く可能な問題にたどり着くかもしれない．：その結論はもはや物理的な意味をなさない．現実世界のスキュラと数学的テクニックの間を激しく揺さぶる過程は，ある適用状況における明確な数学的問題の定式化の現実の困難の一つである．

定式化における二つ目の困難は理解するため，あるいは組み立てるため，あるいは最適化するためによく正確に理解しようとすることである．スーパーマーケットのチェックアウトカウンター，あるいは本当に成し遂げようとしている問題に向き合わないことを強要する仕事による対空ミサイルシステムを最適化することは不可能である．それゆえ，十分な数学的モデルを組み立てることの試みは，表面を強要するようになる原物の状況について多くの重要な問題を強いるようになるだろう．モデル作成の一部はこれらの問題の答えになるだろう．

問題がうまく定式化された後，その次の段階ではもちろんそれを解くことだろう．正直なところ，私たちが見てきたように，作業が続いている間の多くの時間で，その過程は認識，定式化，そして解決の間を後ろや前へ動いたりしている．

次に，そこはとてもよい計算の段階になるかもしれない．もし，固有番号がその問題に適切であれば，それからいくつかの計算は発見された解決の本質への追加の洞察を与えていくだろう．これを越えて，しかしながら，計算の問題の準備はしばしば数学における必要性より，よりはるかに注意深く，正確になるよう強要する．もし，全てのものが適当に進みつづけるならば，数学的作業はよくとても感傷的で，発見するべきチェックポイント（分析のすべての部門で自然におこる）を直感的に使われる．コンピュータはその直観力をもっていない．そして，そのチェックポイントもそれゆえ，時間より先にプログラムを組み立てられなければならない．プログラムにおける全ての偶然性を通してこの思考過程は，ある人の思考において，よりもっと正確になることを強要し，実際原物の状況の重大な特徴を発見するかもしれない．

実際の数学の応用において，最終的には説明の段階がある．それは，外部世界において，原物の状況に数学的な結果と新たな結果を関連づけることである．その作業は，結果の重要性が発見されるまで，そして応用の分野の人々がしてきたことを見て，理解する機会を得るまで終わらない．

(pp.325-326)

清野(2006)は上記の記述を数学的モデルを活用して行う問題解決に対して段階に分け，それぞれに対して名称を付けるとすれば，「問題意識」，「定式化」，「解決」，「解釈」，「評価」と表現できるとしている．これにより，H.O.Pollak(1970)が数学的モデル化過程の根本となる 5 つの段階を経ており，さらに最終的な解決に至るまで続き，これにより問題解決がなされることが示されている．つまり数学的モデル化過程はサイクルを経ているものであると考えられる．このサイクル性を示しているものとして V.Treilibs et al.(1980)，K.H.Oke et al.(1986)の数学的モデル化過程を示す．

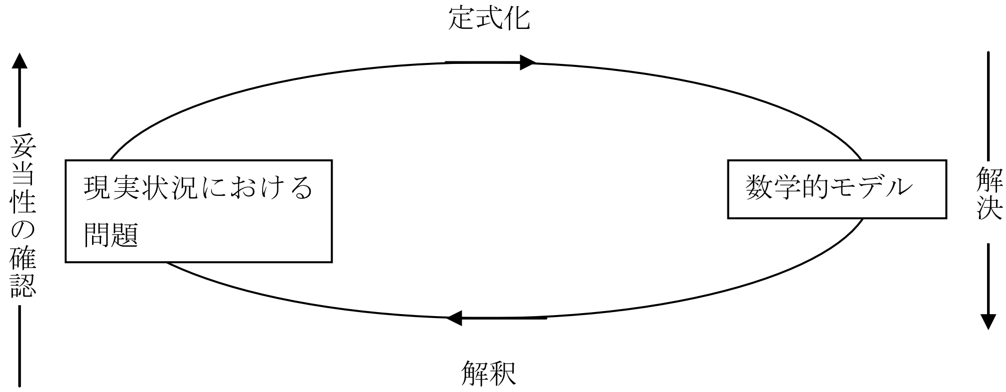


図 1-2：V.Treilibs et al.(1980)の示す数学的モデル化過程

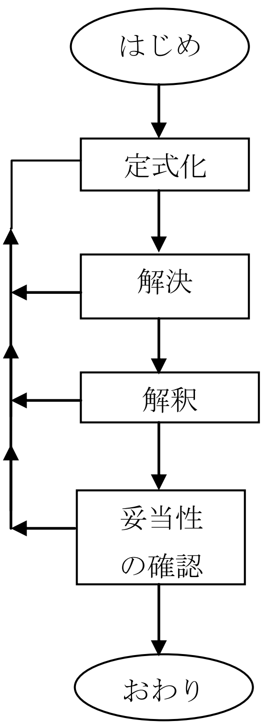


図 1-3：K.H.Oke et al.(1986)の示す数学的モデル化過程

また，H.O.Pollak(2003)は H.O.Pollak(1970)をもとに，より細かい数学的モデル化過程の相として以下の 8 つの相を挙げている．相とは特徴を意味しており，先に挙げた「問題意識」,「定式化」,「解決」,「解釈」,「評価」 のような段階を示している．ただし，必ずしもその順に進むわけではなく，場合によっては，適宜各段階に戻って思考するということを示している．

①現実世界において，知りたい，したい，理解したい，と思うことを同定する．その結果は，現実世界における 1 つの問題となる．
②現実世界の問題において重要と思われる「対象」を選び，それらの間の関係を同定する．その結果は，現実社会の状況における重要な概念を同定したことになる．

③その対象やそれらの相互関係について，保つべきことは何か，捨象すべきことは何かを決定する．すべてのことに注意を向けることはできないからである．その結果は，もとの問題の理想化版となる．
④この理想化版を数学的な用語に訳し，理想化された問題の数学的な定式化を得る．これが「数学的モデル」である．
⑤そのモデルに関連のある数学の諸分野を同定し，これらの分野に関する直感や知識を働かせる．
⑥数学的な方法や洞察を使い，結論を得る．この過程で，新しい技法や興味深い例，解法，近似，定理，算法（アルゴリズム）が得られるかもしれない．
⑦これらの結論すべてを採用し，現実世界へ訳し戻す．いま，理想化された問題に関する理論を得たことになる．
⑧現実性のチェックをする．言われていることを信じるか．その結論は実際的か．その答えは合理的か．その結果は受け入れられるか．

a)「yes」ならば，現実世界の問題解決は成功した．次の作業は潜在的な使用者に伝えることである．これは難しいが，とりわけ重要である．

b)「no」ならば，はじめに戻る．その結論はなぜ実際的でないのか，あるいは，その答えはなぜ合理的でないのか，その答えはなぜ受け入れられないのか．それは，モデルが正しくないからである．何が誤っているかを調べ，何が原因かを突き止めようとし，再び始める．

(pp.649-650)

一方，これまでの国内での先行研究を見てみると，まず三輪辰郎(1983)が 4 つの段階を挙げ，H.O.Pollak(1970)の過程を整理している．

(1)その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する（定式化）．
(2)定式化した問題を解く（数学的作業）．
(3)得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価する（解釈・評価）．
(4)問題のより進んだ定式化をはかる（よりよいモデル化）．　　(p.120)

三輪(1983)は以下のように述べている．

「上述の過程で，(1)では，理想化・単純化ないし近似など，一種の「結晶化」がなされるとともに，適切な仮定の設定，それらを数学的言語で表現することが必要である．この際，解けるように簡単な定式化をはかることと，事象の複雑さを捉えることは，経済学でいうトレードオフの関係といえる．また，(3)で，結果が検討され，評価されるが，それが満足できないときは，(4)で示すようによりソフィストケートされたモデルを求めて，(1)~(3)の過程をくり返すことになる．つまり，(4)は(1)~(3)とは少し違うのである．(1)~(3)で，過程が一応完結するのであるが，(3)で行った評価の結果を踏まえて，いっそうのモデルの改良を求めて再び(1)~(3)をくり返すというスパイラル的発展を(4)で示したのである．」(p.120)

以上を踏まえ，三輪(1983)は全体の過程として図 1-4 を示している．

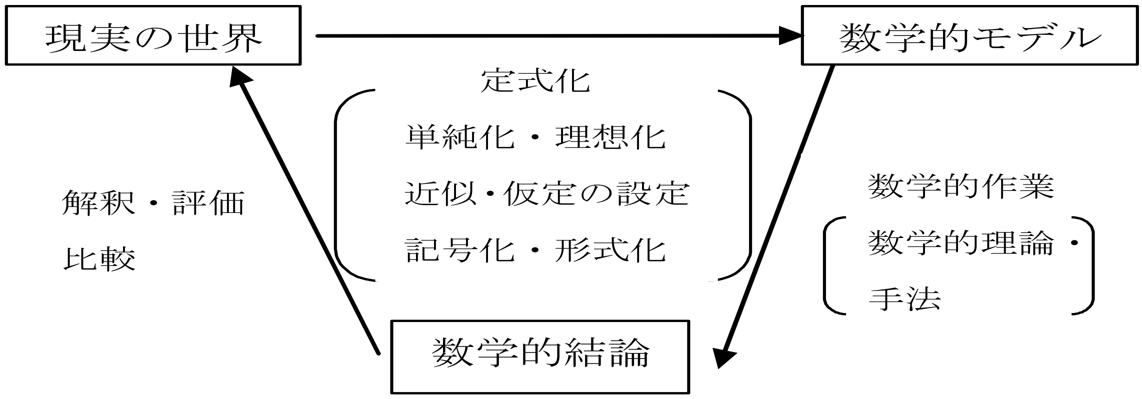


図 1-4：三輪辰郎(1983)の数学的モデル化過程

三輪(1983)の数学的モデル化過程については，まず定式化の段階では，事象を数理的に捉えるため，単純化・理想化や近似・仮定の設定などが行われている．ここでは問題場面の設定のため，主に仮定の設定が行われている．つまり，数学を活用して問題解決できる形にするため，解決のために重要でない要素を捨象したり，複雑な要素は定数化して単純化したり，数学的処理が容易になるように理想化される．また，事象を数学的に表現するため，記号化や形式化が行われる．具体的には先の数学的モデルの定義のように表現する．数学的作業の段階では，数学的理論や手法を用いた処理が行われ，数学的結論を導き出す．具体的には，数学の既習の内容を用いて問題解決するということである．そして，解釈・評価・比較の段階では，得られた数学的結論の適切性や妥当性の判断，及び評価が行われ，それに満足できない場合は，よりよいモデルを求めて，数学的モデル化過程のサイクルを再び経て解決へつなげていくということである．

先行研究を見てみると，まずこの三輪(1983)の数学的モデル化過程を参考にして，それぞれの主張につなげている．ゆえに，本研究でもこの三輪(1983)の数学的モデル化過程をまず参考にしていくこととする．

4．本研究における数学的モデル化過程の同定

本項では，本研究の目的を果たす上で，問題解決の進展や現実事象と数学の関連を感得するために，問題解決で導き出した結論の妥当性を判断する段階を設定し，本研究における数学的モデル化過程を同定することを目的とする．まず，Murthy(1979)は数学的モデルの作成にあたり，不可欠な要素を 3 点を挙げている．

（1）数学の公式の種類の知識，例えば，基本的な概念，論理的な一貫性，そして概念の妥当な使用
（2）外部の（物理的あるいは現実）世界のよい理解はモデル化される．例えば，意義のある物理的特徴と意義のないものとを区別する直感力，そしてそれらの間の時空関係の説明
（3）数学の公式の変数と外部世界の重大な変数の間における，適した数学の公式を選ぶこと，そして一意対応をつくることの創造的な能力（あるいは技術）　(p.98)

これらの要素について，数学的モデルの作成にはいかに既習の数学の内容を活用できる形にできるかが重要である．さらに作成する上で現実事象のどのような要素を作成する際に用いるかを考えることは重要であると考えられる．

次に西村圭一(2001)の数学的モデル化過程について挙げる．西村(2001)の数学的モデル化過程の特徴としては，三輪(1983)を参考に，「定式化の段階を，事象を目的に合った数学的な問題場面に作り替える段階と，数学的な問題場面から数学的モデルを導く段階に分けて考えることにする」(p.3)と西村は述べている．このように分けた理由として，「定式化と数学的モデルの作成の段階は，質の異なった困難さを持つと考えるから」(p.3)としている．ゆえに西村(2001)は以下のように過程を定めている．

(1)その事象を目的に合った数学的な問題場面に作り替える．（定式化）
(2)数学的な問題場面から数学的モデルを導く．（数学的モデルの作成）
(3)数学的手法を用いて，数学的結果を得る．（数学的作業）
(4)得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価する．（解釈・評価）
(5)必要に応じて(1)~(4)を繰り返し，現実世界の問題のより進んだ解決をはかる．　(p.3)

この過程を図式化したものが，図 1-5 のように定められている．

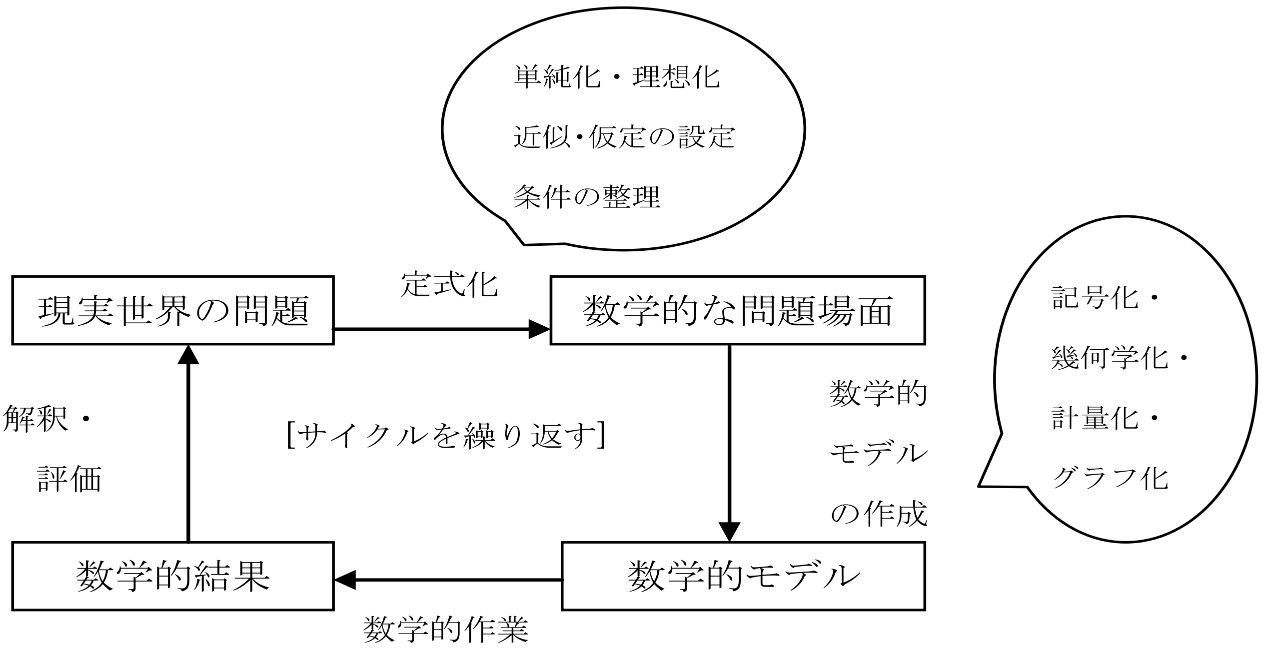


図 1-5：西村圭一(2001)の数学的モデル化過程

この数学的モデル化過程の特徴としては，西村(2001)が述べている通り，現実世界の場面から数学的モデルが作成されるまでの段階が，より細かく分割されていることであろう．筆者も感じていたことではあるが，実際の現実事象をすぐに数学を用いて解決できる状態，つまり数学的モデルが作ることは生徒の実態を考慮すると困難であると考えていた．そこで西村(2001)のように，まず定式化の段階で問題場面

を単純化・理想化したり，近似・仮定を設定したり，さらに条件を整理することで，数学的な問題場面に整理し，そこから数学的モデルを作成することがより容易になり，スムーズな思考が可能となると考える．

しかし，問題解決が進展していること，そして現実事象と数学の関連が感得するためにはより定式化を充実させる必要があると考える．本研究では定式化をより重視するため，この段階だけで考えるには限界があると考える．ゆえに定式化を充実させるために，数学的モデル化過程において定式化以外の他の段階で定式化の充実を図ることを目指す．そのため，国立教育政策所(2013)における OECD の数学的リテラシーの枠組みにおける数学的プロセスを見てみる．

ここで挙げられる数学的リテラシーとは,「数学的プロセス」「数学的内容」「数学手が用いられる状況」の 3 つの側面によって特徴づけられている．その中で，数学的プロセスとは,「生徒が数学的な内容に取り組むのに必要な技能のまとまり」とし，PISA の数学的リテラシーにおいては,「生徒は実世界の文脈に基づく問題に取り組み，数学的探究が行えるように問題の特徴を見つけ出し，関連する数学的な能力を活発に使い，問題を解決する」としている．また,「「数学化」のプロセスには，思考と推論，論証，コミュニケーション，モデル化，問題設定と問題解決，表現，記号による式や公式を用い演算を行うこと，テクノロジーを含むツールを用いることといった 8 つの能力が関わっている．」とし，これらの能力を含む，認知的活動は，次の 3 つのプロセスとして説明されている．

「定式化」: 数学を応用し，使う機会を特定することも含めて，提示された問題や課題を数学によって理解し，解決することができること．与えられた状況を理解し，それを数学的に処理しやすい形に変えることもその 1 つである．さらに数学的に構築し，表現し，変数を特定し，簡単な仮説を立てて問題を解決したり，課題に対応したりすることも含まれる．

「適　用」: 数学的に理論化し，数学的概念・手順・事実・ツールを使って数学的に問題を解決すること．これには計算をすることや，代数式や方程式，その他の数学的モデルを操作することが含まれる．数学的な図表やグラフから得た情報を数学的に分析することや，数学的な表現や説明する力を発達させること，数学的なツールを使って問題を解くことなども含まれる．

「解　釈」: 数学的な解答や結果を検討し，問題の文脈の中でそれらを解釈すること．数学的な解答に判断を下し，問題の文脈に即して推論し，結果が理にかなっていて，状況の中で意味を成すかどうかを決定すること．

続いて,「数学的内容」とは，実生活で見られるような数学的概念のまとまりとし，数学的に考察する前の事象や場面によって，あるいは数学的カリキュラムの内容のいくつかを結び付ける概念によって構成されているとしている. これらを「包括的アイディア」と呼び, 4 つの領域として変化と関係, 空間と形, 量，不確実性とデータを挙げている．

最後に,「数学が用いられる状況」とは，実生活で生徒が遭遇する状況とし，様々な状況で数学を用いて問題を解決できるかを見るとしている．状況としては私的，職業的，社会的，科学的の 4 つの場面を想定している．

以上から数学的リテラシーの枠組みの特徴を整理したものが図 1-6 である．

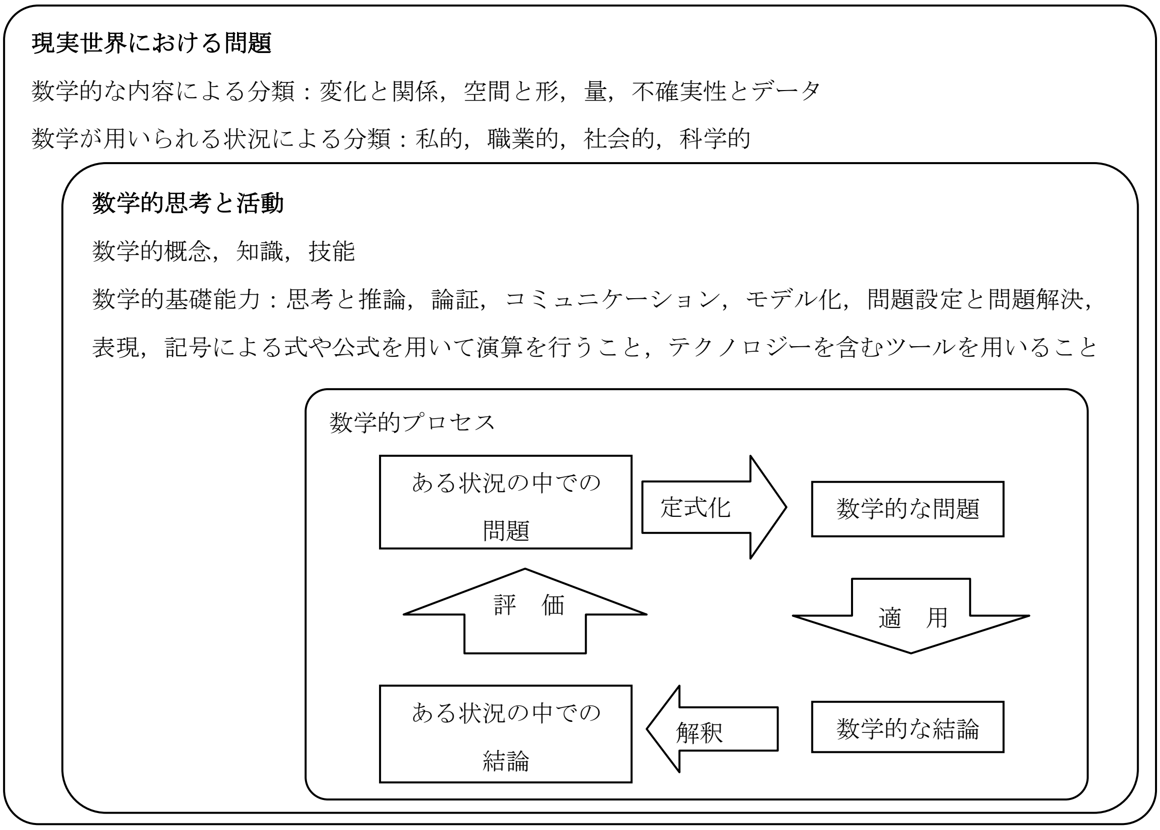


図 1-6：国立教育政策所(2013)における OECD の数学的プロセス

この数学的プロセスの特徴は「数学的な結論」が出たのち，その解答を解釈することで「ある状況の中での結論」とし，その後「評価」を経て問題解決へとつなげている．文献中で評価について述べられている内容はなかったが，ここまで挙げた他のモデル化過程では「解釈」と「評価」とを一緒の活動にしているが，この数学的プロセスではこの 2 つを分けていることが特徴であると考えた．これによりまず解釈では先に挙げたように，「数学的な解答や結果を検討し，問題の文脈の中でそれらを解釈する」．その解釈によって得られたある状況の中での結論の適切性や妥当性を評価し，結論を出す．さらにこの結論が妥当でない場合，新たな数学的モデル化過程のサイクルを回すために仮定を見直し，さらに設定し直す仮定を考えることで，より問題解決の進展や，現実事象と数学との関連を感得させることができると考える．

ここまで様々な数学的モデル化過程を挙げ，特徴について考察してきた．序章で述べた通り，生徒の実態として，現実事象の問題解決に数学を使えない，使おうとしないという姿勢が顕著であったことを踏まえると，生徒にとって現実事象の問題解決は数学的モデル化過程の定式化が困難であると考えられる．ここで躓くのは，問題解決をしようという意欲があるかが問題ではなく，数学を活用して問題解決するには何をしてよいのか分からないというのが生徒の心境であると思う．ゆえに，生徒の実態改善のため，現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学との関連を感得するために生徒が数学的モデル化過程においてすべきこととして生徒が現実事象を定式化することに対する困難性をできるだけ軽減するために，定式化において仮定を設定することが，いかに問題解決で重要な要素であるかを生徒に実感させる機会を設けることが有効であると考えた．生徒の実態を考えると，一度の定式化で現実事象を，数

学を使える完璧な数学的な問題場面や数学的モデルが作れるかといえば，困難であると考える．実際，これまでの先行研究における数学的モデル化過程は問題解決ができなければよりよい数学的モデルを志向し，サイクルを回していくという前提があったとしても，具体的にどうすればより良い数学的モデル化を志向できるかが明らかにされていなかったと考える．それが生徒にとって，現実事象の問題解決は基本的には一度の問題解決でという意識を持ってしまい，定式化の難易度が上がることで苦手意識を持つことや意欲の減退につながり，最終的には現実事象の問題に対して数学を使って問題解決する姿勢が非常に低いという現在の実態につながってしまったと考える．

ゆえに生徒の実態の改善のため，定式化の難易度を下げ，生徒が現実事象の問題解決に取り組みやすい環境を作るための本研究における数学的モデル化過程を同定することとする．前提として複数回サイクルを回すという前提のもとで問題解決をさせ，徐々に問題解決を進展させていくようにすると考えたら，これまでの先行研究より容易な状況で問題解決を進展させていける．つまり数学的モデル化過程のサイクルを経させながら，最終的に問題解決につなげさせるという，少しゆとりをもった環境や体制を整えてあげることが重要であると考える．

そして，数学を使える状況にするための問題場面を考える上で，定式化で設定した仮定がいかに後の結論に影響を与えているのかを実感することができれば，この定式化の段階が現実事象と数学を関連について理解を深める上で，非常に重要なものであると生徒が実感することにつながるのではないかと考える．そしていずれは生徒が自ら問題解決をするときに一度のサイクルで問題解決をできるようになることにつながるのではないかと考える．

この見解のもと，ここまで挙げた先行研究における数学的モデル化過程を改めて見てみる．三輪(1983)は，定式化において行うことは基本的に現実事象の問題を単純化・理想化などを行うことで数学的な問題場面とすること，そしてその場面で数学を使って解決できる形にするため，仮定を設定することで数学的モデルとする 2 つの作業がなされる．西村(2001)はこの 2 つを分けて行うことで，現実場面の問題を数学的モデルを作成することの難易度が下がり，生徒が取り組みやすい問題解決の過程にすることができる．そこで本研究では，より問題解決に関わる仮定に生徒が着目することで，生徒が現実事象の問題解決の進展と，現実事象と数学の関連を感得できるようにするため，定式化を数学的な問題場面の作成と数学的モデルの作成の 2 つに明確に分け，生徒がより仮定に着目しながら問題解決できる形を目指すこととする．

また定式化を充実させるために，定式化において仮定を設定することが，いかに問題解決で重要な要素であるかを生徒に実感させる機会を設けるとしていた．ここで三輪(1983)や西村(2001)を見てみると，解釈・評価が 1 つにまとめられている．しかし，ここでよりよい数学的モデルを志向する具体的な方法が明らかにされていなかった．そこで OECD の数学的プロセスのように解釈と評価を 2 つにわけることで個別化することとした．まず解釈では「数学的な解答や結果を検討し，問題の文脈の中でそれらを解釈する」活動がなされ，現実事象と数学の関連がより意識化される．まずは導き出した数学的結論が現実事象に対して妥当であるか判断させることを評価で行い，より良い数学的モデルを志向するために，生徒に仮定を着目させ，設定した仮定が現実事象の問題解決において重要な要素であることを実感させる行為を評価において行うこととする．これにより，よりよい数学的モデルを志向する必要性があれば仮定を再設定することで問題解決を進展させ，最終的な結論を出すことを目指すことができると考える．

以上の主張のもと，本研究で用いる数学的モデル化過程の同定を行う．以下で設定した段階を経て，

数学的モデル化による問題解決を行うこととする.

(1)数学的な問題場面の作成：現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで，数学の問題場面としておきなおす.
(2)数学的モデルの作成：数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで数学的モデルを導く.
(3)数学的作業：数学的手法を用いて数学的結論を得る.
(4)解釈：数学的結論が現実的文脈に照らしてどのような意味を持つのかを理解する.
(5)評価：現実的文脈を考慮した結論を現実場面に照らして評価し，妥当であれば最終的な結論とする．妥当でなければ仮定を見直すとともに，おき直す仮定を考え，問題解決の進展を図る.

まず「①現実場面における問題」があり，それを単純化・理想化し，さらに条件を整理することで，「②数学的な問題場面」ができる．さらにこの場面で近似・仮定の設定をすることで，「③数学的モデル」が完成する．三輪(1983)の述べる定式化がここまでの過程である．これを数学的作業により解決することで，「④数学的結論」を得る．この数学的結論が現実的文脈に照らしてどのような意味を持つのかを解釈し，「⑤現実的文脈を考慮した結論」を出す．これが最終的に現実場面に対して適切か評価することで，問題解決がなされたとする．もし結論が妥当でなければ仮定を見直すとともに，おき直す仮定を考えることで問題解決を進展させる．以上の問題解決の過程を整理し，本研究の数学的モデル化過程を図 1-7 のように同定する.

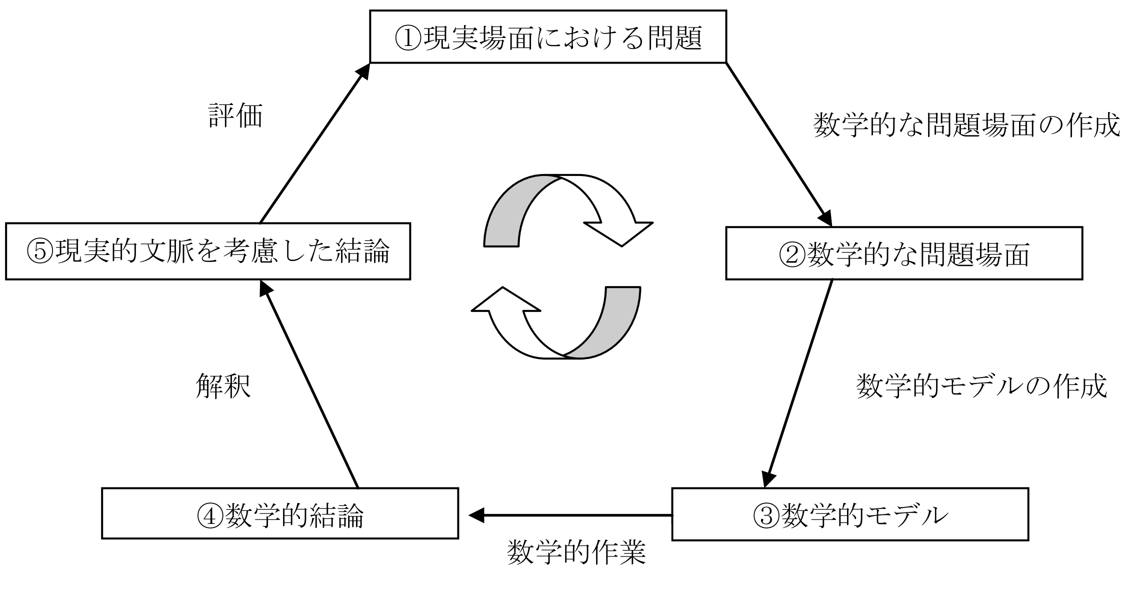


図 1-7：本研究における数学的モデル化過程

第 2 節　数学的モデル化の教育的価値

1．先行研究において重視されている数学的モデル化の教育的価値

前項では数学的モデル化過程の同定を行った．本項では先に示した数学的モデル化による問題解決の教育的価値について整理していくことを目的とする．まず，清野(2006)は W.Blum，M.Niss(1989)が述べている数学の応用や数学的モデル化の教育的価値として 5 点を挙げている．以下は筆者の和訳である．

1．形成的議論

生徒の一般的な能力と態度を発達させるために適した意味として，数学の応用と数学的モデル化の実行と問題解決は，特に開かれた気質と自己依存だけでなく，全般的な調査的，創造的，そして問題解決的な能力を育成する方向に関心を向けている．

2．批判的な能力の議論

生徒たちが応用とモデル化を通じた数学の利用によってますます影響を与えられている社会において，批判的な能力をもち，個人的，そして社会的な市民として正直さをもって生活し活動するために準備すること．そのような能力の目的は生徒が自主的に見たり判断したりできるようにし，数学の利用の実際の例を認識し理解することができるようにするためである．

3．実用的な議論

他教科，または職業的文脈（サービス教科としての数学）において，あるいは生徒の現在または未来の日常生活言及されるかどうかという，特別な数学の領域と状況の側面を表現する問題解決に使えるように，数学教育は生徒が数学を準備するべきである．いいかえると，数学教育は生徒に様々な文脈の応用，モデル化，そして問題解決を訓練させることを認めるべきである．

4．数学の全体像に関わる議論

科学，社会や文化における活動領域としてのすべての事実において，数学の豊かで包括的な数学の像を生徒に認めさせるために数学教育の仕事は重要である．そのような像において，応用，モデル化，問題解決が不可欠の構成要素とみなされるようになって以来，この構成要素は数学カリキュラムにおいて適切な位置が割り当てられるべきである．

5．数学の学習の促進に関わる議論

数学教育における問題解決，応用そしてモデル化の結合の側面と活動は数学学習の動機づけと関連によって，数学の概念，概念，方法，そして結果を獲得したりする生徒を助けることに適している．そのような仕事は生徒に数学的に考えることと，数学内外において数学的なテクニックを選んだり実行したりする練習を与える．

この中で 3 と 4 に関しては，特に数学的モデル化による問題解決においては重視されるべき教育的価値となると考えられる．まず 3 についてはここまで数学的モデル化過程等についてまとめてきているが，やはり数学的モデル化による問題解決をする意義としては，現実の場面をいかに数学の内容を活用して解決するかというところに尽きると考える．そしてその現実の場面を仮定の設定等において，いかに実用的な扱いができるかということが重要な視点となるであろう．また，4 について，数学の全体像とは，言うなれば数学観とも考えられると思うが，この中には数学の有用性や数学と現実との関連性について

の思考も含められる．つまり，この数学的モデル化による問題解決自体が，生徒らの現実との関わりの中で育成されるものであり，数学観のより良い方向への変化が可能なのである．

その他の点についても，数学的モデル化による問題解決を行えば，自然と関わってくる視点ではある．当然ながら，これだけですべての教育的価値を網羅したとは言えないが，代表的な視点としてこの 5 つの観点は数学的モデル化による問題解決の教育的価値として挙げてよいと考える．

また，M.Niss(1989)は数学の応用や数学的モデル化の教授や活動について，目標とすべき観点について以下の 3 点を挙げている．

目標 1 : 生徒は応用／モデル化／問題解決過程を実行することができるべきだ．

目標 2 : 生徒は刺激的なモデルと数学の応用，そしてあるいは応用／モデル化／問題解決過程の特徴的な側面の知識を要求するべきだ．

目標 3 : 生徒は与えられた応用，モデル，モデル化，そして問題解決の例を分析し，批判的に評価することができるべきだ．

上記は，教育目標であるとともに，研究課題ともなりうる．つまり，学習指導の際にも活用すべき観点である．

一方，国内の議論に目を向けると，三輪辰郎(1986)は数学的モデル化の数学教育の意義として以下の 3 点を挙げている．

ア．学校数学をより応用可能なものにしようとすること．

イ．数学的考え方の育成をはかろうとすること．

ウ．知識が開発される過程に生徒を参加させようとすること．

三輪は学校数学をより応用可能にすることを具体的に，「教科書に見られる応用問題そのものは，事象そのものではなくて，モデルである．つまり，十分数学の内容にうつされ，モデル化されたものを取り扱っているのである．しかも，モデル化の過程を意識することなく，他人によって作られたモデルを操作しているのである．」としている．

三輪(1986)はここでアの学校数学をより応用可能にすることの意味として以下の 3 点を挙げている．

a．実態の数学の応用の広範さ・多様さに目を向け，その豊かさと学校数学とのギャップが大きくなりすぎないようにすること．

b．数学という教科が孤立した，独立充足的な教科ではなく，他の教科ないし，社会と深い関連をもち，しかも，有力な方法をそれらに提供していることを生徒に知らせること．

c．今日の教科書に見られる応用問題の用具性，あるいは問題や解決法そのものの持っている数学内への閉鎖性ないし狭さ，さらに前提（仮定）の分析の欠如を超える必要があること．

また，先に述べたイとウと上の c．と関連させて以下のように述べている．

「数学的モデル化は，そのことばが示すように，doing mathematics－行動としての数学－に関わっているのである．つまり，仮定を考えているわけである．したがって，その過程ないし行動の中に当然含まれるもろもろの数学的考え方―数学的行動様式という方がよいかもしれない―が，数学的モデル化の過程で具現化されることになる．つまり，数学的モデル化過程での行動が数学的考え方の実現であるはずである．だから，重要とされる数学的考え方の数々はこのモデル過程の中で，意識的に育成がはかられることになる．」(p.24)

ここまでの三輪の主張を見ると，数学の応用の方向性が見られると考える．一般的に応用問題といえば，難易度の高い問題を想像しやすいが，真の数学の応用とは，これまで習った既習の内容を一般的な現実事象における問題解決に活用する，つまり応用することが求められる．この活動を成すことでできるこの思考の過程がすなわち数学的モデル化の過程そのものであり，これにより，一般的に数学的な見方考え方と呼ばれる力の育成も可能であると捉えられる．

さらに三輪(1983)の述べる数学的モデル化の教育的価値として，清野(2006)は 5 つの視点として挙げ，整理している．

①学校数学をより応用可能なものにするため．
②数学的考え方の育成をはかるため．
③知識が開発される過程に生徒を参加させるため．
④探究的・創造的な面の育成をはかるため．
⑤数学的概念の基礎的な理解をいっそう強めるため．

以上を踏まえ，W.Blum，M.Niss(1989)のような国外の主張，そして三輪(1983)のような国内での主張を挙げた．清野(2006)はこれらを対応させ，表 1-1 のように整理している．

表 1-1：W.Blum，M.Niss(1989)と三輪辰郎(1983)が述べる数学的モデル化教育的価値の対応

W.Blum，M.Niss(1989)	三輪辰郎(1983)
1. 形成的な議論	②数学的考え方の育成をはかるため． ④探究的・創造的な面の育成をはかるため．
2. 批判的な能力の議論	
3. 実用的な議論	③知識が開発される過程に生徒を参加させるため．
4. 数学の全体像にかかわる議論	①学校数学をより応用可能なものにするため．
5. 数学の学習の促進にかかわる議論	⑤数学的概念の基礎的な理解をいっそう強めるため．

清野(2006)は，このように整理し，W.Blum，M.Niss(1989)が整理した数学的モデル化の教育的価値の中に，三輪(1983)が述べる教育的価値は包含され，W.Blum，M.Niss(1989)が整理した 5 つの議論は国内外問わず，見込まれている数学的モデル化の教育的価値を網羅していると考えられるとしている．

2. 本研究において重視する数学的モデル化の教育的価値

前項では，学校数学における数学的モデル化の教育的価値を W.Blum，M.Niss(1989)と三輪(1983)の論文をもとに概観してきた．数学的モデル化の教育的価値として，少なくとも 5 つが挙げられていた．しかし，清野(2006)は「各国の生徒の実態，各国が掲げる教育の目標によって，その重みづけは変わるのである.」(p.25)と述べ，数学的モデル化の教育的価値を 3 点挙げている．

(1)　数学観を変容させせることができるため．
(2)　事象を数理的に考察する能力を育成することができるため．
(3)　数学的考え方を育成することができるため．

本項では数学的モデル化による思考がどのような教育的価値をもたらすのか，本研究の数学的モデル化による問題解決において特に重視する視点をまず考え，それぞれの視点において整理していくこととする．

まず重視する視点は，主に清野(2006)の見解を参考にしたいと考えるが，本研究では生徒が現実事象の問題解決の進展や現実事象と数学の関連を感得できるようにしたいと考えていた. これを踏まえると, (1)については，これまでも数学的モデル化による問題解決が研究されてきたが，生徒の数学観については実態を踏まえるとまだ十分な効果を結果として得られていないと考えた．しかし，数学的モデル化による問題解決には生徒の数学観を変容させる可能性は十分にあると考えるため，視点としては「数学観の変容の可能性」としたい．(2)については，「現実事象と数学の関連を意識した問題解決の有効な手段」とすることで，生徒の実態改善を果たす方法として数学的モデル化の教育的価値を示したい．そして(3)については仮定の設定は現実事象を数学的に見て，考えることでできることなので，現在の数学の学習も踏まえ，「数学的な見方考え方の育成」とする．

よって，本研究において強調する数学的モデル化の教育的価値を 3 点挙げる．

(1)　数学観の変容の可能性
(2)　現実事象と数学の関連を意識した問題解決の有効な手段
(3)　数学的な見方考え方の育成

この 3 つの観点について，先の W.Blum，M.Niss(1989) の 5 つの観点で言うと，(1)は 4 に対応し，(2)は 2，3 に，そして(3)は 1，5 に対応したものとなっている．これらの観点について本研究における数学的モデル化による問題解決の価値をそれぞれ整理しておく．

(1)　数学観の変容の可能性

序章において現在の学校教育における生徒の実態を挙げたが，ここでは数学観の変容の観点からより詳細に生徒の実態を考察する．

現在，生徒がなぜ数学を学習するのかということに対して，勉強する価値を見出せない生徒が多いという実態，そして日常生活での問題解決に数学を使えない，または使おうとしない生徒が増えている．そこで 2012 年の PISA 調査では，学習の成果もしくは結果としての数学的リテラシー得点の影響を与え

る背景要因として表 1-2 の 5 つの観点を挙げて生徒質問紙で調査がなされている．

表 1-2：数学的リテラシー得点の影響を与える背景要因の調査問題

①数学における興味・関心や楽しみ：これは，教科としての数学を楽しいと感じることによって，数学に対して興味・関心を持ち，取り組むという考え方に基づいており，生徒の内発的動機づけと考えることができる．
②数学における道具的動機づけ：これは，生徒が将来の学習や仕事にとって重要であるという考え，あるいは信念を動機付けとして，数学に取り組むという考え方に基づいており，上述の「数学における興味・関心や楽しみ」が内発的動機づけであるとすると，これは外発的動機づけである．
③数学における自己効力感：これは，生徒が，自分は数学の課題を効果的に解いたり，難しい数学の問題を解くことができると考えている（信じている）かどうかに関連している．
④数学における自己概念：これは，生徒自身の数学の能力に対する自己評価であり，例えば数学が得意かどうか，成績が良いかどうか，数学がわかると感じているかどうかなどを内容とする．
⑤数学に対する不安：これは，数学の授業や数学の問題などに対して無力感があったり，ストレスを感じたりするかどうかに関連している．

ここで特に着目する観点として②と③を挙げる．②については「あなたは数学について，どのように感じていますか」と尋ね，「数学に関する道具的動機付け」に関する以下の 4 項目について，生徒に「まったくその通りだ」「その通りだ」「その通りでない」「まったくその通りでない」の 4 つの選択肢から選ぶ質問がなされ，表 1-3 のようなものであった．

表 1-3：「数学に関する道具的動機付け」に関する質問①

(2)　将来つきたい仕事に役立ちそうだから，数学はがんばる価値がある
(5)　将来の仕事の可能性を広げてくれるから，数学は学びがいがある
(7)　自分にとって数学が重要な科目なのは，これから勉強したいことに必要だからである
(8)　これから数学でたくさんのことを学んで，仕事につくときに役立てたい

これらの質問に対し，日本と OECD 平均（29 か国）の結果は表 1-4 の通りである．

表 1-4 :「数学に関する道具的動機付け」に関する結果①

国名	2012 年				
	「数学における道具的動機付け」指標	生徒の割合			
		(2)	(5)	(7)	(8)
	平均値 標準誤差	割合 標準誤差	割合 標準誤差	割合 標準誤差	割合 標準誤差
日本	-0.50 (0.02)	56.5 (1.1)	51.6 (1.1)	47.9 (1.0)	53.5 (1.1)
OECD 平均（29 か国）	-0.03 (0.00)	74.3 (0.2)	77.3 (0.1)	65.3 (0.2)	70.2 (0.2)

この結果から，日本の生徒は OECD 平均と比べて，数学という教科に対し，勉強して将来役立つといったポジティブな考えをあまり抱いていないことが分かる．これは生徒が数学に対して積極的に勉強したいといった意欲・関心・態度の観点からみると，非常によくない結果となっている．これを改善するには，単純な考えではあるが，まず数学が自分の生活や将来に役立つといったポジティブな考えが持てるような授業をしなくてはならない．しかし，筆者の経験では中学校，高等学校における数学の授業では新しい公式などを学んで，それを使って問題を解くだけといったことが一般的であったように感じる．これにより，問題が解けない生徒は全く意欲が起きないし，できる生徒とできない生徒の差が広がる一方である．ここで少しでも，意欲を持って取り組める状況であれば，実態を改善できると考える．

続いて③について，「あなたは，次のような数学の問題を解く自信がありますか」と尋ね，「数学における自己効力感」に関する以下の 8 項目について，生徒に「かなり自信がある」「自信がある」「自信がない」「全然自信がない」の 4 つの選択肢から 1 つ選ぶ質問がなされている．

表 1-5 :「数学に関する道具的動機付け」に関する質問②

(1)　列車の時刻表を見て，ある場所から別の場所までどのくらい時間がかかるか計算する
(2)　あるテレビが 30%引きになったとして，それが元の値段よりいくら安くなったかを計算する
(3)　床にタイルを張るには，何平方メートル分のタイルが必要かどうかを計算する
(4)　新聞に掲載されたグラフを理解する
(5)　$3x+5=17$ という等式を解く
(6)　縮尺 10,000 分の 1 の地図上にある，2 点間の距離を計算する
(7)　$2(x+3)=(x+3)(x-3)$という等式を解く
(8)　自動車のガソリンの燃費を計算する

これらの質問に対し，日本と OECD 平均（29 か国）の結果は表 1-6 の通りである．

表 1-6：「数学に関する道具的動機付け」に関する結果②

国名	2012 年								
	「数学における自己効力感」指標	生徒の割合							
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
	平均値 標準誤差	割合 標準誤差	割合 標準誤差	割合 標準誤差	割合 標準誤差	割合 標準誤差	割合 標準誤差	割合 標準誤差	割合 標準誤差
日本	-0.41 (0.03)	67.6 (1.0)	60.6 (1.1)	43.7 (1.2)	54.0 (1.1)	90.6 (0.9)	48.1 (1.3)	83.4 (0.9)	28.3 (1.1)
OECD 平均(29 か国)	-0.01 (0.00)	81.2 (0.1)	79.6 (0.2)	68.0 (0.2)	79.1 (0.1)	84.8 (0.1)	56.4 (0.2)	72.0 (0.2)	56.3 (0.2)

先の結果を踏まえ，この結果をみると，現実事象の問題に対して数学を使って問題解決するという姿勢が非常に低いということが明らかにわかる結果となっている．(5)や(7)のように，単なる数式の処理のような問題は日頃から実践していることから，他と比べて出来る割合が明らかに高くなっている．ゆえに，単純に言うことは難しいが，それでも日頃から実践し，生徒が自信を持って問題解決できる状況になれば，現実事象の問題に対しても実態よりは取り組める生徒が増えると考えられる．

こうした現状に対して，先行研究ではこのような身近な問題に対して問題意識を持ち，問題解決を行っている先行研究がある．大澤弘典(1996)は「現実場面に基づく問題解決―グラフ電卓を利用した豪華的授業展開を通して―」において，「リレーのバトンパス」という教材を提示している．「①現実場面に基づく問題解決，②合科的な授業展開，③グラフ電卓に利用の 3 点から数学の現実的価値・有用性を生徒が体得できる」教材の提示をし，有効性を示している．これも数学的モデル化による問題解決に関連しているのではないかと考えられる教材となっている．

教材の課題は以下の通りである．

運動会の全員リレーに勝ちたい．どうしたらいいか？

簡潔ではあるが，生徒の問題意識がすでに背景にあるため，取り組みやすい問題であると考えられる．

この教材の学習指導の流れとしては，この課題における問題意識としては上記の通りであり，現実の事象に即した問題となっている．この問題における結論はリレーに勝つ方法を探し出すことであり，その 1 つとしてバトンパスに焦点をあてている．また，このバトンパスに関して，どこですればよいかどいうことでマークポイントの位置を探るという方向で進めている．ここで必要なデータを考えているが，1 人が走る 75m より多く 90m 走り，その中で 2 地点 (0～20m，65m～85m 付近) のタイムを計測する．その測定値をもとに最適なバトンパスをするべきマークポイントを決定する．最終的にはその結果をもとに実際にリレーを行い，検証している．

この教材の授業展開の実際の中で，数学的モデル化の定式化の部分に着目してみる．以下のプロトコルは大澤(1996)の「5．授業展開例」を引用したものである．

（1）5 時間目（1995.12.5）

測定した記録から，代表生徒 2 人のバトンパスについて，それぞれの走る様子を電卓を利用し捉える．

T1：例えば，KA さん（前走者）から IN さん（次走者）へのバトンパスの様子を見てみよう．

T2：スタート地点から，出走しようとしている次走者の IN 君の記録から，何か感想とか気づいたことがありますか？

IN	0m	5	10	15	20	…
君	0秒	1.53	2.29	2.95	3.59	…

P3：俺より早い．

P4：前にやったのと似ている．

T5：前にやったのって？

P6：自動車の止まる距離のやつ．

（3 時間目の自動車の停止距離の問題）

P7：同じ時間と距離の表だ．

P8：だんだん早くなっている．

T9：どうして分かる？

P10：始めの 5m の間に 1.53 秒かかっているのに，後の 5m（15～20m）の時は，0.2 秒ぐらいしかかかっていない．同じ 5m なのに，タイムが速くなっている．（かかる時間が短くなっている．）

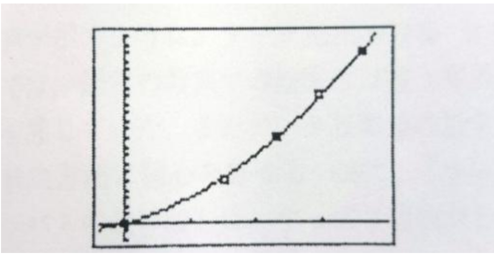
T11：グラフ電卓を使って IN 君（次走者）の走りっぷりを表して見よう．

P12：グラフ電卓の回帰機能等を使って，データをプロットし式化・グラフ化をしようとする．

$y \fallingdotseq 1.021x^2 + 1.992x - 0.084$

（x を時間，y を距離とする）

P13：これらの活動から次走者の加速の様子を式やグラフ等でつかむ．（右図）



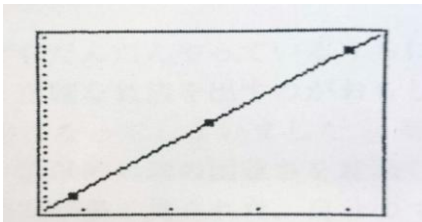
T14：同じように，KA さん（前走者）の走りっぷりについても調べてみよう．

KA	…	65m	75	85
さん	…	1.53	2.29	2.95

P15：グラフ電卓を利用し解決をはかる．

$y \fallingdotseq 6.390x - 4.422$

P16：これらの活動から前走者の等速の様子を式やグラフ等でつかむ．（右図）



この展開の中で，まずIN君の走りの様子から考えているが，これは走り始めなので，およそ2次関数のグラフになる．この展開ではあまり定式化の展開が見えてこないが，おそらくこれまでの既習（自動車の停止問題）を生かした上で，IN君の時間当たりの走った時間の差をとることで，2次関数の関係が見い出せているのではないだろうか．ゆえにIN君の走りの様子が既習の内容から仮定をおけていると考える．また，KAさんの表に関しても，走り始めて一定時間後の状況なので，傾きが一定の1次関数のグラフと見ることができる．これも既習から仮定をおいている．

その後，この教材ではグラフ電卓を用いることで定式化を行っており，数学的モデル化の材料としている．そして次の段階である「数学的モデルの作成」の部分に対応するのが，グラフ電卓を活用し，グラフの式を求めている場面であると考える．

このように，大澤(1996)の教材は数学的モデル化過程のグラフ電卓を活用しながら現実事象を数学におきかえ，「定式化」することで，既習の内容を大いに活用し，思考させている教材と言える．さらに先に挙げたように，現実の問題解決に対してネガティブな姿勢を抱く生徒が多く，これを改善するには，日常的に現実事象の問題に取り組んでいく習慣を持っていくことが重要であると考えていた．この教材は，「運動会の全員リレーに勝ちたい」という問題意識のもと，問題解決を行い，さらにリレーのタイムが当初よりも良くなったという実感を伴ったプラスの経験をさせている．よって，数学を使って考え，出た結果を検討し，実行すると前よりも良い結果が出たことから，生徒らはこれから数学を使い，解決していきたいという気持ちを持つきっかけとなる教材であると言えるのではないだろうか．このような経験をしていくことで，現実事象の問題を解決していく習慣や姿勢を身につけて数学観をよりよく変えていくことが数学的モデル化による問題解決では可能であると考える．

(2)　現実事象と数学の関連を意識した問題解決の有効な手段

現実事象について問題解決するために，様々な方法をとりうる中で数学の内容を活用して解決しようと考えた際には，まず数学を活用できる形に変換しなければならない．例えば，新井仁(2005，2006)や，清水宏幸(2006)，西村圭一(2003)のように，事象を読み取り，関数で解決できる状況に変換し，問題解決を行っているものもある．このような変換は後の数学的な見方考え方につながる観点もあるが，数学的モデル化が現実事象の問題解決に有効な手段となることが挙げられる．三輪辰郎(1982)は以下のように述べている．

> 「1980 年代の数学教育においては，問題解決こそが最も重要なものとして焦点化されるという考えがある．その際の問題解決は，いわゆる文章題の解決にとどまるものでなく，真の（あるいは実際の）問題解決といわれるもので，それは，数学的モデル化の過程を踏んでいくことにほかならないのである．」(p.286)

これによると，実際の現実事象の問題場面の問題解決は数学的モデル化の過程を踏むことで思考が進んでいると考えられる．一般的に現実事象の問題解決では，これまでにも述べてきたように，まず数学を活用できる状態にすることが先決である．ここで先行研究の一つとして，永田潤一郎(2003)は「『比例するとみなす』ことのよさについての考察」にて，「マラソン選手の走った時間と走った距離」という教材を提示する．永田(2003)は「授業に身の回りの事象を取り入れることで，学んだ数学と社会の関わりや，

第 1 章　本研究における数学的モデル化について

数学を学ぶことの意義を子どもたちが考えられるようにしていくことは，これからの数学教育の重要な課題である」(p.13)と述べている．この教材では，定義から考えると完全に比例しているとは言えないデータを活用していく中で,「比例するとみなす」ことで身のまわりの事象の問題解決につなげている教材である．

教材の課題は次の通りである．

課題 1：このコースを Q ちゃんはどのように走ったでしょうか．Q ちゃんの「走り」をグラフで予想してみましょう．また，そのように予想した理由を説明してください． 課題 2：右の表をもとにして，Q ちゃんの「走り」をグラフで表してみましょう． 課題 3：グラフを見て気付いたことを書いてみましょう． 課題 4：Q ちゃんは，スタートしてから 1 時間後どこを走っていたと考えられますか. 課題 5：Q ちゃんがこのペースで走り続けたとしたら，スタートから 50km の地点を通過するのは，何時何分何秒ごろになると考えられますか. 課題 6：Q ちゃんは 100m をどのくらいの時間で走ったと考えられますか. 課題 7：今回の授業でわかったことや感じたこと，気付いたことなどを書きなさい.

学習指導の流れは以下の通りである．

1.［資料 1]のプリントを読み，高橋尚子選手（Q ちゃん）が 2001 年のベルリンマラソンで世界最高記録を樹立したことや，マラソン大会に関する情報を確認する．
2. 課題 1 で高橋選手の「走り」のイメージを「走った時間」と「走った距離」の関係で予想してグラフに表現し，その理由をまとめる．
3. 課題 2 でスタートからゴールまでの 5km ごとの記録をもとにグラフを描く．
   グラフが描けた生徒から課題 3 に取り組む.
4. 課題 2 と課題 3 の確認（比例しているのか，比例してないのか）を学級全体で行い，比例しているという解答の意見を挙げる．
5. 4 に対し，比例していないという意見を挙げる．
6. 4・5 を踏まえ，改めて比例しているのか，比例していないのかを挙手させる．
7.「比例する」と「比例するとみなす」ことの違いを確認し，この教材においては「比例するとみなす」ことができるとし，問題を解決できるとする．そして課題 4～課題 6 に取り組む.
8. 授業後に課題 7 に取り組み，今回の授業でわかったことや感じたことをまとめる．

この教材の学習指導の実際の中で先に述べた，数学を活用できる状態にするために，まず 2 においてまずは「走り」のイメージを「走った時間」と「走った距離」の関係で予想してグラフに表現しているが，この活動を通じてまず「問題の翻訳」をし，この問題の状況を一度数量化している．これにより後の「定式化」で「比例するとみなす」行為がより容易にできるようにしている．また，この課題において生徒の様々な数量化の考えがあり，生徒の意見を見ると，速度等に対応させ，考えをうまく数量化し，グラフに表せていることがわかる．例えば，序盤はゆっくりで終盤にラストスパートをかける場合等，

直線の傾きを変えて表現している．この様子からも生徒らがうまく数量化しようとしているのがわかる．

続いて 3 ではデータをもとに実際にグラフを作成している．この段階ではデータをプロットすることで数学的モデルを作成しようとしている．その後の 4～6 での「比例している」,「比例していない」の議論を経て，7 にて「比例するとみなす」段階を設けている．ここがこの教材における「定式化」の仮定の設定にあたると考える.「比例するとみなす」ということは「比例すると仮定する」と言い換えることができ，この問題では「走った時間」と「走った距離」の関係が比例の関係にあると仮定している．この仮定の設定により，比例を活用できる状況としてみることができ，そのような数学的モデルとして作成され，数学による問題解決が可能となった．この点で見ても数学的モデル化が問題解決の有効な方法の 1 つとして挙げることができると考える．

この教材は特に数学的モデル化過程を意識したものではないが，H.O.Pollak(1970)の見解を踏まえると，必ずしも数学的モデル化過程の順序に沿って問題解決がなされるというわけではない例としても見ることができる．またこれまでの既習の比例で考えると，正確には定義に当てはまってはいないのだが（表 1-7 を参照)，ほぼ比例に近い数量の関係になることから，仮定として「比例する」とおけている．これも事象を定式化するという点で大事な視点である．

なお，比例の既習の知識（定義）としては表 1-7 に整理した定義が挙げられる．

表 1-7：一般的な比例の定義

〈小学校〉

・東京書籍　新しい算数 6 下(p.6)

y が x に比例するとき，x の値でそれに対応する y の値をわった商は，いつも決まった数になります.
また，次の式が成り立ちます.

y＝決まった数×x

・学校図書　みんなと学ぶ小学校算数 6 年下(p.41)

ともなって変わる 2 つの量 x，y があって，x の値が 2 倍，3 倍，…になると，y の値も 2 倍，3 倍，…になるときは，y は x に比例するといいます.

・啓林館　わくわく算数 6 上(p.109)

比例の性質

比例する 2 つの量では，一方の値が 2 倍，3 倍，……になると，他方の値も 2 倍，3 倍，……になり，一方の値が$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，……になると，他方の値も$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，……になります.

〈中学校〉

東京書籍　新しい数学 1

比例を表す式

y が x の関数で，次のような式で表されるとき，y は x に比例するという.

y=ax

表 1-7 のように，一般的には完全に定義を満たす事例や問題を解くことが多いが，「中学校学習指導要領解説数学編　平成 20 年 9 月」において，日常事象における比例に関する事項について次のような表記がある．

比例・反比例を用いて事象をとらえ説明すること
「日常的な事象のなかには，厳密には比例，反比例ではないが，比例，反比例と見なせるものもある．二つの数量の関係を表やグラフで表し，その関係を理想化したり単純化したりして考えることによって比例，反比例とみなすことで，変化の対応の様子について予測できることを知ることは重要である．この際，理想化したり，単純化したりすることで一定の制約が生じることについて理解することも重要である．
　なお，具体的な事象を扱う際には，変数の変域に注意する必要がある．例えば，長さと面積の関係を比例，反比例を用いてとらえるとき，長さや面積は負の数では意味を持たない．具体的な事象においては，変域を意識しながら事象をとらえ説明できるようにする．」(pp.76-77)（下線は筆者による）

この表記のように，比例関係にある内容の日常の事象を考える上で，定式化の段階で比例とみなすと仮定することで問題を考えられ，このような教材を扱っていくことが求められているということがわかる．「比例するとみなす」ことは教科書で学習してきた内容だけで考えると，正確に 2 つの要素が伴って 2 倍，3 倍，……とはなっていないから定義を踏まえると，比例ではないと言わざるを得ないが，現実の事象は全てが定義どおりになっているとはもちろん限らない．しかし，生徒は教科書やその定義が正しいと考えてしまえば，そこから先に進むことはできず，結局数学は社会に出たら使えない・使わないという考えに至ってしまうのではないか．

ゆえに，この教材は「比例するとみなす」という，いわば場面を単純化・理想化し，さらに近似・仮定の設定をし，関数の式を立てている．これにより定式化，数学的モデルとして解決していると見ることができる．ゆえに，生徒は数学的モデル化による問題解決が，現実事象と数学の関連を意識した問題解決の有効な問題解決の方法の一つとして実感することができる教材となっていると考える．

さらに，この教材は数学的モデル化過程の「定式化」を非常に細かく丁寧に進めている教材であるとも言えると考える．生徒が感じている「走りのイメージ」をグラフ化しているが，これは直線の傾きが速さになっている感覚をつなげている．この場面があることで「走った時間」と「走った距離」の関係が比例の関係にあることに気づくきっかけにもなっている．改めて考えると，「速さ＝道のり÷時間」より「道のり＝速さ×時間」，つまり「y＝ax」になる．ゆえに道のりと時間は比例の関係にあるので，現実の事象と数学がつながることが経験できる．さらにデータからグラフを作成し，式を立てることができれば，そこから予測することができるという経験をさせている．この問題ではマラソンであるがゆえに，50km 走るとか場面は本来ありえないが，予測という点ではこういうこともできるという経験にもなる．この経験は数学を社会に出た際には有効に使える方法の一つになっていくべきだと考える．

ゆえにこの教材は生徒たちが現実事象の問題を数学を使って予測したり，解決したりしていく上で，現実事象と数学の関連を意識した問題解決の有効な問題解決の方法の一つとして経験することのできる教材になり得ると考える．

(3)　数学的な見方考え方の育成

三輪(1982)は，「数学的モデル化の過程には，数学的考え方と呼ばれるものの代表的ともいえる幾つかの思考法・着想が含まれる．」(p.287)と述べ，4 つの段階についてそれぞれ述べている．

「(1)定式化においては，まず，単純化・理想化や近似を通して，現実の世界の関係の薄い細部を，熟慮した上で押しつぶすことがなされる．これによって求めたい現実の本質をより明らかにすることができるのである．また，適切な仮定の設定が必要である．その仮定は無矛盾のものでなくてはならない．さらに，数学的に定式化するために，数量化・図形化・記号化といった形式化がなされなくてはならない．(2)数学的作業は，いわば，数学そのものであり，数学的な原理・法則ないし手法がフルに活用される．そこでは，分析・総合・演繹といった思考法が必要になる．また，(3)解釈・評価には，例えば，結果の数値に対して鋭敏であることが必要であろうし，(4)よりよいモデル化は，逐次近似の考えそのものである．以上あげてきたものは，みな，数学的な考え方の基本的な部分である．このようにして，数学的モデル化の過程は，数理の教育において必須の要素をなすということができる．」(p.287)

（※本文中では(1)~(4)は文献中では(ア)~(エ)と表記されているが，三輪(1983)の論と合わせるために筆者が変更した）

先に挙げた三輪(1986)の数学的モデル化過程での行動が数学的考え方の実現であるはずであるとの主張にもあるように，数学的モデル化過程に沿った思考による問題解決をすること自体が数学的な見方考え方の育成につながっていると考えられる．特に定式化の段階は「求めたい現実の本質をより明らかにする」とあるように，日常事象を数学的にみて考える上で最も重要な視点である．

また，松原(1990)は数学的見方考え方について以下のように述べている．

「数学的にものを見，数学的に考えるとは，課題に当面しこれを体制化し構造化する思考段階において次のことがなされることである．

一，対象を集合としてとらえる．ここで先の方をすでに見直した第一段の抽象化がある．

二，その集合に対し，別に都合のよい数学的構造をもった第二の集合へと変換する．つまり関数を設定する．ここで飛躍的な抽象化がなされることが多い．

三，第二の集合の特性を使って解決に導く．その後でその結論を第一の集合またははじめの課題に当てはめて課題自身の具体的な言葉に直すことも多い．」(p.190)

この集合に関わる思考は数学的モデル化に対応したものがあると筆者は考える．まず解決すべき現実事象を対象と見て，これを先を見据えた抽象し，第一の集合と見る．そしてこれを数学を活用できる構造，つまり数学的モデルを作成することで，第二の集合へと変換している．松原(1990)はこの変換に関して，「飛躍的な抽象化」と述べているように，数学的にみて考えることが最も必要な段階であると考える．どのような仮定をおき，変数や定数となる要素を考えることで仮定を意識化し，定式化することがいかに問題解決の結論に影響を与えるかがわかる．ゆえにこの変化は数学的な見方考え方の観点でも非常に重要な場面ということになる．その後，変換した第二の集合，つまり作成した数学的モデルを数学的解

決をし，結論を導き出し，第一の集合における結論を導き出すことができる．つまり，松原(1990)の数学的な見方考え方は数学的モデル化による問題解決で生かされ，また育成できると考えられる力であると言える．

また，松原(1990)は「考えることなるものを抜き出して教えることが可能であるはずがない．」(p.201)，「内容だけを切り離して学ぶことは結局は理解抜きの記憶におちいることになる．」(p.202)，そして，「課題を数学的に解決する力を伸ばすには，解決すべき活きた課題に当面させて正しく考え抜かせることにあろう．」(p.202)と述べている．ここからもわかるように，数学的な見方考え方を育成するためにはある特定の内容や方法をとれば育成できるというものではなく，実際に直面した問題をどうしても解きたい，もしくは解かなくてはならない状況に直面したときに，数学を活用して問題解決を行うことにより育成される力である．さらにその問題解決の方法 1 つとして数学的モデル化によるものが非常に有効なことは松原(1990)の主張から強く主張できることであると考える．

ここで，数学的モデル化過程に沿った問題解決で，特に定式化の段階による仮定の設定が数学的な見方考え方の育成につながっていると考えられる先行研究を 1 つ挙げる．清野辰彦(2005)は「『仮定の意識化』を重視した数学的モデル化の学習指導に関する研究―2 乗に比例する関数に焦点をあてて―」にて「ブレーキ痕は語る」という教材を扱っている．これは自動車の制動初速度と制動距離との関係が 2 乗に比例する関数となっていることに気づかせる教材となっており，事故が起きた状況と実際のデータから事故の究明を行うというものとなっている．清野(2005)は「仮定の意識化」を重要視しており，これは三輪(1983)の「定式化」の部分に対応していると考える．ゆえにこの教材における「仮定」の部分に着目して考察してみる．問題場面としては次のようになっている．

> ある日の快晴の朝，交通事故が発生し，警察官が事故現場に駆けつけました．事故現場には，車の運転手 A さんと道路の脇に脱輪した 1 台の車がありました．A さんに事故の状況を聞いてみると，運転中に動物が飛び出してきて，とっさに急ブレーキをかけ，最後には脱輪してしまったというのです．道路には図に示すように，スリップしたあとがきれいに残されていました．そのスリップ痕を見た警察官は，A さんに「急ブレーキをかける前，どのくらいの速度で走行していましたか」と尋ねました．すると A さんは，「70km で走行していました」と答えました．
>
> A さんは本当に 70km の速度で走行していたのでしょうか．A さんの答えの真偽を確かめ，実際の速度を推定してください．

データとしては次のものが与えられている．

> スリップ痕の長さを計測すると，33.3m でした．下の表に示されているデータを基に，A さんがブレーキをかけはじめたときの速度を推定しなさい．また，A さんが本当に 70km の速度で走行していたのかどうかを判断しなさい．

制動初速度: v(km/h)	10	20	30	40	50	60
制動距離: y(m)	0.6	2.1	4.7	8.3	13.1	18.7

この教材の学習指導の流れとしては，授業の冒頭ではスリップ痕が描かれた写真が提示され，交通事故の解明におけるブレーキ痕の役割の説明をする．そして問題を提示し，問題を解決するには，どのような構成要素を特定すべきかを考える．

その後データを提示し，自力解決に入り，終了後解法の発表をさせている．清野(2005)は以上の授業の流れを次のように整理している．

1. 事象の構成要素の特定の段階
2. 解法の比較・検討の段階
3. 数学的結論の解釈・評価の段階
4. よりよいモデル化の段階
5. 教科書の文章題の議論の段階

1 では数学モデル化の「問題の翻訳」と「定式化」の場面に対応しているので，この点に関して，次に授業の実際のプロトコルを参考に考察していきたい．2 に関しては 2 次関数として思考を進めていき，4 通りの考えが出てきている．これらはそれぞれに 2 次関数の性質が現れているので，それぞれが数学的モデル化の思考した方法としては良いものであったと思う．そして 3 では 4 通りの解法が出ていたが，それぞれの結果として出たものが，実際の事象に照らし合わせて結論を導き出している．ちなみにこの問題では出ていた速度が 80km ということから A さんは嘘をついていたということになっている．

ブレーキ痕の問題自体は 3 の段階までであるが，その後 4 にて ABS の他の場面時や，路面の状況が変わった際の場合との比較を通じて構成要素が変わる，つまり仮定の設定が変われば，結果も変わるということを理解させている．最後に 5 で教科書にある問題で「制動初速度と制動距離との関係が 2 乗に比例する」ということがすでに述べられているもので確認をしている．すでに解決した問題との対応で仮定の意識化より一層深められている．

この教材の授業の実際における「定式化」の段階を例に挙げる．教材の 1 の場面におけるプロトコルを引用し，授業の流れに対応させ，数学的な見方考え方がいかに育成されているかを見てみる．

T9 : A さんは，本当に 70km の速度で走行していたのでしょうか．A さんの答えの真偽を確かめ，実際の速度を推定してください．これが今日，考えるべき問題です．
S7 : (少しざわつく)．(「どうするんだよ」という声があがる)．
T10 : じゃ，どうぞ．
S8 : (かなりざわつく)．(「無理」，「どうやってやるの？」，「どうやって求めるの？」という声があがる)．スリップの長さがわからないよ．
T11 : そうだね．ここには，必要なデータが記載されていないね．どんなデータが必要ですか？
S9 : スリップ痕の長さ．
S11 : 車の大きさ．
S12 : (それは) いらない．
T16 : これだけで十分？誰かいませんか？どうぞ．
S15 : タイヤの摩擦の係数みたいなもの．
S16 : (「すごい」とつぶやく)．
S17 : 他に何かありませんか．自由にいっていい場所だね，ここは．タイヤの，ごめんスリップ痕の長さというのは，ここの長さですよね．ということは，これは何を表していますか？ちょっと一般的なことばで言うと．
S18 : 距離．

授業としては，冒頭でスリップ痕が描かれた写真が提示され，交通事故の解明におけるブレーキ痕の役割の説明をする．これにより生徒が問題意識を持ち，この後の課題に対し，意欲的に取り組めるきっかけとなっている．

そして問題を提示し，問題を解決するには，どのような構成要素を特定すべきかを考える．この活動において，現実事象の問題解決にとって，構成要素を特定することが不可欠であることを認識させている．ここでは，データとしてまず車のスピードが挙げられていたが，生徒たちからはスリップ痕の長さ（距離)，車の大きさ，タイヤの摩擦係数が挙げられていた．これらはこの問題における様々な変数となり得る要素であるが，これらを数学の世界に置き換える必要があると考えることに，まず数学的に考えることの意義がある．筆者はこの点が数学的な考え方につながっていると考えている．

清野(2005)はタイヤの摩擦係数に関するデータはあらかじめ整理し，2 次関数の性質が観察しやすいものを踏まえて制動初速度と制動距離の関係のデータを提示している．事実，制動距離は制動初速度も大いに関係しているが，車種，ABS の有無，また路面の状況も関係するとしている．そこでまず 2 次関数の性質が理解しやすい状況から思考させ，その後他の場面ではどうであるかという思考をさせている．これは結果が異なるということは，仮定が異なれば結論も異なるということを体験させることにもつながり，数学的モデル化においてはこの仮定をおく場面がいかに重要であるかを生徒に感じさせる機会になっている．

この教材の特徴は定式化の段階で仮定を設定するために様々な構成要素を明らかにしながら進められていることである．生徒らが必要と思われるデータを考え，そのデータを活用し，変数となる要素，定数となる要素を整理しながら，問題場面を定めていくことで，問題解決が可能な状態へと現実事象を変換していると考えられる．この活動は数学的モデルを作成していることで，先に松原(1990)が述べていたような数学的な見方考え方の観点に当てはまると考える．さらに問題解決後も，問題解決した方法を生徒から挙げさせ，どのような仮定のもとで問題解決したかを考えさせている上，車種や ABS の有無，路面状況の要素を仮定をおき直すことで，結論に影響が出て，異なる結論が出ることも抑えられている．

以上のように，数学的な見方考え方は数学的モデル化による問題解決，その中でも特に定式化の段階が最も重要な場面であると筆者は考えている．この段階を充実させることにより，数学的モデル化過程全体を通じての数学的な見方考え方の育成がより充実したものとなると考える．そのために先に同定した本研究における数学的モデル化過程では仮定を見直し，おき直すという，仮定を意識化させる場面が明確に設定されている．これにより，後の定式化がより充実し，数学的な見方考え方の育成につながると考えられる．

ここまで 3 つの視点で数学的モデル化の教育的価値を整理してきた．それぞれの視点が価値を果たさせば，生徒が現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得することにつながり，生徒の数学に対する姿勢を向上させていくきっかけとすることができればよいと考えている．

以上を踏まえ，生徒の実態改善のため，生徒が現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得することができる数学的モデル化過程を同定し，これに沿って現実事象の問題解決をすることで数学的モデルの教育的価値を果たせ，生徒の実態改善を果たすことができると考えた．

第 3 節　本章の総括

本章の意図は，数学的モデル化の概念規定を行った上で，学校数学における数学的モデル化の価値とについて明らかにすることであった．

第 1 節ではモデル，数学的モデル，そして数学的モデル化過程の同定を行った．まずモデルについては，A.Pinker(1981)が定めた以下の定義を参照することとした．

「もし（体系）M が（体系）O をその目的のために代用となることができるならば，そしてもし，この文脈において M の学習が O にとって意味のある結果を引き起こすことができたのならば，その体系 M はある目的において体系 O（原物）のモデルである．」(p.697)

続いてモデルについては先行研究をもとに，清野辰彦(2006)が定めた以下の数学的モデルの定義を本研究では参照することとした．

「数学的モデルとは，数値的表現，グラフ表現，代数的表現，幾何学的表現によって表わされたモデルである．」(p.13)

そして，数学的モデル化過程はまず三輪辰郎(1983)の数学的モデル化過程を参照することとした．

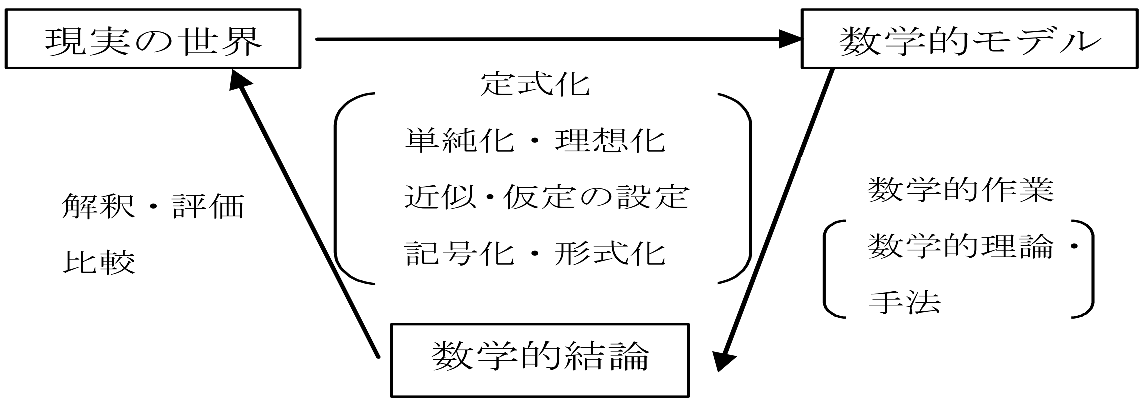


図 1-8：三輪辰郎(1983)の数学的モデル化過程

三輪(1983)の数学的モデル化過程を見ると，定式化において行うことは基本的に現実事象の問題を単純化・理想化などを行うことで数学的な問題場面とすること，そしてその場面で数学を使って解決できる形にするため，仮定を設定することで数学的モデルとする 2 つの作業がなされる．また，西村(2001)はこの 2 つを分けて行うことで，現実場面の問題を数学的モデルを作成することの難易度が下がり，生徒が取り組みやすい問題解決の過程にすることができる．さらに本研究ではより問題解決に関わる仮定に生徒が着目することで，生徒が現実事象の問題解決の進展と，現実事象と数学の関連を感得できるようにするため，定式化を数学的な問題場面の作成と数学的モデルの作成の 2 つに明確に分け，生徒がより仮定に着目しながら問題解決できる形を目指した．

また，定式化を充実させるために，定式化において仮定を設定することが，いかに問題解決で重要な要素であるかを生徒に実感させる機会を設けるとしていた．ここで三輪(1983)や西村(2001)を見てみると，解釈・評価が 1 つにまとめられている．しかし，ここでよりよい数学的モデルを志向する具体的な方法が明らかにされていなかった．そこで OECD の数学的プロセスのように解釈と評価を 2 つに分けること

で個別化する．まず解釈では「数学的な解答や結果を検討し，問題の文脈の中でそれらを解釈する」活動がなされ，現実事象と数学の関連がより意識化される．まずは導き出した数学的結論が現実的文脈に照らして，妥当であるか判断させることを評価で行い，より良い数学的モデルを志向するために，生徒に仮定を着目させ，設定した仮定が現実事象の問題解決において重要な要素であることを実感させる行為を評価において行うこととする．よりよい数学的モデルを志向する必要性があれば仮定を再設定することで問題解決を進展させ，最終的な結論を出すことを目指すことができると考える．以上の主張のもと，本研究で用いる数学的モデル化過程の同定を行う．まず以下のような段階を設定する．

(1)数学的な問題場面の作成：現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで，数学の問題場面としておきなおすこと
(2)数学的モデルの作成：数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで数学的モデルを導くこと
(3)数学的作業：数学的手法を用いて数学的結論を得ること
(4)解釈：数学的結論が現実的文脈に照らしてどのような意味を持つのかを理解すること
(5)評価：現実的文脈を考慮した結論を現実場面に照らして評価し，妥当であれば最終的な結論とする．妥当でなければ仮定を見直すとともに，おき直す仮定を考え，問題解決の進展を図る．

まず「①現実場面における問題」があり，それを単純化・理想化し，さらに条件を整理することで，「②数学的な問題場面」ができる．さらにこの場面で近似・仮定の設定をすることで，「③数学的モデル」が完成する．三輪(1983)の述べる定式化がここまでの過程である．これを数学的作業により解決することで，「④数学的結論」を得る．この数学的結論が現実的文脈に照らしてどのような意味を持つのかを解釈し，「⑤現実的文脈を考慮した結論」を出す．これが最終的に現実場面に対して適切か評価することで，問題解決がなされたとする．もし結論が妥当でなければ仮定を見直すとともに，おき直す仮定を考えることで問題解決を進展させる．以上の問題解決の過程を整理し，本研究の数学的モデル化過程を図 1-9 のように同定する．

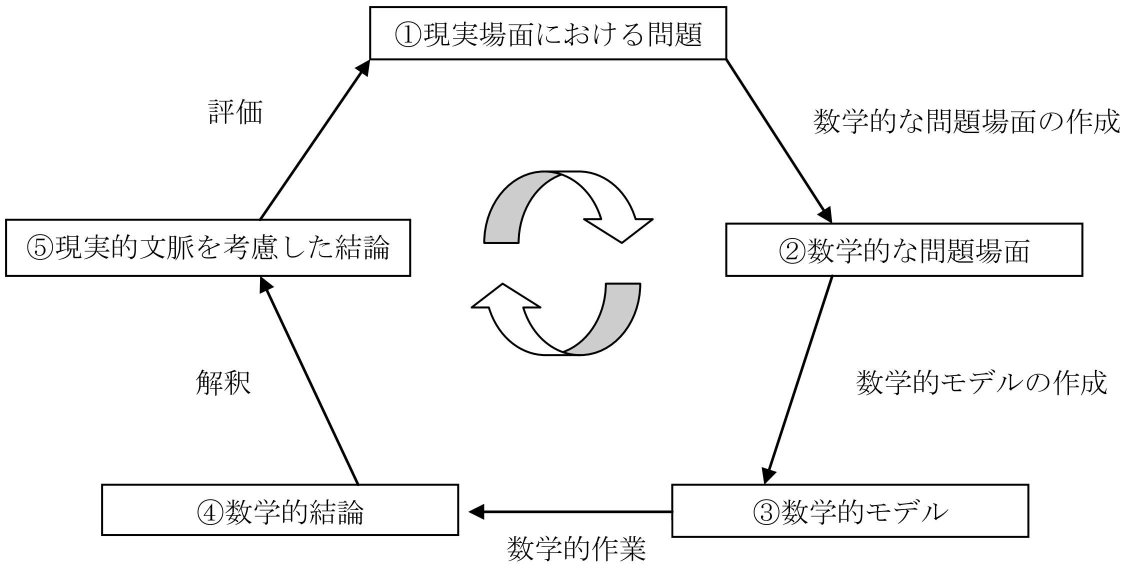


図 1-9：本研究における数学的モデル化過程

続いて第 2 節では，先行研究において重視されている数学的モデル化の教育的価値を整理し，本研究において重視する数学的モデル化の教育的価値を明らかにした．

まず先行研究では，清野(2006)の分析をもとに，W.Blum，M.Niss(1989)のような国外の主張，そして三輪(1983)のような国内での主張を挙げ，整理した．清野(2006)はこれらを対応させ，表 1-8 のように整理している．

表 1-8：W.Blum，M.Niss(1989)と三輪辰郎(1983)が述べる数学的モデル化教育的価値の対応

W.Blum，M.Niss(1989)	三輪辰郎(1983)
1. 形成的な議論	②数学的考え方の育成をはかるため． ④探究的・創造的な面の育成をはかるため．
2. 批判的な能力の議論	
3. 実用的な議論	③知識が開発される過程に生徒を参加させるため．
4. 数学の全体像にかかわる議論	①学校数学をより応用可能なものにするため．
5. 数学の学習の促進にかかわる議論	⑤数学的概念の基礎的な理解をいっそう強めるため．

そして，本研究では数学的モデル化による思考がどのような教育的価値として，特に重視する視点を 3 点挙げ，それぞれの視点で先行研究の教材を提示し，価値を明らかにし，これを整理した．

(1)　数学観の変容の可能性
(2)　現実事象と数学の関連を意識した問題解決の有効な手段
(3)　数学的な見方考え方の育成

(1)について，勉強する価値を見出せない生徒が多く，日常生活での問題解決に数学を使えない，または使おうとしない生徒が増えているという実態を 2012 年の PISA 調査を参照し，大澤(1996)「リレーのバトンパス」という教材を例に，数学観の変容の可能性を示唆した．(2)について，現実事象について問題解決するために，数学を活用できる形に変換しなければならないということから数学的モデル化による問題解決を方法の一つとして示した．例として，永田(2003)の「マラソン選手の走った時間と走った距離」という教材を提示し，数学的モデル化による問題解決の価値を示した．最後の(3)は，三輪(1986)の，数学的モデル化過程での行動が数学的考え方の実現であるはずであるとの主張や, 松原(1990)は数学的見方考え方の主張をもとに，清野(2005)の「ブレーキ痕は語る」という教材を例に挙げ，数学的モデル化による問題解決が数学的な見方考え方の育成につながることを示唆した．

以上を踏まえ，生徒の実態改善のため，生徒が現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得することができる数学的モデル化過程を同定し，これに沿って現実事象の問題解決をすることで数学的モデルの教育的価値を果たせ，生徒の実態改善を果たすことができると考えた．

第 2 章では同定した数学的モデル化過程の評価の段階において，どのような行為ができればさらに定式化を充実させることができるのか，その視点を明らかにすることで，生徒がより現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得できるようにすることを目指す．

第 2 章

問題解決を進展させるための「仮定の意識化」の役割とその吟味

本章の意図と構成

本章の意図は，生徒がより現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得ができるよう，数学的モデル化による問題解決を充実させるために，仮定の設定に関してより重視するために必要な視点を明らかにし，さらに同定した数学的モデル化過程において，どのような問題意識を持ち，どのような行為ができればさらに定式化を充実させることができるのか，その視点を明らかにすることである．

本章の構成は以下の通りである．

第 1 節では，数学教育において仮定がどのように捉えられているかを整理する．

第 2 節では，「仮定の意識化」を重視することで果たされる役割の実現のためにすべき行為と，それをどの段階で行うことで，問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得により生徒の実態を改善できるかを第 1 章で同定した数学的モデル化過程との関連を踏まえながら吟味し，整理する．そして「仮定の意識化」をすることがどのような教育的価値を持つのかを整理する．

第 3 節では本章の総括を行う．

第 1 節　数学教育における仮定についての整理

1. 数学教育における仮定についての整理

本項では，前章で同定した数学的モデル化過程において，定式化の仮定の設定について重視すること先述していたが，数学教育上，仮定についてどのように扱われてきたのかを整理することが目的である．数学的モデル化についての先行研究を見てみると，定式化の段階で数学的モデルを作るために仮定，あるいは仮説，仮設をおいているものが多くある．ここで仮定や仮説，そして仮設の意味について整理しておくこととする（広辞苑　第六版）．

・仮定
①実際とは無関係に想定されること．
②何かの現象を説明するために一応想定されること．その条件を厳格にしたものが科学上の仮説．
③ある推理の出発点として設定される命題．仮設．
・仮説
[哲]自然科学その他で，一定の現象を統一的に説明しうるように設けた仮定．ここから論理的に導きだした結果が観察・計算・実験などで検証されると，仮説の域を脱して一定の限界内で妥当する法則や理論となる．

清野(2006)は仮定について，「現実事象の問題を数理的に考察，解決する際に設定する「前提」という意味で捉えている」(p.43)，仮説について，「現象を統一的に説明したり，法則を導きだしたりする際に設定される仮定」(p.43)とし，「仮説は，命題の形式で表現されるのに対し，仮定は必ずしもその必要がないと捉えているので，仮定の中に，仮説を内包して考えることにする」(pp.43-44)と述べている．この見解を参考にすると，この仮定の設定に関して島田茂(1977)が示した数学的活動が先行研究として挙げられる．その全体像として図 2-1 がある．

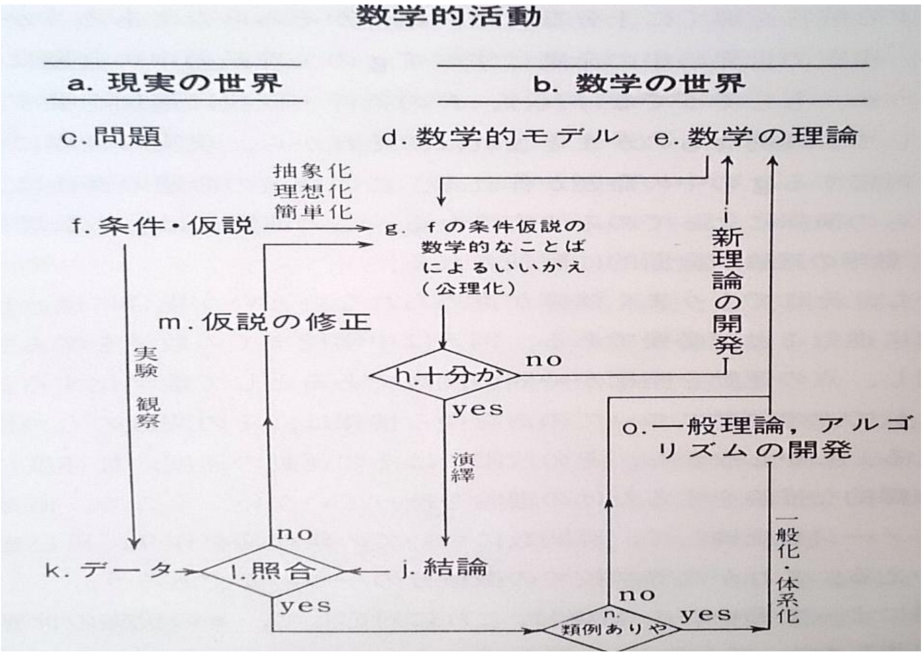


図 2-1：島田(1977)の数学的活動に関わる「現実の世界と数学の世界」

島田(1977)は数学的活動について，「既成の数学の理論を理解しようとして考えたり，数学の問題を解こうとして考えたり，あるいは新しい理論をまとめようとして考えたり，数学を何かに応用して，数学外の問題を解決しようとしたりする，数学に関係した思考活動」(p.14)と述べている．これを基盤としてそのうちの「数学外の問題を解決する活動」に焦点化した先行研究として，長崎他(2004)の「算数・数学と社会をつなげる力」が挙げられ，表 2-1 のように構造化されている．

表 2-1：算数・数学と社会をつなげる力

○算数・数学と社会をつなげる力		
A. 社会における量・形についての感覚		
A01. 長さの感覚	A02. 広さの感覚	A03. かさの感覚
A04. 重さの感覚	A05. 角度の感覚	A06. 時間の感覚
A07. 速さの感覚	A08. 形の感覚	
B. 社会の問題を数学的に解決する力		
B1. 社会の現象を数学の対象に変える		
B11. 仮定をおく		
B12. 変数を取り出す		
B13. 変数を制御する		
B14. 仮説を立てる		
B2. 対象を数学的に処理する		
B21. 表・式・グラフ・図等で表現する		
B22. 操作を実行する		
B3. 社会に照らして検証する		
B31. 予測・推測をする		
B32. 修正する		
C. 社会において数学でコミュニケーションする力		
C01. 数学的表現から現象を読み取る，伝える		
C02. 数学を使った日常文を読み取る		
D. 近似的に扱う力		
D01. 近似的に式を立てる		
D02. 近似的に読み取る		

長崎他(2004)は,「算数と社会をつなげる力に関する研究」において上記の 4 つの力について，それぞれ次のように述べている．

A. 社会における量・形についての感覚

社会の問題は，量や形として，算数・数学に関わってくる．量は数量化されて数となり，形は抽象化されて図形となって，算数・数学の対象となる．社会の問題を扱う際には，数や図形が社会ではどのような意味を持つかということを直感的に理解していること，すなわち，社会における量・形についての感覚を持っていることが必要である．

B. 社会の問題を数学的に解決する力

算数・数学で，社会の問題を扱うには，それらを算数・数学の対象に変え，その上で算数・数学の手法を使って処理し，さらにその結果を社会の場面に照らし合わせて検証することが必要である．数学的モデル化の過程とも言われる．この過程では，社会の問題を数学的に解決する力が必要になる．

C. 社会において数学でコミュニケーションする力

算数・数学を社会で使う際には，算数・数学で表されたことの意味を社会に照らして読み取ったり，一方で，日常文で表されたものから数学の意味を読み取ったりする，社会において数学でコミュニケーションする力も必要になる．

D. 近似的に扱う力

算数・数学で社会の問題を扱ったり，算数・数学を社会で使う際には目的に照らし合わせて数量化したり抽象化したりするために量や形を近似的に見たり，計算処理した結果を理想的な数としてではなく社会で扱える数として見なしたりする，近似的に扱う力が必要である．なお，近似的に扱う力は，「式を立てる」ことと「読みとる」ことだけにした．従来の近似においては，近似式の扱いなど，「近似の処理」も重要だったが，現在では電卓やコンピュータ等に任せることができると考えた．　(pp.5-6)

(※論文中ではA，B，C，Dをそれぞれ①，②，③，④と表記していたが，本研究の後述に影響を与えるため，A，B，C，Dと表記してある．)

西村圭一，長崎栄三(2008)はこの力を「算数・数学と社会をつなげる力」とは，「社会における現象や問題に取り組む際に必要な力や感覚」と述べている．その中で，上述している通り，Bの力は数学的モデル化過程とも言われており，この4領域の関わりについて「「A. 社会における量・形についての感覚」「D. 近似的に扱う力」はB，Cの背景で働く力である」と述べている．

また，長崎(2001)がこの力は数学的モデル化の過程における力であると述べていることもあり，このBの力は数学的モデル化過程での段階がほぼ網羅されている．つまりこのBの力について意識して問題解決することは数学的モデル化による問題解決では重要なことであると考える．さらに，B1に関する4つの力は定式化の段階で特に重視されるべき力であると考える．本研究において定式化は「現実場面の問題を単純化・理想化・近似したり，仮定を設定したり，さらに条件を整理することで，数学の問題場面としておきなおすこと」と定めていたが，これらの力を問題解決において意識化することで，現実事象と数学を関連付け，問題解決をすることにつながるため，本研究の目的を果たす要因となると考えられる．

さらに西村，長崎(2008)が行った「算数・数学と社会をつなげる力の構造の精緻化」として，表 2-2のように精緻化している．ここではBの力について抜粋して挙げておく．

表 2-2：「算数・数学と社会をつなげる力の構造の精緻化」（一部）

B．社会の問題を数学的に解決する力
　B1．社会の現象を数学の対象に変える
　B11．仮定をおく
　　性質：定性的な仮定，定量的な過程
　　状態：等しいとする，ないものとする，定める
　B12．変数を取り出す
　　性質：質的な変数，量的な変数
　　関係性：依存関係のある変数，依存関係のない変数
　B13．変数を制御する
　　性質：質的な変数，量的な変数
　　個数：制御対象の変数の個数
　B14．仮説を立てる
　　性質：定性的な仮説，定量的な仮説
　　分野：数・式化，幾何学化（図形化）
　　変数：1 変数，2 変数以上
　B2．対象を数学的に処理する
　B21．表・式・グラフ・図等で表現する
　　事象：確定的な事象での表現
　　　　　関数の表・式・グラフ，図・図形
　　　　不確定的な事象での操作
　　　　　統計の表・グラフ，値（指数・指標，確率，統計量等）
　B22．操作を実行する
　　事象：確定的な事象での操作，不確定的な事象での操作
　B3．社会に照らして検証する
　B31．予測・推測をする
　　性質：定性的な予測・推測，定量的な予測・推測
　　事象：確定的な事象での予測・推測
　　　　　関数の表・式・グラフ，図・図形から
　　　　不確定的な事象での予測・推測
　　　　　統計の表・グラフ，値（指数・指標，確率，統計量等）から
　B32．修正する
　　契機：予測・推測と現実との相違，条件の変化
　　性質：定性的な修正
　　　　　仮説
　　　　定量的な修正
　　　　　観察・実験・測定方法，数学的モデルの適用範囲，数学的モデルの一部，仮説

現実事象の問題解決で導き出す結論は，定式化においていかに仮定を設定するか，または単純化・理想化したりするかによって，大きな違いが生まれてくる．ゆえに，この精緻化の特に B1 の内容を，日常事象の問題解決においてよりよいモデル化を志向し，問題解決がより現実に即したものにし，結論を導き出すために，仮定を意識化させることは非常に重要なことであると考える．これにより，生徒の数学観として現実事象と数学の関連も意識づけることにもつながると考えられる．

さらに西村圭一(2012)は自身の数学的モデル化過程を西村(2001)から「算数・数学と社会をつなげる力」との関連から再度定めており，表 2-3 のように対応させている．

表 2-3 :「算数・数学と社会をつなげる力」との関連を意識した数学的モデル化過程

「社会の問題」

①解決したい，理解したい「社会の問題」に対して，数量化や幾何学化などをし，数学を適用しやすくする．(**問題の翻訳**)

②重要と思われる対象や関係を見出すとともに，保つべきことは何か，無視すべきことは何かを決定する．また，必要なデータがあれば，収集する．(**定式化**)

「数学の問題」

③定式化した数学の問題に対して，関連のある，数学の分野を同定し，それに対する直感や知識を働かせ，数学的モデルを作成する．(**数学的モデルの作成**)

④数学的方法により，結論を得る．この過程で，新しい概念や方法，アルゴリズムなどを得ることもある．(**数学的処理**)

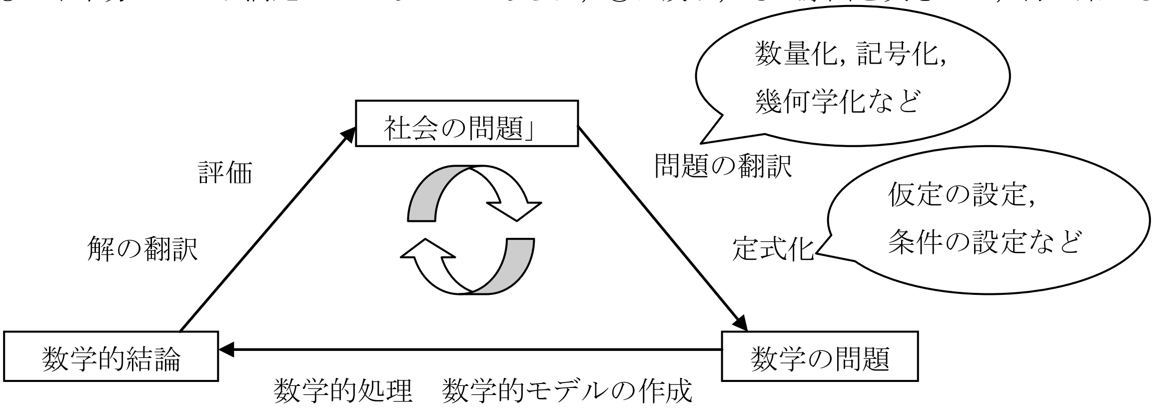
「数学的結論」

⑤数学的方法により得た結論を社会へ訳し戻す．(**解の翻訳**)

⑥結論は実際的か，合理的か，受け入れられかなどを検証する．(**評価**)

a）もし十分なら，他者に的確に伝える．

b）もし不十分だったり満足がいかなかったならば，①に戻り，その原因を突き止め，再び始める．



各段階における詳細は以下の通りである．

問題の翻訳：仮説を立てる
定式化：仮定をおく／変数を取り出す／変数を制御する
数学的モデルの作成：表・式・グラフ・図等で表現する
数学的処理：操作を実行する
解の翻訳：数学的表現から現象を読み取る，伝える／予測・推測をする
評価：数学的表現から現象を読み取る，伝える／修正する
全体：社会における量・形についての感覚／近似的に扱う力／算数・数学と社会のつながりに関する意識・態度

このように西村(2012)の数学的モデル化の段階ごとに整理して見ると，「算数・数学と社会をつなげる力」は各段階で働く考え方や能力を網羅的に捉えている．ここまでの西村，長崎(2008)の見解を整理すると，「算数・数学と社会をつなげる力」は数学的モデル化過程全体を通じて育成される力であると言えるが，その中でも B，C の力がまず中心にあって，A，D の力がその背景にあることからも，まずは B，C の力に関して重視しなければならないのは明らかである．さらに，本研究では特に定式化について重視したいと考えていた．先の B1 の力はもちろん定式化における仮定の設定に関わる力である．ゆえに数学的モデル化過程全体を通して「算数・数学と社会をつなげる力」全体を育成する意識は持ちながらも，本研究では特に定式化に関わる B1 の力を意識化しながら問題解決を進めたいと考える．これにより，生徒の実態改善を目指す.

一方で，砂場拓也(2003)は「仮定の設定」に焦点を当てているが，先に筆者が調べたように，「仮定の設定」には，辞書的に「仮説の設定」と「仮設の設定」の 2 つの捉え方ができると述べている．仮設について以下のような意味がある（広辞苑　第六版）.

・仮設
①必要な時期だけ，仮に作り設けること.
②実際にないことを仮にありとすること.

この 2 つの捉え方については図 2-2 の通りである.

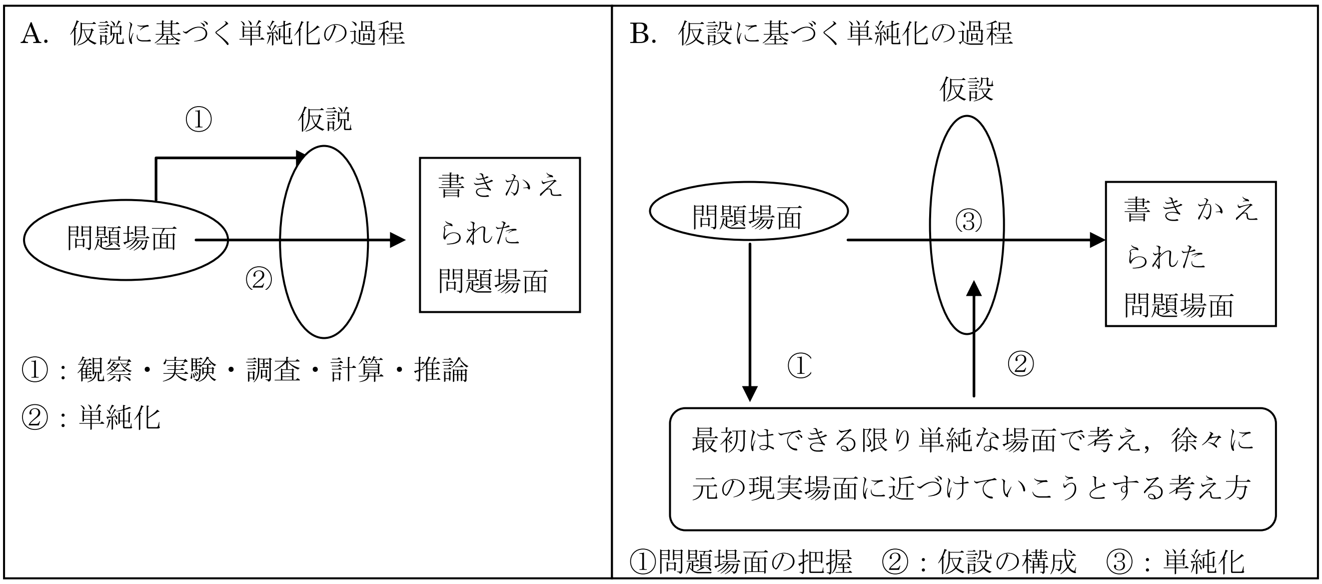


図 2-2：「A. 仮説に基づく単純化の過程」と「B. 仮設に基づく単純化の過程」

A について砂場(2003)は，「現実場面の問題の定式化においては，問題場面に関する観察・実験・調査によって得られた結果と問題解決者の経験的知識を元にして，計算・推論（帰納・類比）を行うことにより，問題場面に関わる仮説をたて，その仮説に基づいて，問題場面を単純化するという過程が考えられる.」(p.99)と述べている.

この点に関して，現実事象の問題解決では可能な限り実際のデータを活用することで，現実事象と数学の関連を意識しながら問題解決していくことができると考えられる.

一方，B について砂場(2003)は，「問題解決に関係のあると思われる変数や関係を見出すなどして問題場面を把握したとき，考慮に入れるべき変数が多かったり，関係が捉えにくかったりして，問題解決者にとって定式化が困難である場合が考えられる．このとき，とりあえずいくつかの変数や関係を無視したり，特別な場合を考えたりすることで問題の難易度を下げ，その問題の解決時に得られた結果や使われた手法を元の問題の解決の手立てとして，より現実的な場面に取り組んでいこうとする活動が考えられる.」(p.99)と述べている.

この点に関しては，前章にて数学的モデル化による問題解決をする上で，実態の生徒の数学に対する姿勢や，現実事象の問題解決に対する意欲を踏まえると，この状況の改善には最低でも 2 サイクルの過程を経るとよいと考えていた．さらに砂場(2003)のこの主張を参考にすると，最初は単純化された問題場面から問題解決を行い，その場面での仮定を見直し，おき直すことで問題場面を徐々に現実場面に近づけていくことで，最終的な問題解決までたどり着けるようにすれば，生徒の現実事象の問題解決に対する理解や意欲を増加させることにつながると考える.

また清野辰彦(2011)は経験的モデル化(empirical modelling)と理論的モデル化(theoretical modelling)の 2 つの視点で数学的モデル化を捉えている.

経験的モデル化(empirical modelling)とは，「実験・実測によって得たデータや統計データの観察を通して作成したモデルを基に，また，座標平面上に描いたデータに対して適合するグラフを作成し，そのグラフを基に，事象を理解，記述，予測，判断する過程である」(p.3)とし，「データが主導的な役割を果たしているため，モデルの適用範囲の限界を意識し，データをより注意深く解釈することが重要である」(p.3)と述べている.

これは先の砂場(2003)の A の見解と似た点があると考えられる．実際のデータをうまく活用することで，現実事象と数学の関連を意識しながら問題解決していくことができると考えられる.

一方，理論的モデル化(theoretical modelling)とは，「事象の重要な構成要素を特定，記述し，構成要素や構成要素間の関係に関する仮定を設定する．そして，それらを文字や図形を用いて表現し，処理や作業によって得られたモデルを基に，事象を理解，記述，予測，判断する過程である」(p.4)とし，「データは主として，モデルの妥当性の評価を行う際に用いられる」(p.4)と述べている.

こちらはまず一般的な数学的モデル化過程をイメージして，現実事象の状況から問題場面を設定するため，仮定を設定することで定式化し，数学的モデルを作成し，問題解決をする．そして，その解決の結論が実際の現実事象のデータと照らし合わせて，結論が妥当かどうかを検討する．もし，妥当でなければ，仮定をおき直し，再び数学的モデル化過程に沿って問題解決をすることになる.

清野(2011)はこの 2 つのモデル化を経験することの教育的価値として，「自立心の育成」，「事象を数理的に考察する方法の獲得」，「双方から考察したプロセスを対比させることにより，仮定がより顕著に意識化され，仮定の役割が促進される点」，「事象のより深い理解につながる点」の 4 点を挙げている．生徒

らの実態からここまで要求をすることは困難であると考えられるが，仮定を意識化させることで，仮定の役割が促進される点に関しては，定式化を重視する本研究には参考になる点である．ゆえに，データを有効に活用しながら数学的モデル化による問題解決を進めていくこととする．

また，清野(2006)は三輪(1983)の数学的モデル化過程をもとに各段階における仮定を特徴づけている．三輪(1983)の数学的モデル化過程は図 2-3 の通りであった．

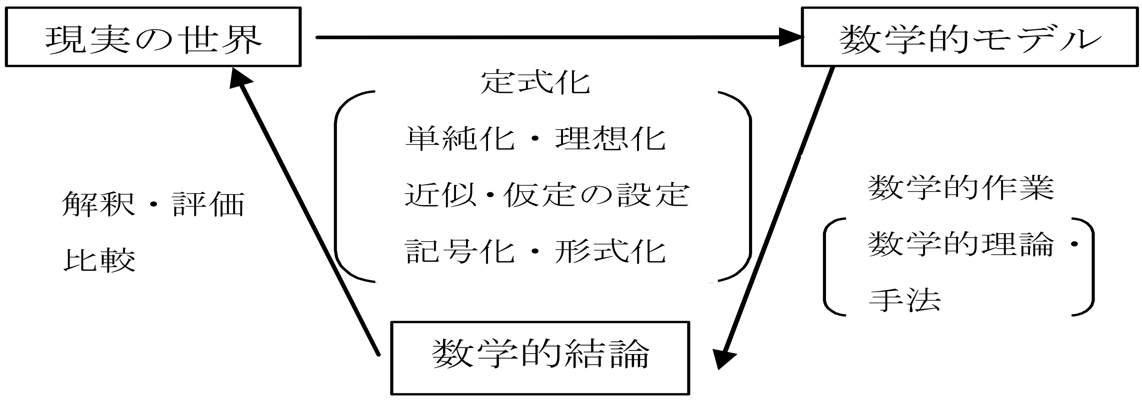


図 2-3：三輪辰郎(1983)の数学的モデル化過程

この各段階について，清野(2006)は仮定の特徴の枠組みを表 2-4 のように示している．

表 2-4：仮定の特徴を整理する枠組み

a．定式化において意識化される仮定の特徴
b．数学的処理において意識化される仮定の特徴
c．解釈・評価において意識化される仮定の特徴

清野(2006)は 3 つの仮定について以下のように整理している．

「a の仮定は，現実事象を数理的に捉え，数学の世界に引きいれる際に意識化され，設定される仮定であり，その役割は，「現実事象と数学的モデルをつなぐこと」である．
b の仮定は，一旦数学の世界に入り，数学的理論と手法を用いて数学的処理を行っている際に，数学的処理を遂行していくために必要な仮定が意識化され，定式化に戻って設定される仮定である．また，数学的処理を簡単にするために，仮定が意識化され定式化に戻って設定される仮定もこの b に含まれる．よって，b の役割は，「数学的処理を遂行可能にすること，数学的処理を簡単化すること」である．
c の役割は，数学的結論を得た後に，より良いモデルを作成するために，仮定が意識化され，定式化に戻って設定される仮定であり，その役割は，「より良いモデルを志向すること」である．」(p.96)

清野(2006)はこの枠組みをもとにし，仮定の特徴を 3 つの特徴をより詳細に吟味し，表 2-5 のように整理している．

表 2-5：数学的モデル化において設定される仮定の特徴

a.定式化において意識化される仮定
a1.事象の構成要素の特定に関連する仮定
a1.1.関係の薄い細部を無視ないし省略する仮定
a1.2.数値に関する仮定
a1.3.構成要素を単純化・理想化する仮定
a2.構成要素間の関係の設定に関連する仮定
b.数学的処理において意識化される仮定
b1.数学的処理を簡素化するための仮定
b2.数学的処理を遂行するための仮定
c.解釈・評価において意識化される仮定
c1.設定されている構成要素・構成要素間の関係に関連する仮定
c2.構成要素を追加したより良いモデル化に関する仮定
c3.構成要素間の関係のより良いモデル化に関する仮定

この吟味の理由は，仮定の意識化を重視した授業を実施する際，教師は，あらかじめその授業において，また授業で扱う教材を作成する際，どのような仮定を意識化させようと考えているのか（意識化させる対象）を明確にしておく必要性からであった．

清野(2006)の仮定の特徴の整理については, まず前提として数学的モデル化過程全体を通じて仮定に関して考えており，その都度仮定を設定する必要に応じて，定式化の段階に戻るようにしてある．つまり，仮定の設定自体は定式化の段階で行うことにはなっているが，数学的モデル化過程全体を通じて仮定については意識化させていることが分かる．それゆえ，仮定についてもその段階ごとに役割が明確に定められており，その段階ごとに仮定について意識させることが重要であると述べている．

ここまで挙げてきた，西村，長崎(2008)や西村(2012)，清野(2006)のように数学的モデル化による問題解決においては，常に仮定の設定がなされるわけであるが，西村が扱っているように，特に定式化の段階における仮定の設定は非常に重要な要素であると考えられる．

2. 本研究で特に重視する仮定の特徴について

熊谷治久(2004)は「確かな定式化を目指した数学的モデル化過程の授業」と題して, 数学的モデル化過程の中でも定式化により焦点を当てて，より正確なものにしようと実践していた．ここでは，長崎(2001)を参考にしながら，定式化をさらに 4 つの段階に分けて，実践にしている．意図としては単純化，理想化，近似，仮定の設定等と捉えていたものを，さらに細かい段階を踏んで展開しようとするものであった．この成果として，大きな困難が伴う定式化を丁寧に扱うことができ，現実事象を数学化させることができ，生徒が現実世界の問題を数学で解決する活動で，数学と現実事象との結びつきを実感させ，数学に対する興味を高めさせたとの結果を出している．

また，三輪(1986)は仮定の扱いについて以下のように述べている．

> 「知識が開発されるためには，問題を明確にするとともに，その問題の解決に向けて進まなくてはならない．その第 1 歩は，問題の明確化であり，それは解決の手がかりをつかむことにもつながる．それには，その問題をどこの分野—広・狭さまざま色々考えられるが—の問題にするかという議論の場の設定ないし構成，あるいは制限が基本になる．そのためには，当然のことながら，仮定をおく必要がある．
>
> 数学的モデル化においては，数量あるいは図形という立場でとらえるのであって，他の面は捨象されることになる．これを，まず，押さえておく必要がある．
>
> さらに，解決に進むには，解決者が身につけている解決方法を適用するわけであるが，その方法が適用可能であるようにするには，何らかの仮定をおかなくてはならないのが普通である．（中略）
>
> さらに，ここで，上の結果で満足せず，もっと緻密な法則を求めていく．それには，もっと仮定を緻密化し，それをもとにいっそう良い結果を導き出すのである．
>
> このようにして，一般的には，
>
> 仮定の設定　　解決結果
>
> というサイクルを繰り返すのである．
>
> この，仮定の設定・（一時的）解決結果・仮定の改良という過程が知識の開発過程であって，そこでは仮定の設定と改良がきわめて重要であるといえる．
>
> これに積極的に参加することを通して，能動的に doing mathematics を体験させることが数学的モデル化のもつ大きな教育的意義の一つであるといえる．
>
> その際，仮定設定・改良の意識化が知識の開発過程の参加におけるキーポイントであることは上で述べたことからも明らかであろう．」(p.25)

このように数学的モデル化による問題解決では仮定の設定が不可欠で，なおかつ重要の要素であることが言える．さらに仮定を設定するだけでなく，仮定を精緻化し，改良を行うことで，より doing mathematics，つまり，数学的モデル化をより良く考えることができる．そのためには，仮定の設定と解決結果のサイクルを繰り返すということでなされる．先に述べた通り，数学的な見方考え方の育成にもつながると考えられる．

ゆえに，本節のここまでの内容を整理すると，問題解決において現実事象と数学を関連付けるために，西村，長崎(2008)の「算数・数学と社会をつなげる力」の B1 の力や清野(2006)が行った仮定の特徴の整理のように，問題解決で意識化させるべき仮定の特徴が整理された．仮定を設定すると言っても問題場面の数値的な仮定だけではなく，理想化・単純化することで，変数・定数とみなす必要がある仮定も出てくる．これらの扱いによって問題解決で導き出される結論には違いが出てくるはずである．例えば，永田(2003)の教材のように，比例とみなすかどうかで，グラフが直線となるか，あるいはそうでないかでのように結論に大きく影響を与えることが明らかである．ゆえに，現実事象の問題解決において定式化での仮定の設定は非常に重視すべき要素であると明らかになった．

第 2 節　「仮定の意識化」が果たす役割とその実現のための行為

1.「仮定の意識化」が果たす役割と実現のための行為

本項では,「仮定の意識化」を重視することで果たされる役割の実現のためにすべき行為と，それをどの段階で行うことで問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得により生徒の実態を改善できるかを吟味し，整理することを目的とする.

本研究では，数学的モデル化による問題解決をすることで，問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得により生徒の実態改善を目指している．そのためにここで先行研究として，清野(2006)は「仮定の意識化」に焦点をあてた数学的モデル化を挙げる．清野(2006)は「仮定を設定することによってはじめて,「数学の世界」と「現実の世界」が繋がれ，数学が活用できるようになる」(p.100),「仮定は,「現実の世界」と「数学の世界」をつなぐ役割を果たしているため，その仮定を意識化させることを通して，2 つの世界の乖離を解消できる」(p.100)と述べ，さらに三輪(1986)の主張と同様に,「数学を活用し，現実事象の問題の解決を進展させていくためには，どのような仮定を設定すればよいのかを吟味するとともに，設定した仮定を意識化し，反省し続ける活動が不可欠となる.」(p.100)と述べている．本研究では定式化の充実を掲げていたが，そのために特に定式化での仮定の設定が現実事象と数学の関連の感得に対して，多大に関与していることが明らかである．ゆえに，この定式化がより充実できればさらに生徒の実態改善につながると考える.

ここで「仮定の意識化」を数学的モデル化による問題解決に導入する価値を見ていきたい．清野(2006)は「仮定の意識化」の意味として,「仮定を設定するプロセスを重視するとともに，（暗黙裡に）設定されている仮定を顕在化させ，その仮定の吟味を行う」(p.100)こととしている．また,「仮定を意識化し，それを吟味する活動は，問題解決者にとって，事象の数理的な考察を遂行するための有効な方法として考えられる．したがって，問題解決者の側から見た場合，設定する仮定を吟味するとともに，設定した仮定を意識化し，それを反省する活動として,「仮定の意識化」を特徴づける」(p.100)とも述べている.

以上の前提を踏まえ，清野(2006)は「仮定の意識化」の役割として次の 3 点を挙げている.

1) 解決過程や結果の妥当性を確認する役割
2) 数学的モデルを洗練する役割
3) 問を生成し，数学的モデル化を進展させる役割

具体的にそれぞれの役割について清野(2006)による吟味を見ていく．1)の役割について，清野(2006)は以下のように述べている.

> 「問題を解決するにあたって，設定している仮定が問題解決に及ぼす影響や適用範囲を無視してしまったり，暗黙裡に設定されている仮定を見過ごしてしまったりしていることがある．そのことによって，誤りや摩擦を引き起こしてしまう可能性があるのである．仮定を意識化するということは，適切な結果を得るために，重要な役割を果たすのである.」(p.109)

この主張からわかることは，仮定をただ設定して問題解決をしているだけでは，本当の問題解決をし

ているとは言えないということである．つまり，実践した問題解決の過程や導き出した結論が本当にその場面に対して妥当であるか確認することが必要で，これにより本当に問題解決ができたかが判断できる．例えば，ある事象の問題解決で 2 次方程式を用いたとする．これを処理し，出た解が正と負の 2 つが出たとき，現実場面に照らし，負の解は妥当でないと判断し，最終的な結論として正の解を採用するということが考えられる．このとき仮定について考える視点として，問題解決において設定した仮定を見直すことで 1)の役割が果たされると考えられる．

続いて 2)について清野(2006)は以下のように述べている．

> 「数学的モデルは，より汎用性が高いもの，より一般性の高いものを目指して，作り変えられるべきものである．作り替える際，現時点で得られている数学的モデルは，どのような仮定に支えられているのかを意識化し，そして明確にすることが重要となる．明確にされることによって，仮定の見直し，仮定の削除，並びに変更を行うことが可能となり，数学的モデルの汎用性，一般性を高めることができるのである．換言すれば，「仮定の意識化」は，数学的モデルを洗練する役割を果たすと考えることができるのである．」(p.110)

この主張からわかることは，数学的モデルは一度作ったもので満足せず，よりよいものを志向していくべきものであるということが分かる．例えば，車のルームミラーを考えたとき，最初に装備されていたものから，さらに広く見えるミラーに変える上で，平面鏡，さらに曲面鏡と変えることで，より広い範囲を確認できるものにしていくことができる．このとき仮定について考える視点として，特に仮定をおき直すことに注目することで，2）の役割を果たすことができると考える．

最後に 3)について清野(2006)は以下のように述べている．

> 「単純化，特殊化された状況の反省が仮定を意識化させ，問を生み出したのである．このように，「仮定の意識化」は，問題解決において有効な指針を与えてくれるとともに，新たな問を生み出し，解決を進展させる役割があると考えられるのである．」(p.111)

この主張から考えられることは，1），2）の役割を果たす前提として，3)の役割があるのではないかということである．つまり，解決過程や結果の妥当性を確認したり，数学的モデルを洗練したりするためには，まずその必要観を持つことが重要なことである．具体的には，先の車のルームミラーを例にすると，「最初に装備されていたルームミラーでは見えづらい．だからもっと広い範囲が見えるといいなあ．」という思いがあれば，よりよいもの，ここではより広く見えるミラーがないのかという問が生まれるのである．これにより現実事象に照らして問題解決が進展する，つまり数学的モデルが進展することにつながり，3）の役割が果たされると考える．

以上を踏まえ，「仮定の意識化」を重視することで果たされる役割の実現のためにすべき行為として，本研究では「問を生成し，仮定を見直し，おき直す」の 3 段階による行為と定めることとする．

続いて「仮定の意識化」が果たす役割の実現のための行為を，本研究で同定した数学的モデル化過程に沿った問題解決において，どの段階で行うかを考える．「仮定の意識化」の役割は先述した 3 点であるが，清野(2006)は解釈・評価の段階で仮定が意識化される契機として，「得られた数学的結論が現実事象に対

して妥当でないと判断した場合」と，「より良いモデルを志向した場合」(p.218)の 2 つを挙げ，「これらの契機は，教師の側からすれば，仮定を意識化させる有効な発問場面として捉えることができよう」(p.219)と述べている．このような契機が問題解決をしているときに起こることが必要である．ゆえに，「仮定の意識化」の役割が果たされる契機，つまり問題解決における段階を考えることとする．本研究で用いる数学的モデル化過程を以下に設定する段階を経て，数学的モデル化による問題解決を行うこととしていた．

(1)数学的な問題場面の作成：現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで，数学の問題場面としておきなおす．
(2)数学的モデルの作成：数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで数学的モデルを導く．
(3)数学的作業：数学的手法を用いて数学的結論を得る．
(4)解釈：数学的結論が現実的文脈に照らしてどのような意味を持つのかを理解する．
(5)評価：現実的文脈を考慮した結論を現実場面に照らして評価し，妥当であれば最終的な結論とする．妥当でなければ仮定を見直すとともに，おき直す仮定を考え，問題解決の進展を図る．

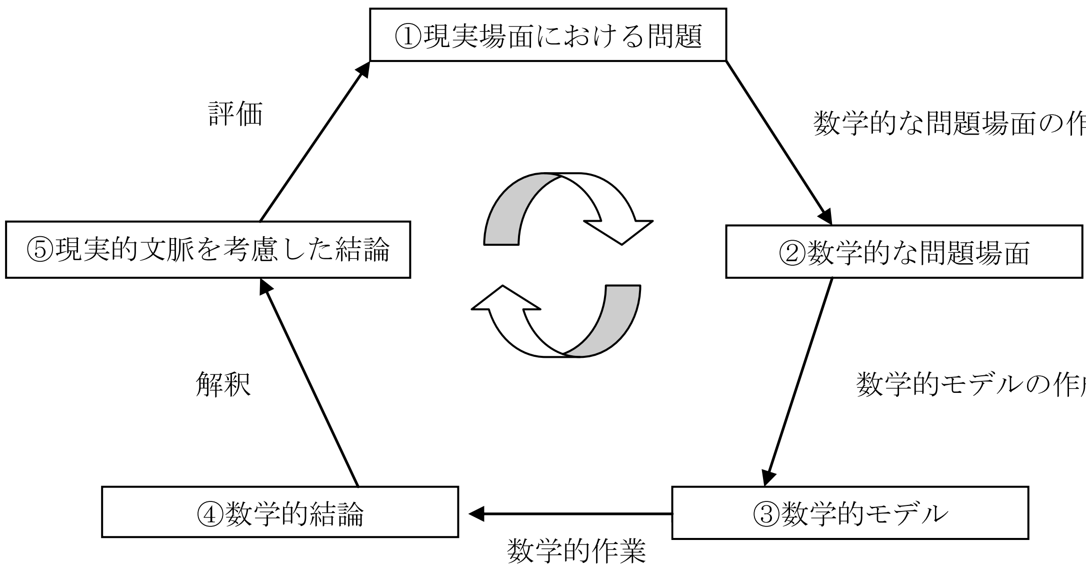


図 2-4：本研究における数学的モデル化過程

本研究で同定した数学的モデル化過程の特徴として，定式化を充実させるために，定式化において仮定を設定することが，いかに問題解決で重要な要素であるかを生徒に実感させる機会を設けるとし，解釈と評価を 2 つに分けることで個別化した．まず解釈では「数学的な解答や結果を検討し，問題の文脈の中でそれらを解釈する」活動がなされ，現実事象と数学の関連がより意識化される．まずは導き出した数学的結論が現実的文脈に照らして，妥当であるか判断させることを評価で行い，より良い数学的モデルを志向するために，生徒に仮定を着目させ，設定した仮定が現実事象の問題解決において重要な要素であることを実感させる行為を評価において行うこととしていた．これにより，よりよい数学的モデルを志向する必要性があれば仮定を再設定することで問題解決を進展させ，最終的な結論を出すことを

目指すことができると考えていた．

この評価の段階で「仮定の意識化」をさせる．まず導き出した結論に対してよりよい結論がないか新たな問を生成する．これにより，生徒に「仮定の意識化」をする機会を与え，3）の役割を果たすことができる．そして，その問題場面での問題解決の過程や導き出した結論が現実事象と照らしてみて妥当であるかを，設定した仮定を見直すことで確認する．これにより 1）の役割を果たすことができる．最後にその問題場面での問題解決において設定した仮定をおき直すことで数学的モデルを洗練させる．これにより 2）の役割を果たすことができる．

以上の行為を本研究での数学的モデル化過程の評価の段階ですることにより，「仮定の意識化」がなされる．これにより問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得ができる．ゆえに現実事象の問題解決において設定した仮定の重要性の理解につながり，定式化を充実させることにつながると考える．これが最終的には生徒の実態改善につながると考える．

より詳細な視点で見てみると，一度の数学的モデル化過程に沿っての問題解決よりも，単純化された場面から問題解決を行い，仮定を意識化させることで，徐々に実際に問題場面へと進展させることで，余裕を持った思考が可能となる．これは砂場(2003)の「B 仮設に基づく単純化の過程」の主張を生かしたもので，問題場面を単純化したものから，徐々に実際の問題場面に近づけていくことと同様の見解であると考えられる．ゆえに，現実事象の問題解決において仮定を意識化することは，問題解決を進展させることにつながり，最終的には実際の場面に即した結論につながっていく．つまり，現実場面の問題を数学で解決することは生徒の「数学の世界」と「現実の世界」との関連の実感につながると考えられる．これも本研究で同定した数学的モデル化過程の特徴として挙げた評価の価値として挙げられる点であると考える．

以上より，本研究における数学的モデル化過程で「仮定の意識化」が果たす役割を実現させ，その実現のための行為について明らかにした．ここから重要なのはこの価値を発揮することのできる教材の開発である．ここまでの内容を踏まえた教材開発につなげていくこととする．

2.「仮定の意識化」を重視することの教育的価値

本項では，数学的モデル化による問題解決において「仮定の意識化」を重視することによる教育的価値を整理することを目的とする．

現実事象の問題解決において仮定を意識化することでこの 3 つの役割が果たされると，仮定に着目した思考は定式化を充実させることができ，数学的モデル化による現実事象の解決の質が高まることにつながると考えられる．さらに清野(2006)は「数学的モデルは，より汎用性が高いもの，より一般性の高いものを目指して，作り替えられるべきもの」(p.110)であり，「問題解決において有効な指針を与えてくれるとともに，新たな問を生みだし，解決を進展させる役割がある」(p.110)と述べている．これにより，現実場面の問題を数学で解決することは生徒の「数学の世界」と「現実の世界」との関連の実感につながると考えられる．よって，仮定を意識化し，3 つの役割が果たされるような数学的モデル化による問題解決をすることを，生徒の「数学の世界」と「現実の世界」との関連をより意識させ，実態改善のための方法として捉えることとする．

清野(2006)は「仮定の意識化」の教育的価値として 2 点挙げている．

1. 数学の有用性・数学と現実との関連の感得
2. 事象を数理的に考察する方法の獲得

1については，筆者の問題意識としても前提とあるものである．実際，久保良宏ら(2001)の教科書分析に関する研究で，数学を社会と関連づけた問題が約2割あるが，そのほとんどは数学的に処理するもので，本研究で特に重視しているような仮定の設定等に関しては触れられていないようである．しかし，教科書で取り上げられているようなものだけでは，ここまで挙げてきたように，数学の有用性を感得することは困難であるし，数学と現実の関連を意識しながら問題解決することもあまりなく，あくまで習ったことを使って数学的処理をするにとどまっているのが実態である．ゆえに，数学的モデル化による問題解決において，「仮定の意識化」を重視することで，まず仮定を設定すること自体も重要であるが，実際の場面に照らし合わせて，仮定を修正していくことも同時に経験できれば，数学の有用性や数学と現実との関連の感得が可能であると考える．

2について清野は,「仮定の意識化」の3つの役割を挙げていたが,「これらの役割が示していることは，「「仮定の意識化」が，問題解決者にとって，事象の数理的な考察を遂行するための有効な方法として機能しうる」(p.114)と述べ,「仮定の意識化」を重視した授業について以下のように述べている．

> 「仮定の意識化」を重視した授業では，現実事象の数理的な考察において，どのような仮定を設定したのかを生徒に問うとともに，暗黙裡に設定されている仮定をできる限り明らかにするように問われる．これは，当面している問題の解決を行わせるためだけではない．現実事象の数理的な考察において，自らが上記の問いを反問し，問題解決を追求する姿勢や態度を育成しようと意図して行われるのである．言うなれば，授業で示している教師の問いは，問題解決をするために必要な考え方のモデルを示しているのである．「仮定の意識化」を重視した授業を繰り返しながら，生徒が自ら仮定を究明しようとする姿勢や態度を身につけさせていくことによって，徐々に，事象を数理的に考察する方法も獲得されていく」(p.114)

生徒の実態を踏まえると，単純で既習の数学的処理に関しては取り組めている一方で，習ったことがないような問題については取り組めない，取り組もうとしないという実態があるのは第1章第2節で述べた通りである．そこで，現実事象の問題解決において「仮定の意識化」をさせていくことで，生徒が自ら仮定を究明しようとする姿勢や態度を身につけさせていくことができ，徐々に，事象を数理的に考察する方法も獲得されていくと考えられる．

以上のように現実事象の問題解決において「仮定の意識化」を重視することにより，生徒の実態改善につながることが明らかになった．

第 3 節　本章の総括

本章の意図は，生徒がより現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得ができるよう，数学的モデル化による問題解決を充実させるために，仮定の設定に関してより重視するために必要な視点を明らかにし，さらに同定した数学的モデル化過程において，どのような問題意識を持ち，どのような行為ができればさらに定式化を充実させることができるのか，その視点を明らかにすることであった．

第 1 節では，数学教育研究上において仮定がどのように捉えられているかを整理した．西村，長崎(2008)の「算数・数学と社会をつなげる力」の「B1．社会の現象を数学の対象に変える」力や清野(2006)が行った仮定の特徴の整理のように，問題解決で意識化させるべき仮定の特徴のように問題解決において設定される仮定には様々なものがあることが整理された．また，仮定を設定すると言っても問題場面の数値的な仮定だけではなく，理想化・単純化することで，変数・定数とみなす必要がある仮定も出てくるため，これらの扱いによって問題解決で導き出される結論には違いが出てくると考えられる．よって，現実事象の問題解決において定式化での仮定の設定は非常に重視すべき要素であると明らかになった．

第 2 節では，「仮定の意識化」を重視することで果たされる役割の実現のためにすべき行為と，それをどの段階で行うことで，問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得により生徒の実態を改善できるかを第 1 章で同定した数学的モデル化過程との関連を踏まえながら吟味し，整理した．そして「仮定の意識化」をすることがどのような教育的価値を持つのかを整理する．

まず「仮定の意識化」の意味として，「仮定を設定するプロセスを重視するとともに，（暗黙裡に）設定されている仮定を顕在化させ，その仮定の吟味を行う」(p.100)こととしている．そして清野(2006)は「仮定の意識化」の役割として次の 3 点を挙げていた．

1) 解決過程や結果の妥当性を確認する役割
2) 数学的モデルを洗練する役割
3) 問を生成し，数学的モデル化を進展させる役割

この 3 つの役割についてそれぞれ吟味した．清野(2006)の主張を踏まえ，「仮定の意識化」を重視することで果たされる役割の実現のためにすべき行為として，本研究では「問を生成し，仮定を見直し，おき直す」の 3 段階による行為と定めることとした．

続いて「仮定の意識化」が果たす役割の実現のための行為を，本研究で同定した数学的モデル化過程に沿った問題解決において，どの段階で行うかを考えた．清野(2006)は解釈・評価の段階で仮定が意識化される契機として，「得られた数学的結論が現実事象に対して妥当でないと判断した場合」と，「より良いモデルを志向した場合」(p.218)の 2 つを挙げ，「これらの契機は，教師の側からすれば，仮定を意識化させる有効な発問場面として捉えることができよう」(p.219)と述べていた．これを踏まえ，本研究で同定した数学的モデル化過程の評価において「仮定の意識化」をさせることとした．まず導き出した結論に対してよりよい結論がないか新たな問を生成する．これにより，生徒に「仮定の意識化」をする契機を与え，3）の役割を果たすことができる．そして，その問題場面での問題解決の過程や導き出した結論が現実事象と照らしてみて妥当であるかを，設定した仮定を見直すことで確認する．これにより 1）の役割を果たすことができる．最後にその問題場面での問題解決において設定した仮定をおき直すことで数学的モデ

ルを洗練させる．これにより 2）の役割を果たすことができる．

以上の行為を本研究での数学的モデル化過程の評価においてすることで，「仮定の意識化」がなされる．これにより問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得ができる．ゆえに現実事象の問題解決において設定した仮定の重要性の理解につながり，定式化を充実させることにつながると考える．これが最終的には生徒の実態改善につながると考えた．

そして，数学的モデル化による問題解決において「仮定の意識化」を重視することによる教育的価値を整理した．

清野(2006)は「仮定の意識化」の教育的価値として以下の 2 点を挙げている．

1．数学の有用性・数学と現実との関連の感得
2．事象を数理的に考察する方法の獲得

これらの教育的価値について整理し，現実事象の問題解決において「仮定の意識化」を重視することにより，生徒の実態改善につながることが明らかになった．

以上より，本章において数学的モデル化による問題解決の定式化を充実させるために，評価の段階で「仮定の意識化」がなされることで，問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得ができる．ゆえに現実事象の問題解決において設定した仮定の重要性の理解につながり，定式化を充実させることができると考える．これが最終的には生徒の実態改善につながると考えた．この主張のもと，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の開発と授業実践へとつなげていくこととする．

第 3 章

「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の開発

本章の意図と構成

本章の意図は，数学的モデル化教材の開発に取り組むことである．このとき，第 1 章，第 2 章で明らかになった，「仮定の意識化」を重視する．まず，筆者にとって身近な現実事象となる場面から必要観に迫られ，問題意識を持った状態で課題を実際に解決していく．次にこれを教材化すること及び，授業化を目指し，教材を吟味することである．

本章の構成は以下の通りである．

第 1 節では，筆者の身近であった解決したい問題場面について，数学的モデル化による問題解決を実践する．この問題解決の過程を整理し，考察を加えることで，教材の価値を明らかにする．

第 2 節では，第 1 章，第 2 章で整理してきた，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化と開発した教材の問題解決との関連を明らかにする．

第 3 節では，開発した数学的モデル化教材の授業実践に向け，生徒の問題解決が可能となるような数値の吟味をすることで，問題場面の再設定を行い，開発した教材を洗錬する．そして，数学的モデル化教材の実践に関する先行研究をもとに，学習指導の展開を考察し，本教材の授業実践での実際の学習指導の展開の構想を整理する．

第 4 節では本章の総括を行う．

第 1 節　教材開発の過程と開発した教材の考察

1．教材開発の過程

久保良宏ら(2001)の教科書分析に関する研究で，「数学を社会と関連づけた問題が約 2 割もあったが，そのほとんどは，数学的に処理するものであり，社会の現象を数学的の対象に変えたり検証する問題や社会や文化のつながりに関する意識や態度にかかわる問題は極めて少ないことが分かった．特に社会に照らして修正する問題はほとんどなく，また，変数を制御したり，数学的に処理する意識や共同的に学習に対する意識にかかわる領域内容に分類される問題はなかった」(p.294)とある．

ゆえに，初めから数学的モデル化された現実事象を数学的処理すればよいという問題ではなく，問題場面を設定する等，数学的モデル化過程の最初の段階から仮定を設定したり，数学的モデルを作成したりするところから取り組めるような問題を考える必要があると考える．ここで考える場面として，なるべく仮定をおき，見直し，さらにおき直していくことで，問題場面がより現実場面に近づいたものへとなっていくような，砂場(2003)の主張のように，単純化された場面から徐々に具体的な場面へと進展さしていけるような場面を考えてみたい．また，西村(2012)は教材開発に際して，「解決に用いる数学の内容を先に決め，それに合う，教材を開発しようとしていない」点は，教材開発の特徴であるとしている．つまり，最初に問題解決に使う数学の内容や授業の単元を決めず，まずは問題意識を持って取り組める内容の問題場面を探し，あらゆる数学を用いて実際に問題解決をする．そして，その問題解決の内容を踏まえ，教材化，授業化につなげていくこととする．

まず教材を開発する前提として，筆者の身近な場面でどうしても解決したいと思える問題はないか考えてみた．問題意識として，教師側がまず解決する必要観に迫られて問題解決するような場面であれば，生徒にも問題意識を持たせられるのではないかと考えたからである．

筆者が家の近所で車を運転していると，交差点で事故に遭いそうになることが多い交差点があることに気がついた．以下に写真を示す（図 3-1～3-4）．矢印は車が進む方向を示している．

図 3-1：解決したい実際の問題場面（正面）

図 3-2：解決したい実際の問題場面（車の反対側から見た様子）

図 3-3：解決したい実際の問題場面（丁字路の右側から見た様子）

図 3-4：解決したい実際の問題場面（丁字路の左側から見た様子）

これらの写真から危険性を考えてみると，「死角が多くある」，「車来るのに確認するために道路にはみ出て確認しないといけない」といったことが考えられると考えられる．実際，図 3-2 からわかるように左側がカーブを描いているため，予想以上に見づらいことというのが実態である．また右側は住宅があり，すきまがあるとはいえ，死角になることは否めない．しかし，図 3-4 を見てみるとはほぼ直線と見ることができるし，車で右側を確認することはある程度出れば確認できる．ゆえに，まず解決したいことは左側の様子がわかるようにし，車が来るなど状況を確認できるようにしたいということとする．

以上を踏まえ，筆者の問題意識として，なんらかの対策を練る事で，上に示したこの危険な場所で事故に遭う危険性を少しでも改善できないかと考えた．この改善のためには道路反射鏡（以下ではミラーと表記することとする）を設置することが一つの改善策になると考えられる．これを数学で問題解決することはできないかと考えるに至った．そこでまずミラーの設置基準がどのようなものであるかを調べると，表 3-1 のようなものがあった．

表 3-1：道路反射鏡設置基準

○道路反射鏡設置基準

平成元年 8 月 23 日
制定

1　目的

この基準は，道路反射鏡を設置するために必要な事項を定めることを目的とする．

2　定義

道路反射鏡とは，道路の見通しの悪い場所において，他の車両，歩行者及び傷害物を確認するための鏡をいう．

3　設置場所

道路反射鏡の設置場所は，概ね幅員 4 メートル以上の道路で次に掲げるいずれかの場所とする．

(1)　信号機の設置されていない交差点で，見通しが悪く交通事故発生のおそれのある交差点

(2)　見通しの悪い屈曲部

(3)　行止りの私道については，受益者世帯概ね 10 世帯以上あること．

(4)　上記以外で，公道を走る車両等が道路反射鏡を設置することにより安全の確保が図れる場合

4　設置方法

道路反射鏡は交差する車両，歩行者，傷害物を十分かつ容易に確認しえる位置，高さ，角度を選んで別紙仕様図を標準として設置しなければならない．ただし，鏡面，支柱等が車両若しくは，歩行者の通行の障害とならないように留意しなければならない．

5　形式

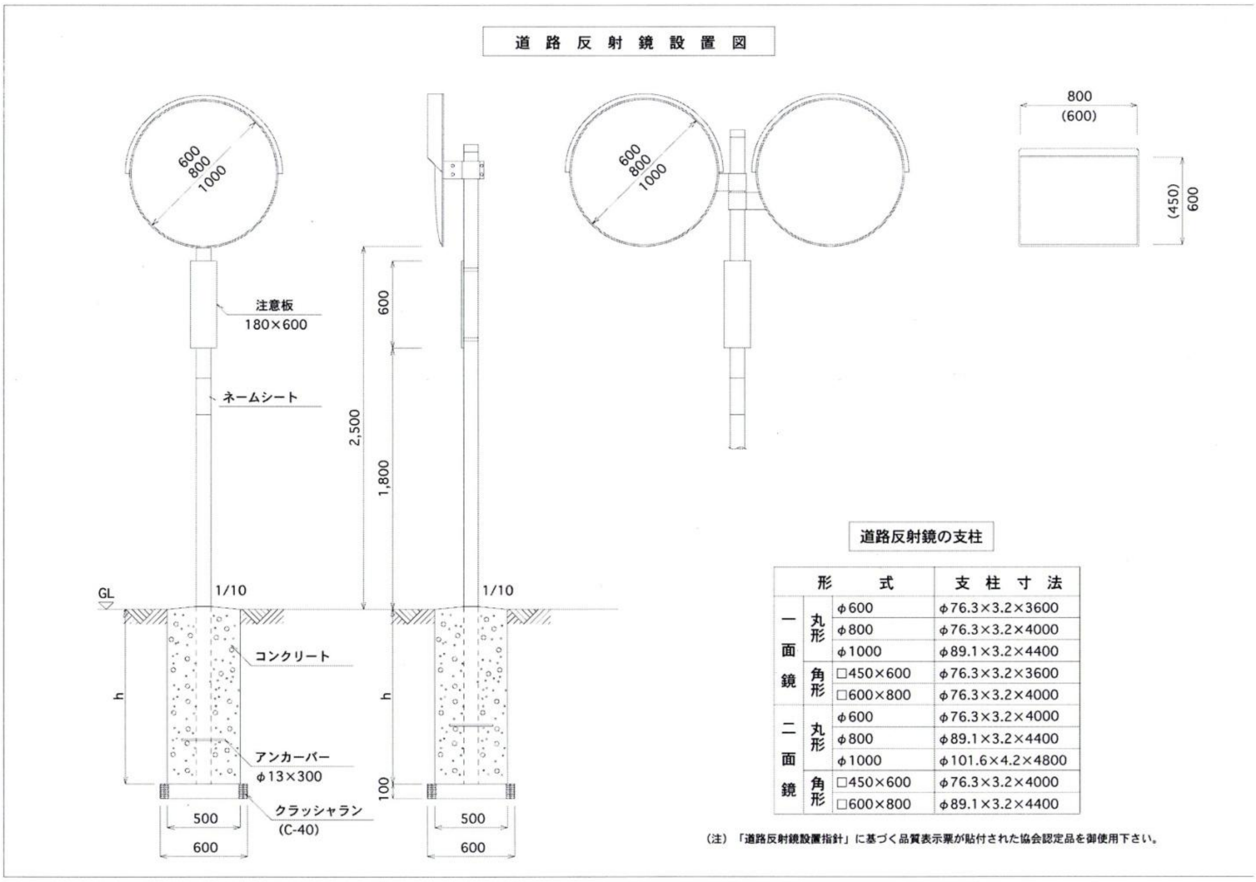
道路反射鏡の形式は次のとおりとする．

形式

鏡面形状	鏡面数	鏡面の大きさ
丸形	一面数	φ　600
		φ　800
	二面数	φ1,000

（http://www1.g-reiki.net/shiki/reiki_honbun/e329RG00000553.html#e000000008）

また，道路反射鏡協会にてミラーの構造やサイズなどについて，図 3-5 のようなデータがあった，これは実際のデータとして活用したい．



形		式	支柱寸法
一面鏡	丸形	φ600	φ76.3×3.2×3600
		φ800	φ76.3×3.2×4000
		φ1000	φ89.1×3.2×4400
	角形	□450×600	φ76.3×3.2×3600
		□600×800	φ76.3×3.2×4000
二面鏡	丸形	φ600	φ76.3×3.2×4000
		φ800	φ89.1×3.2×4400
		φ1000	φ101.6×4.2×4800
	角形	□450×600	φ76.3×3.2×4000
		□600×800	φ89.1×3.2×4400

図 3-5：道路反射鏡設置図（道路反射鏡協会）

（http://www.dhk.gr.jp/about_mirror/mirror-characteristic.html）

以上の規準を考慮すると，この場面は設置基準に記載されている設置場所の(1)に対応している．ゆえにミラーを設置するために考えるのは，ミラーを設置する位置，高さ，角度についてということになる．ここで，どのような問題場面を設定するか今一度考えてみると，ミラーの高さについては図 3-5 よりおおよその高さが設定されている．ゆえに数学的に考えるとこれは定数としておくことができると考える．ゆえに，ミラーの設置に関して特に重要となる要素は位置と角度を考えることであると，今回の問題解決並びに本教材の開発では考えることとしたい．以上を踏まえ，問題場面の設定に入っていく．なお，その他のデータについては基本的に日本道路協会(1984)の『道路反射鏡設置指針』を参照していくこととする．

今回設置する場所について考えると，まずどのような交差点であるかを考える必要がある．交差点としては十字路，丁字路（T 字路のこと），Y 字路，その他複雑なものが様々考えられる．その中で今回は問題意識の前提となった丁字路考えることとした．さらにそれぞれの道路は直線となっていて，道路が曲がっていないということ，交差点は直角に交わっていること，ということを基本的に考えることとした．また，ミラーの設置について高さを定数としたが，この要素を考えなくてもよいような問題場面の

設定を考えると，地図のように上から見た図（平面図）を考えると，図 3-4 までの写真のように 3 次元での問題解決でなく，2 次元での問題解決が可能となる．このように考えると，ミラーの設置については高さを考慮せず，位置と角度について考えるとよいという問題場面を設定できる．よって，まず平面図となる地図，並びに実際場面を単純化した問題解決に使う問題場面を図 3-6 のようにし，実際の問題解決に入っていく．

図 3-6：実際の問題場面の平面図（地図）

2. 実際の問題解決とその解決過程

ここからの問題解決は基本的に PC ソフトの GeoGebra を活用して問題解決を行い，作図等もこのソフトで基本を行い，一方で適宜コンパス等を使っての作図も取り入れながら進めていくこととする．

・最も単純化した場面の問題解決過程

まず，図 3-6 をより単純化・理想化した場面にし，解決したいと考えた．具体的には，交差点を直角に交わる丁字路と考えてみる．さらに，場面として図 3-6 をさらに縮小した様子，つまり道路を直線と見た状態から問題解決をしていくこととした. ミラーはこの 2 つの道路の交わる点 O_1 におくこととする．暗黙裡ではあるが，ミラーはこの時点では点として見ている．ここでの場面における仮定をおいて以上のように問題場面を設定し，問題解決している．設定した仮定を整理すると，以下の通りである．

[道路について]
・道路が直角に交わるものとする（丁字路とする）
・道路を直線とする
・道幅を 0 とする
・直線を車の通過する道路と見る
[ミラーについて]
・ミラーを点とする
・道路(直線)の交点にミラーをおく

最初に道路の状況を想定した問題場面の設定について考える．まずこの場面の図 3-6 のように道路を上から見た状況（平面図）を想定する．ちなみにこの場面は図形的に見て最も抽象化された場面となっている．これを数学的モデル化し，図 3-7 のような状態として考える．

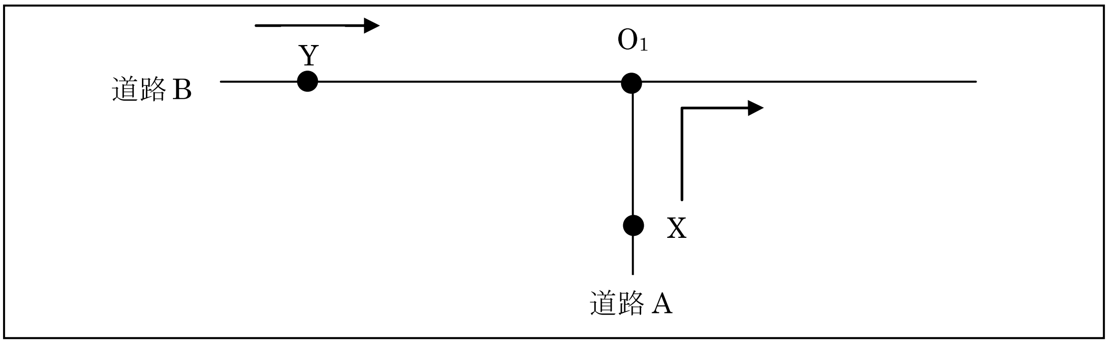


図 3-7：(1)の場面の平面図

ここで図 3-7 についてだが，自動車に乗っている自分を X とし，交差点へ直進している．この直進している道路を A とする．そして，交差点に差し掛かり，交差点を右折したいと思う．ここで右折する道路を B とする．しかし，この道路 B を左から右へと直進している自動車 Y がいることを想定する．X が Y にぶつかることなく交差点を右折するために，Y の位置を確認した上で右折したい．そのために，O_1 にミラーを設置して確認することを考える．ここで X と Y はそれぞれ道路 A，B 上にいることとする．最初にミラーを設置するためには，ミラーの位置と角度について決定しなくてはならない．まずミラーを設置する位置については，道路を直線とし，道幅がないものと仮定しているので，2 つの道路の交点を O_1 とし，この点におくことで，道路 A 上にいる X が点 O_1 のミラーを見ることで道路 B 上にいる Y の位置を見ることができると考えられる．よって位置については O_1 に設置すると決める．続いて角度について考えていく．角度を求めるために中学 1 年の理科における学習の「入射と反射の法則」を使う．点 X から O_1 にあるミラーを見ることで，それに写っている Y が確認できるようにする．つまり，Y が O_1 のミラーに映り，それが反射して X にいる自分が確認できるとも考えられる．ゆえにこの法則を使い，問題解決していくこととする．「入射と反射の法則」は図 3-8 の通りである．

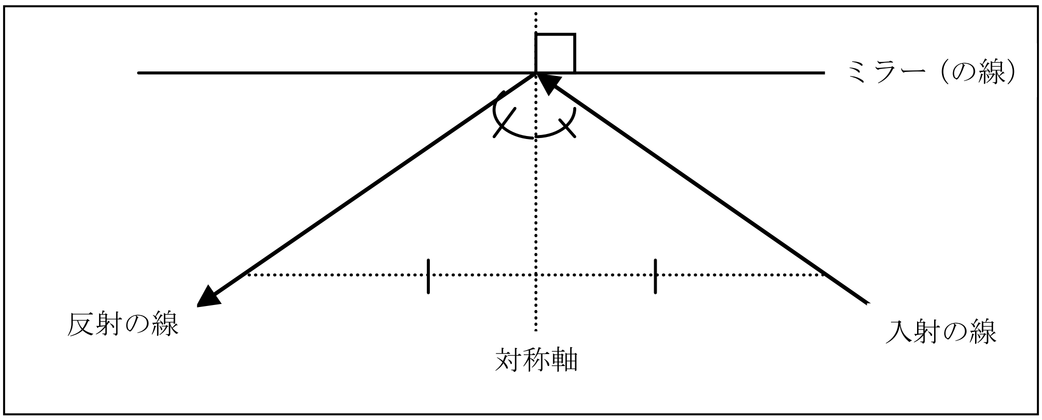


図 3-8：入射と反射の法則

この法則によると，ミラーの線をどのように引くか問題である．これは入射角と反射角が等しくなるような対称軸を引き，これに対して点 O_1 を通る垂線を引くことで作図できる．つまり点 X から点 O_1 へ入射し，点 Y へ反射していくと考えると，$\angle XO_1Y$ の二等分線を作図し，これに対する点 O_1 を通る垂線を引く．結論としては角度を求める必要があるので，どのような角度で設置すればよいか考えると，ミラーを道路に対してどのくらい傾けた角度で設置すればよいかを考えるので，道路 B と最後に引いた垂線を m とすると，$\angle BO_1m$ の角度を結論とする．以上の過程を図にすると図 3-9，10 のようになる．

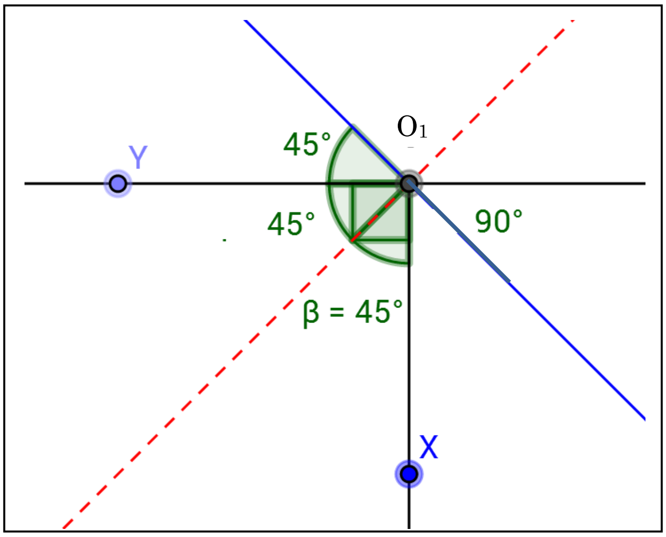


図 3-9：(1)の解決の図

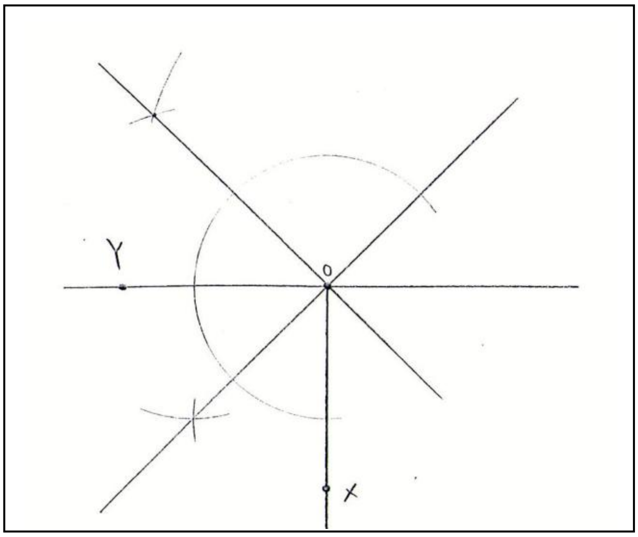


図 3-10：コンパス等による解決の作図

ここまでの問題解決の過程より，(1)の場面の結論は以下のようにする．

<u>∴丁字路の交差点のところにミラーを道路 B に対して 45°の角度で設置する．</u>

この結論はつまり，道路 A，B 上に X，Y がいれば確認できるということである．ここまでの解決を(1)の場面としておく．しかし，この場面は最大限抽象的に考えた場面であり，道幅が直線，つまり道幅 0 というのは現実場面に対して妥当ではない．ゆえにこの仮定を見直し，さらに現実場面の状況に近づけるため，仮定をおき直すこととする．ここで見直す仮定は道幅が直線であるということで，おき直す仮定は道幅を設定することである．この点を見直し，おき直すことで次の問題場面に入っていく．

・道幅を設定した場面の問題解決過程

まず道幅を 2 つの道路ともにそれぞれ 6m とし，問題場面を設定する．またそれぞれの道路の中央線を作図しておく（A，B の中央線をそれぞれ M，N とする）．車が通る経路としては，それぞれの車線の中央とする(それぞれ M_1，N_1 とする)．ここで点 X からの見え方を考える．この交差点を Y が左から直進してくる場面を想定する．この場面において X が Y を確認するためのミラーの位置を考える．(1)と同様にミラーを X と Y の通る経路の M_1 と N_1 の交点を先ほど同様 O_1 として考えると，この場面では道路上置くと走行には邪魔なため，ここからさらに道路の上側の方に移動させることとし，O_2（後の B1）とする．ここまでの仮定をふまえ，問題場面は図 3-11 のようになる．

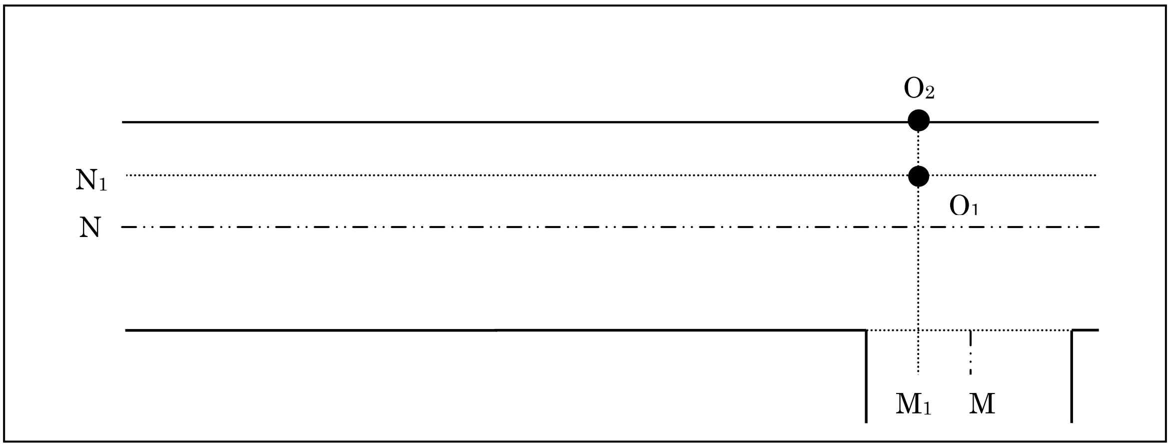


図 3-11：再設定した問題場面の平面図

この位置に移動させ，(1)の結論が維持されるか，というとそうではなくなってしまう．(1)の場面は入射線と反射線が道路と一致していたため，X と Y は道路 A，B 上にさえいればよいという条件だった．しかし道路の仮定をおき直し，ミラーの位置についての仮定が変わったため，先の結論が維持できない．ゆえに X と Y の位置を改めて仮定しなおすこととする．X の位置については，交差点手前の一時停止線を手前 1m におくこととする．一方，Y の位置は少し考えづらい．X は止まっているが，Y は動いてくるからである．そこで，実際にどの位置に Y がいるのを確認できればよいか考える．ここでは，Y が走ってきて，Y が止まることなく，そして X がそれに対してぶつかることなく右折するためにどの程度の距離を離れていればぶつかることがないかという思考に行きついた．ここで，Y が 40km/h で走行していると考え，X が道路に出る過程を考えると次の作業が考えられる．

①交差点の手前 1m の地点に X が止まる．
↓1 秒
②道路反射鏡をみる
↓1 秒
③交差点直前まで出る
↓1 秒
④右側の確認をする
↓1 秒
⑤もう 1 度道路反射鏡を確認する．
↓1 秒
⑥出発（アクセルを踏む）
↓1 秒
⑦道路に出る
↓2 秒

ここで考える点として，⑤の段階で X が Y を確認して出発するので，⑤～⑦の過程で車が 4 秒かかると仮定し，この間に Y とぶつからないようにしたい．するとこの間に Y が移動する距離が求められれば

よい．ゆえに見えてほしい範囲は次の式で求められる．

$$
\begin{aligned}
40(\mathrm{km/h})\times4(\mathrm{s}) &= 40\times1000\div60^2\times4(\mathrm{s})\\
&= 11.1111(\mathrm{m/s})\times4(\mathrm{s})\\
&= 44.4444(\mathrm{m})\\
&\fallingdotseq 45\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

よって Y はこの 4 秒間に 44.4444m 進むと分かった．ここで 44.4444m と設定すると，ちょうど X と Y が接触してしまう可能性もある．よってさらに少し距離をとり，約 45m として対応することとする．以後 Y は点 O_1 から左に約 45m 離れた地点にいるものと考えていくこととする．

そしてミラーを設置する位置について考えると，これも変数として捉えられるため，様々な位置におくことができると考えられる．例えば，今回は X の真正面の道路 B の上の端（B1）や道路 A の左端を延長して道路 B の上の端との交点 (B2)，さらに道路 A の中央線 M の真正面の道路 B の上の端との交点（B3）のように考えることができる．今回の問題解決では位置についてこの 3 通りについて考えていくこととする．

この(2)の場面において，ここまで設定した仮定を整理すると以下の通りである．

[道路について]
・道路の両端を平行とする
・道幅を 6m とする
・道路と車の通過経路を分離し，再設定する．
・道路上にミラーをおけず，道路の端に平行移動する
[その他]
・ミラーで見えてほしい車 Y の位置をおく(45m)
・視界は点で示され，死角が存在する

ここから問題解決の作図の過程について整理していく．求めるものは道路 B に対するミラーの角度である．まず各地点 B1～B3 と X と Y を結んだ角の二等分線を作図し，これに対して各点 B1～B3 を通るように垂線を作図する．この垂線と道路 B とがなす角の角度を出すことになる．これを B1～B3 に関してそれぞれ求める．この問題解決を GeoGebra と実際の作図によって行った．まず GeoGebra での解決では図 3-12 のようになった．

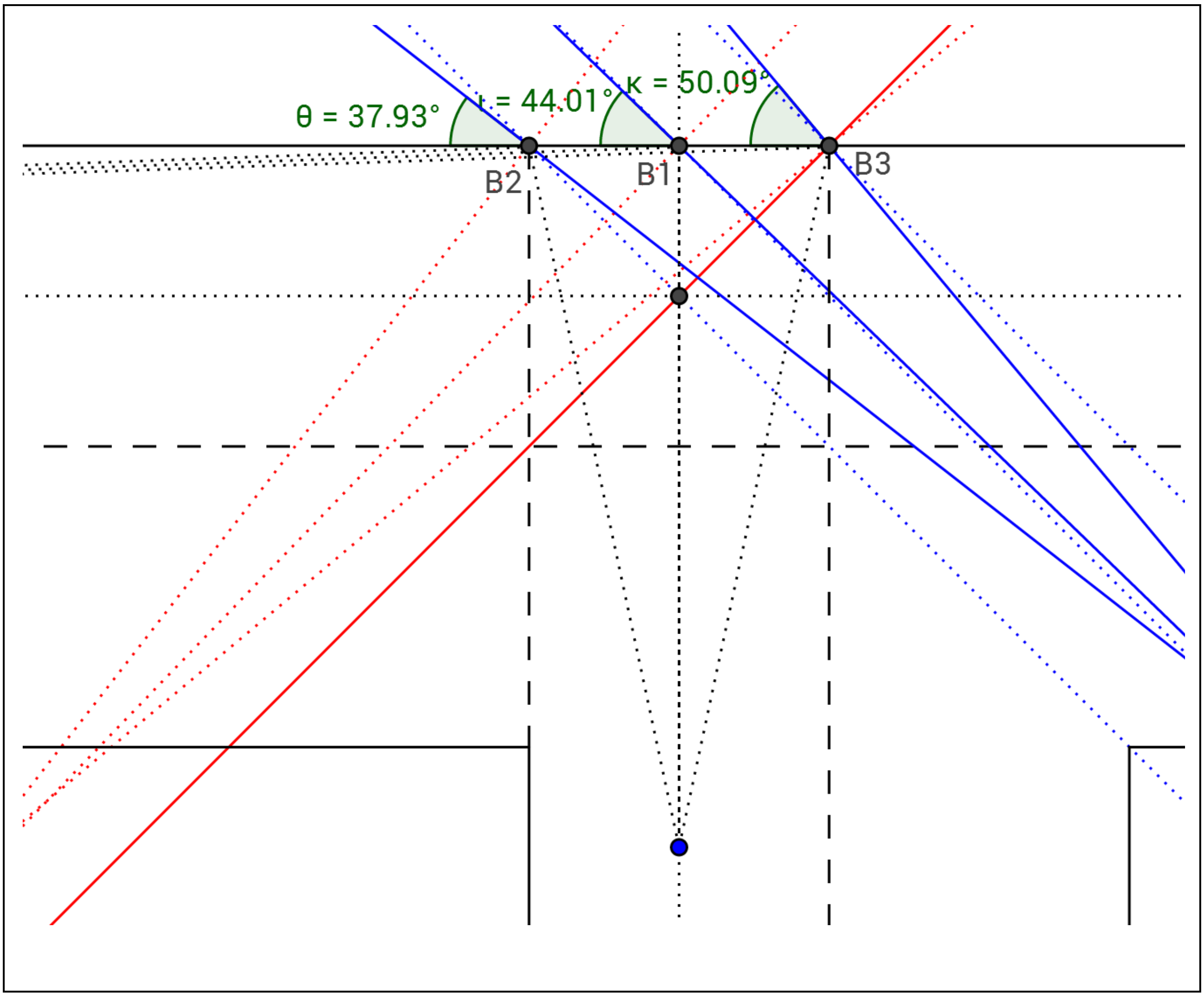


図 3-12：道幅を設定した場面の解決の作図

続いて実際にコンパス等を用いて，角の二等分線や垂線の作図を利用して解決してみると図 3-13 のようになった．

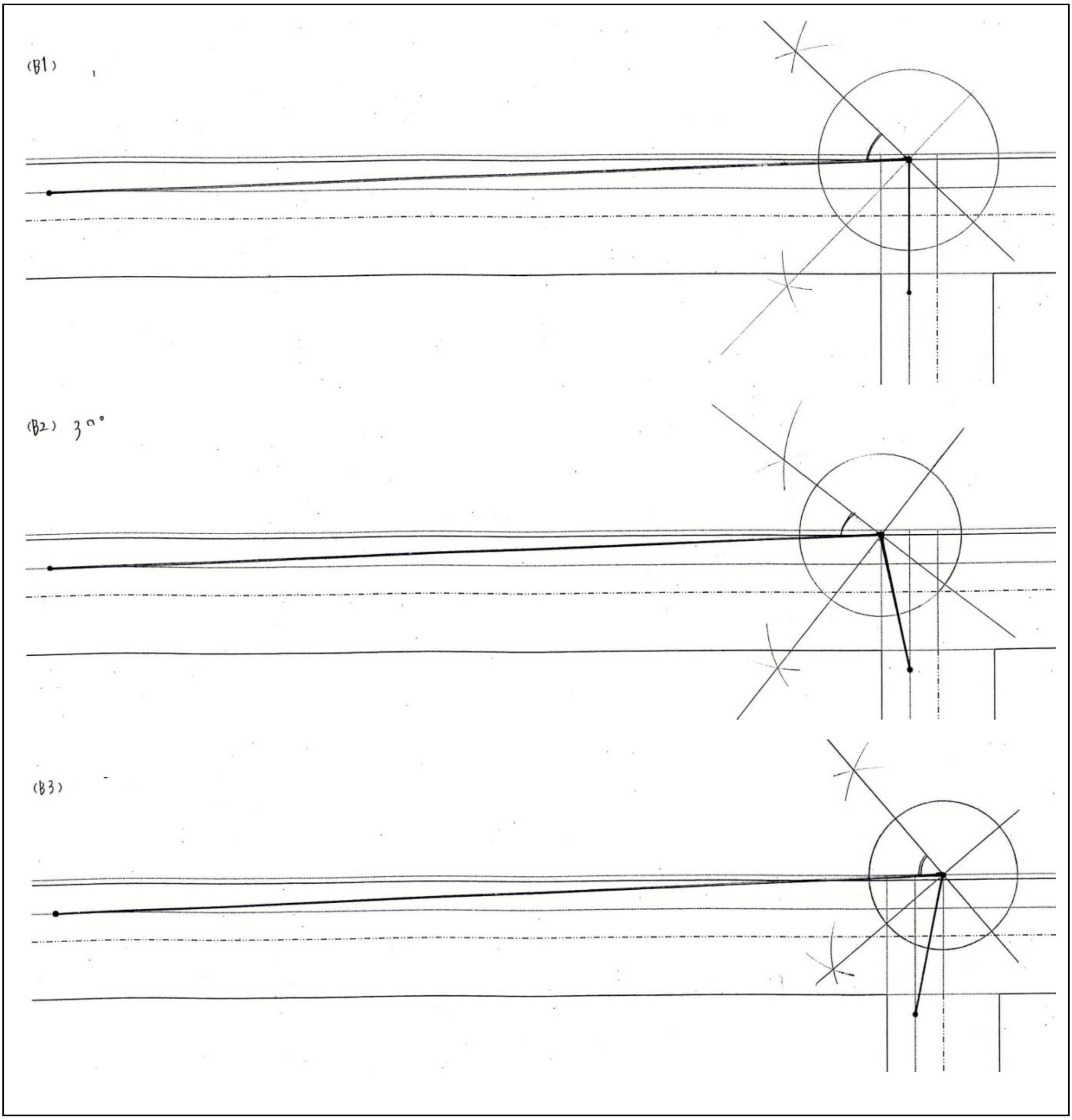


図 3-13：道幅を設定した場面の解決の作図の実際

よってこの場面の問題解決から，⑵の場面での結論は以下のような角度で各地点に道路 B に対してミラーを設置することとなった.

∴B1：44.01°，B2：37.93°，B3：50.09°（※位置については先に定めた通り）

この場面では，まず(1)の場面の仮定をできるだけ維持した状態で解決に臨もうとしていた．しかし，道幅の仮定を設定したことで，まずミラーの設置地点を変えなければならなくなった．(1)の仮定を生かすと，X と Y が通る直線の交点の点 O_1，つまり道路上にミラーの設置地点が設定され，これは現実の実際の場面に照らし合わせると，妥当でないことが明らかである．これは(1)の結論から道路についての仮定を見直し，さらにおき直すことで，新たな数学的な問題場面が作成されたことで発生したものである．さらに X や Y の位置もこれにより変えなければならなくなっている．X の位置は定数と捉え，Y の位置は変数的な要素ではあるが，状況を整理し，計算することで定数として扱える工夫をしている．ゆえに仮定を変え，変数を取り出したり，制御したりすることで問題場面を設定し，思考を進めている．ミラーの位置についても，変数と捉えることで今回の問題解決では 3 通りの位置について考えている．以上のように問題解決のために見直し，おき直した仮定の影響で新たな数学的な問題場面の設定に関して，仮定をさらに見直し，おき直すことが求められるようになっていることが分かる．ここまでの問題解決を(2)とする．

しかし(2)の場面の問題解決を終えて，この場面を見直してみると，Y が点 O_1 より左に 45m の地点ちょうどの位置にいるときは確認できる一方で，Y が少しでも前後にいると，Y が確認できなくなってしまう．なぜならミラーの仮定を見直すと点として見ているため，見える地点も直線との交点となる点 Y のただ 1 点でしか確認できない．危険性を確認するために Y の前後に関しても見えなくては，危険性を少なくすることにはつながらない．ゆえにミラーについての仮定をおき直す必要があることがわかる．(2)の場面をより現実場面の状態に近づけるためにおき直すミラーの仮定を考える．ここではミラーに幅をもたせるように仮定をおき直すこととする．実際の現実事象としては，ミラーを平面鏡として捉えることにしたい．つまり，平面において線分としてみることとする．それを踏まえ，次の場面の問題解決に入っていく．

・ミラーに幅を持たせ，平面鏡として見た場面

(2)までの場面においてミラーをどのように見ていたか振り返ると，点で見てきている．しかし，これではミラーに見える範囲というものが出てこない．ゆえにミラーが平面の幅のあるもの（線分）とみなおして思考を進める．平面鏡には一般的に 60cm，80cm，100cm の大きさがある．今回は 60cm の平面鏡を使用することとする．

まずこの場面で抑えておくべきものは平面における入射と反射の仕組みについてである．(2)の場面まではミラーを点で考えていたため，その点の角の二等分線を基本的に考えることが求められていたが，(3)の場面では平面になるため，この場合の入射と反射の法則についての内容を踏まえ，作図の仕方を確認しておく．この法則は 1 点における入射と反射がなされているとき成り立つと考えられる．ゆえにミラーを線分としてみなすと，この線分上であればどの点でも入射と反射の様子が作図できる．ここで作図すべき点は，ミラーに幅ができたことで，見える範囲が生まれ，視界に幅を持つということが(2)の場面との 1 番の違いである．ゆえに，ミラーを表す線分の両端における 2 点における入射と反射についての作図ができれば，ミラーの反射の線が 2 本引け，これにより幅ができ，どの程度の範囲が確認できるかがわかる．

以上より設定し直したミラーについての仮定を整理すると次の通りである．

・ミラーを上からみたとき 60cm の線分であるとみる
・ミラーが道路にはみ出ないようにおく(道路端より 30cm 上にミラーの中心をおく)
・ミラーに幅ができたことで見える視界と死角ができる

ここから(3)の問題場面の設定に入っていく．道路等の条件は B と同様とする．ここで(2)の場面におけるミラーの位置を考えてみると，この場面ではミラーに幅を持たせたことで，(2)と同じ位置では道路にはみ出てしまい，事故の危険性を少なくするためなのが，逆に大きくしてしまう要因になってしまう．そこでここでは道路の端より 30cm 分上にミラーを置くこととする．ミラーの直径が 60cm より，半径 30cm 分道路より上にミラーの中心をおくこととする．この点を O_3 とする．こうすると，最低限ミラーを道路に直角においたとしてもはみ出すことはあり得なくなる．ゆえにこれを仮定としておく．先の(2)の B1～B3 をそれぞれ 30cm 分上げた位置をそれぞれ C1，C2，C3 とする．以上の問題場面の設定を踏まえ，まずミラーの両端の 2 点に対する入射の線については図 3-14 の通りである．

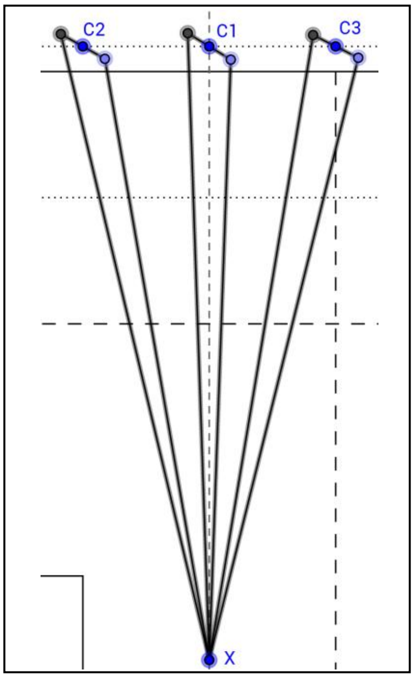


図 3-14：C1，C2，C3 の位置と，それぞれへの入射の線の様子

続いてそれぞれの地点において，反射の線を作図していく．(3)の場面での作図の方法は，まず(2)までの方法でまずミラーの角度を設定し，その後ミラーの両端において反射の線の作図を行うことになる．各地点 C1，C2，C3 において作図するが，C1 を例に整理する．まず点 X と点 C1，点 C1 と点 Y をそれぞれ結ぶ．ここで(2)と同様に∠XC1Y の角の二等分線を引き，それに対して C1 を通るように垂線を作図する．これにより，点 C1 における道路 B に対してミラーを設置する角度が決定する．以下 C2，C3 についても同様である．

続いて各地点でのミラーの両端の反射の線の作図の方法について見ていく．図 3-15 の作図の方法に沿って作図していく．

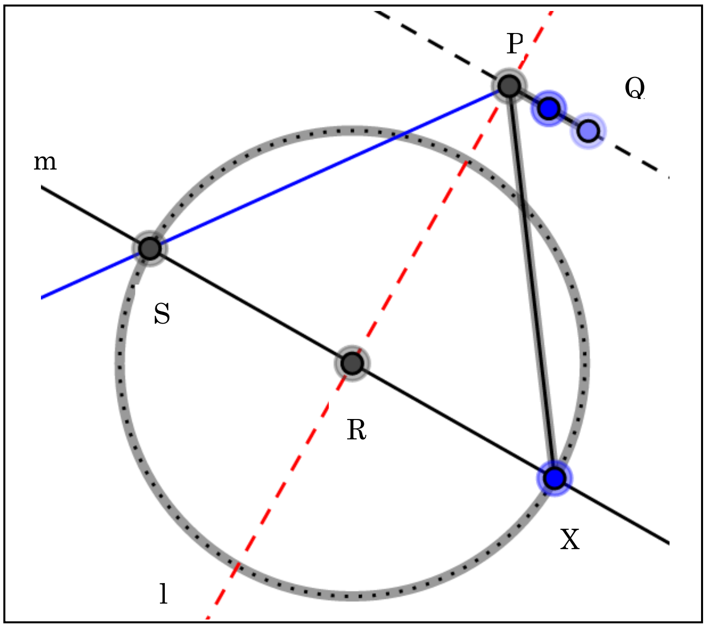


図 3-15 平面鏡における点 P（ミラーの左端）における入射と反射の様子

〈作図の方法〉

①平面ミラーを PQ とする.

②点 X から点 P へ入射するとし，線分で結ぶ.

③点 P におけるミラーに対する垂線 l をひく.

④点 X から垂線 l に対して垂線 m をひき，交点を R とする.

⑤点 R を中心に点 X を通るような円を描き，点 X とは別の垂線 m との交点を S とする（RX＝RS）.

⑥点 P と点 S を結ぶ．これが反射線となる

この作図の方法をもとに，この場面の問題解決を作図して行う．まず C1 について GeoGebra での解決は次の図 3-16 のようになった.

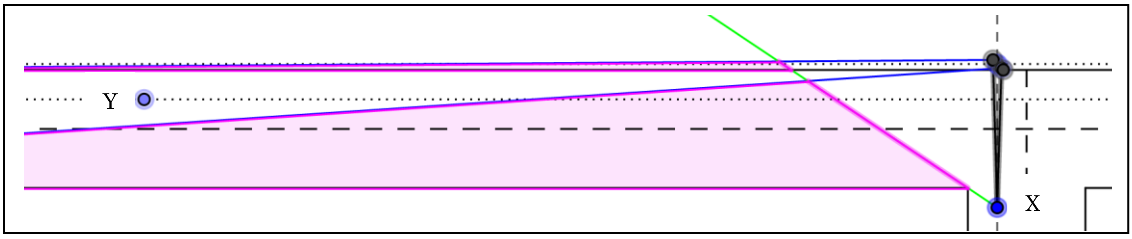


図 3-16：C1 における全体の様子を表した図

続いて実際の作図が図 3-17 のようになった.

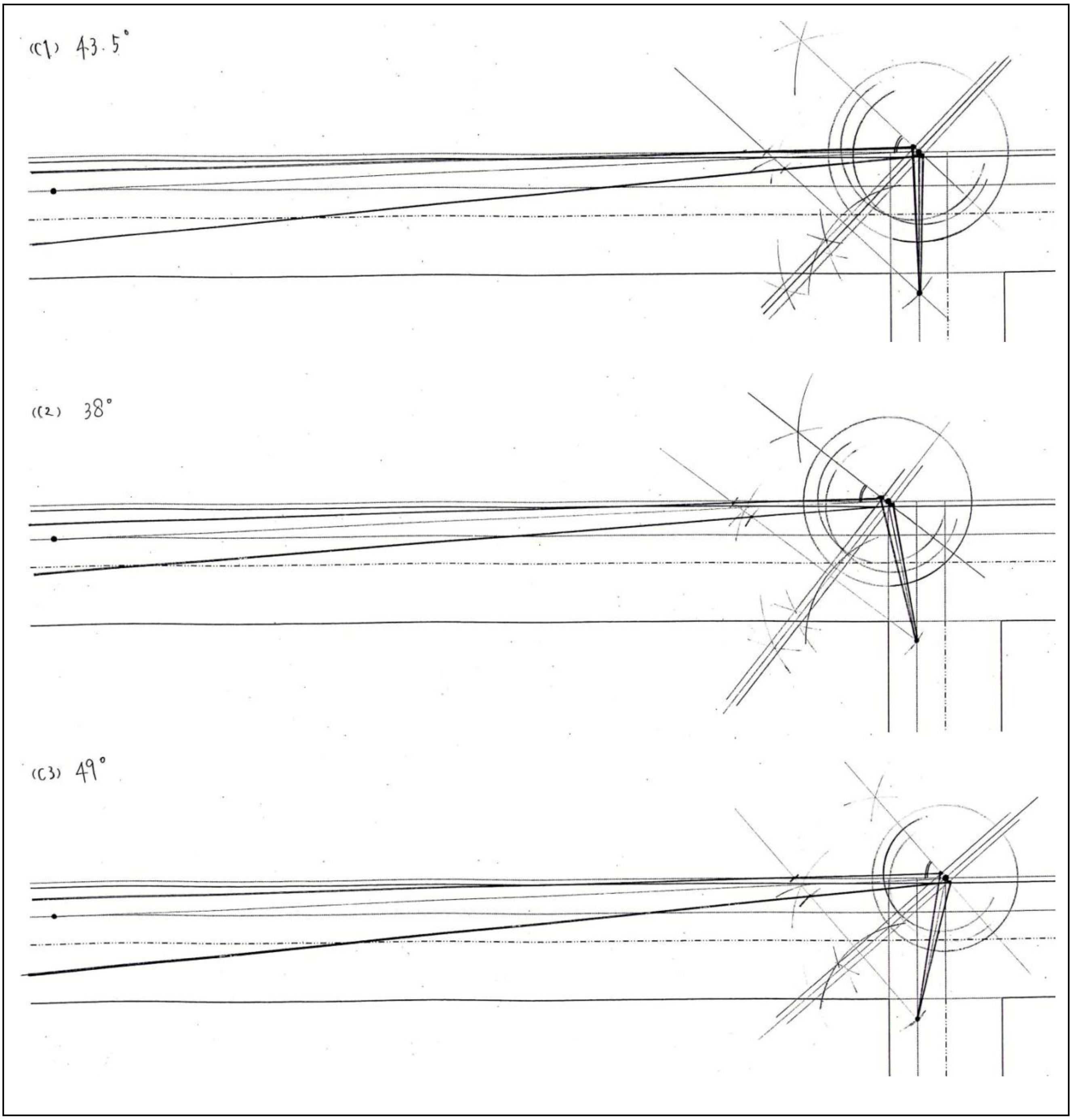


図 3-17：(3)の場面の解決の作図の実際

よってこの場面における問題解決から，結論は以下の通りである．

∴C1：43.77°，C2：37.92°，C3：49.61°（※位置については先に定めた通り）

ここまでを(3)の場面の問題解決とする．ここでの作図を見直すと死角が広すぎると感じた．道路の下の方は歩行者や自転車も通ると考えると無視はできない．実際のミラーを見てみるとはもっと広い範囲を映していることから，まだ見直し，おき直す仮定があると考えた．ここで見直す仮定はミラーが本当

に平面鏡なのかということである．実際のミラーを見てみると，表面が曲がっている，つまり曲面鏡であることがわかる．ゆえにミラーを曲面鏡であると仮定をおき直し，次の場面の問題解決に入っていく．

・ミラーを曲面鏡として見た場面

この場面で仮定を変えるものは再びミラーの形状である．(3)の場面では平面鏡を想定したが，実はミラーは曲面鏡であることが現実場面と照らしてみてわかった．問題解決では平面図で考えているので，ミラーは円の一部，つまり円の弧であると考えられる．そこでこれを仮定としておくことで，まずミラーがどのような円の弧となっているかを調べなくてはならない．これを示す作図の方法が図 3-18 である．

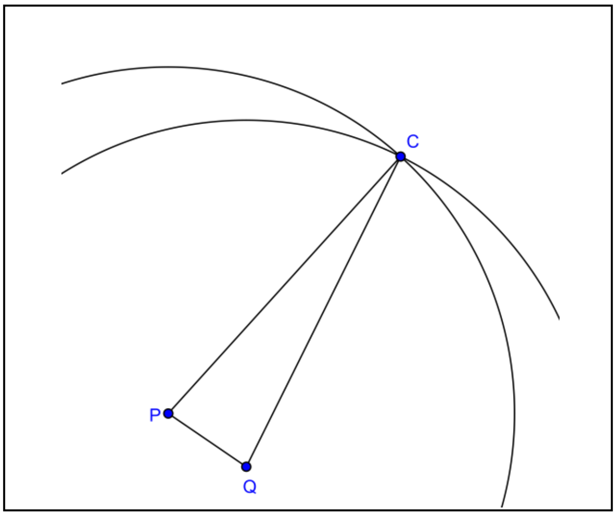


図 3-18：円の中心の作図の方法

〈作図の方法〉

①点 P と Q が円周上にあるものとする．

②点 P，Q をそれぞれを中心とし，既定（ここでは 220cm）の半径の円を描き，交点を円の中心 C とする．

ここで規定の半径がわからなければならないのだが，ミラーを半径 60cm を使ってきている．このミラーの半径の時，曲率半径と呼ばれる，ミラーがどの程度の大きさの円の弧になっているのかを表す数値がある．半径 60cm のとき，曲率半径は 220cm となっている．ゆえにミラーの両端の点より，220cm の半径をとり，さらに線分 PQ の垂直二等分線との交点が円の中心となる．

さらに入射と反射の法則について，曲面上ではどうなるか考えてみる．曲面上でも 1 点で入射と反射が行われているので，法則を使うことができる．反射の線を作図する上で必要なのは対称軸だが，この対称軸は円の中心と円の弧上の 1 点（ここではミラーの両端の点 P，Q）の 2 点を通る直線が対称軸となる．ゆえに円の中心を作図できたことで対称軸が描けるので，反射の線が作図できる．この円弧上の 1 点における接線は，この点における平面鏡と見たときのミラーの線と見ることもできる．

以上を踏まえ，円弧上の 1 点における対称軸と接線，並びにその点における入射と反射の様子を示す作図は図 3-19，20 である．

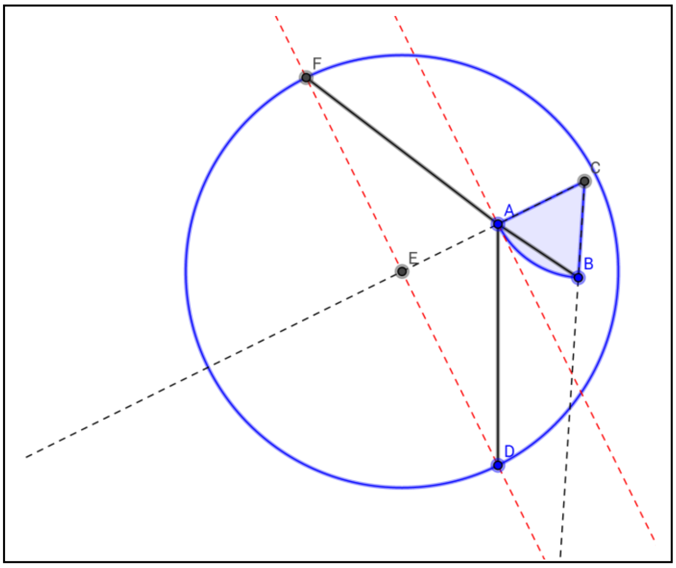


図 3-19 : 円弧上における入射と反射の線の様子の作図

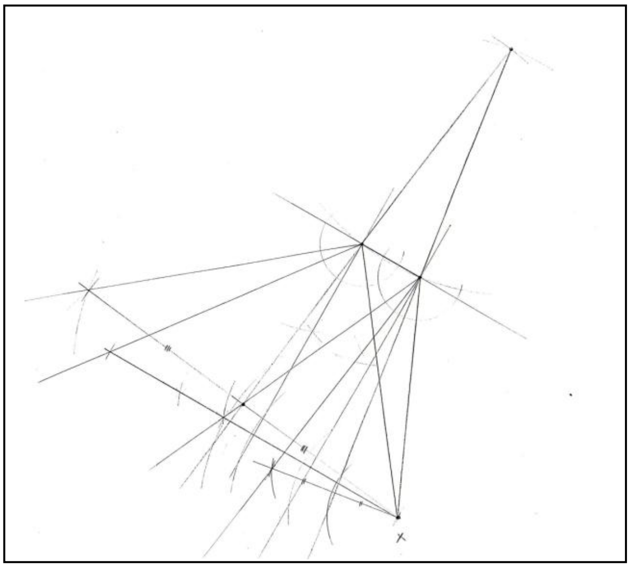


図 3-20 : 入射と反射の線の様子の作図の実際

〈作図の方法〉

①球面 AB に対して点 D から入射するものとする.

②円の中心 C から点 A への半径を延長する. これが入射と反射の対称軸になる.

③点 D から半径の延長線へ垂線を引き, 交点を E とする.

④点 E を中心とし, 点 D を通る円を描く. この円と先の垂線との交点を F とする.

⑤点 A と点 F を線分で結ぶ. これが反射の直線となる.

その中で先の C1, C2, C3 のように 3 つの場面について考えていく. それぞれを(4)の場面では D1, D2, D3 とする. (4)の場面で設定し直した仮定を整理すると以下の通りである.

・ミラーが球面の一部(平面では円の一部)とみる

・曲面半径の導入(220cm)

・死角部分が小さくなるようにする

以上を踏まえ, ミラー付近の様子を作図すると図 3-21 のようになる.

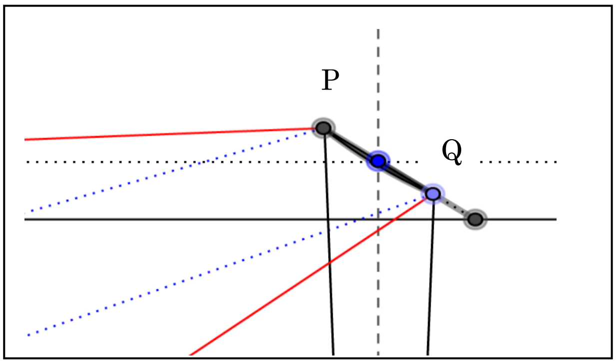


図 3-21 : 曲面鏡における入射と反射の様子（点線は平面鏡の時の反射の線）

ここで(3)の場面と図 3-21 で見比べてみると，明らかにミラーの見える範囲が広くなっていることがわかる．平面と曲面ではこれほどまでの違いが出ることに対して，感覚的な経験ではあったかもしれないが，このように数学的な内容をふまえて確認したことはこれまでなかったと思う．ゆえにこの経験は非常に貴重なものとなると考える．この D1～D3 の実際の作図が図 3-22 である．

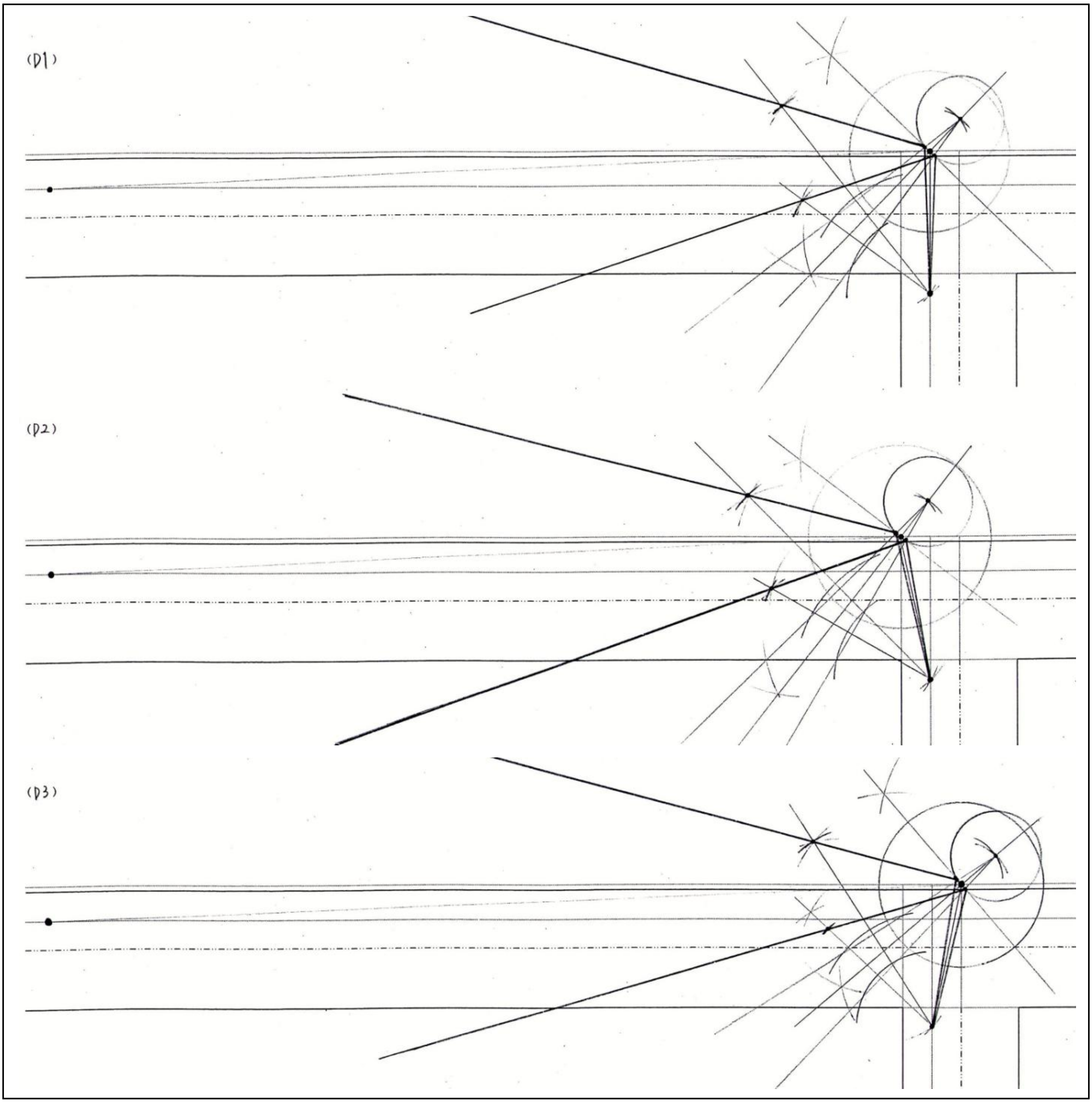


図 3-22：(4)の場面の解決の作図の実際

この作図での角度についての結論は(3)と変わらない．ここで作図について見てみると，反射の線の上側が道路の外側を広く映していることがわかる．この無駄を有効活用するために，X からの死角を考慮してみる．考える視点としては，まず 2 本の反射の線の上側の端に Y が入るようにする．そして道路下の死角の範囲が狭くなるようにミラーの角度を変えてみる．D1～D3 について考え，作図して見ると結果は図 3-23～3-25 のようになる．

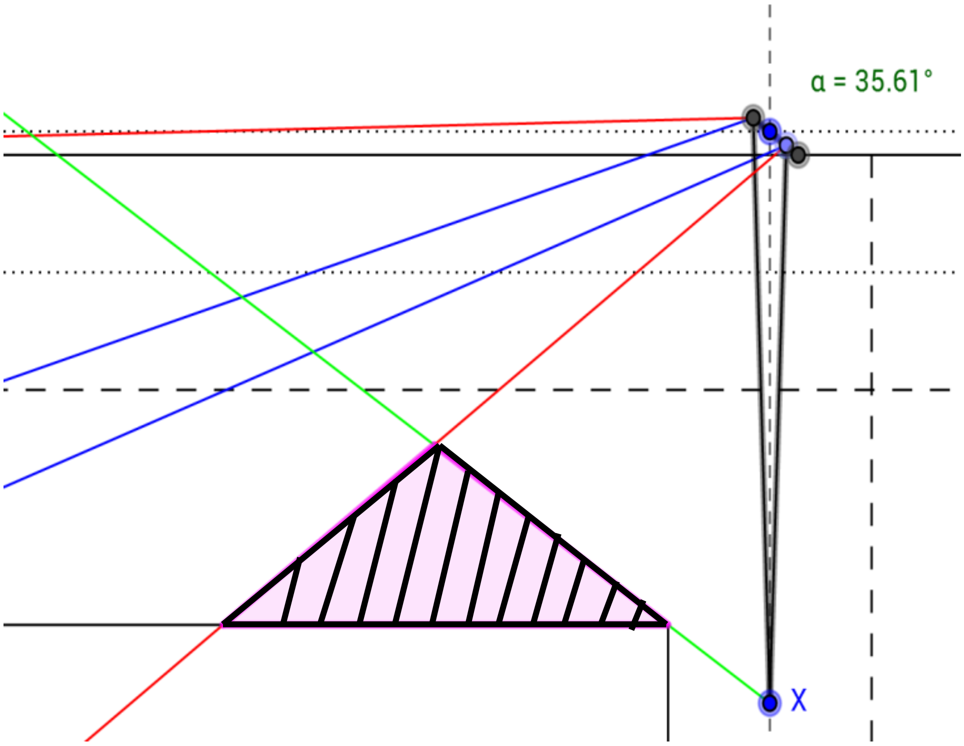


図 3-23：D1 の図

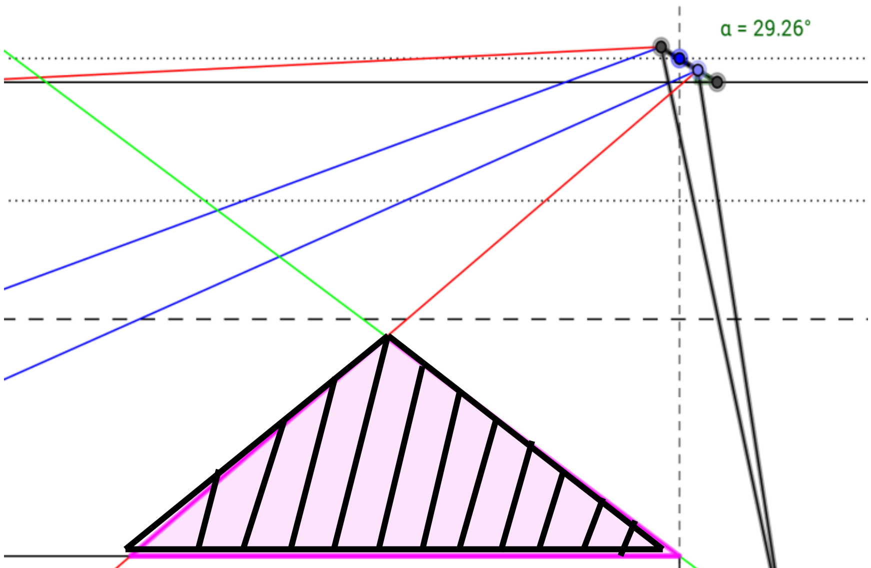


図 3-24：D2 の図

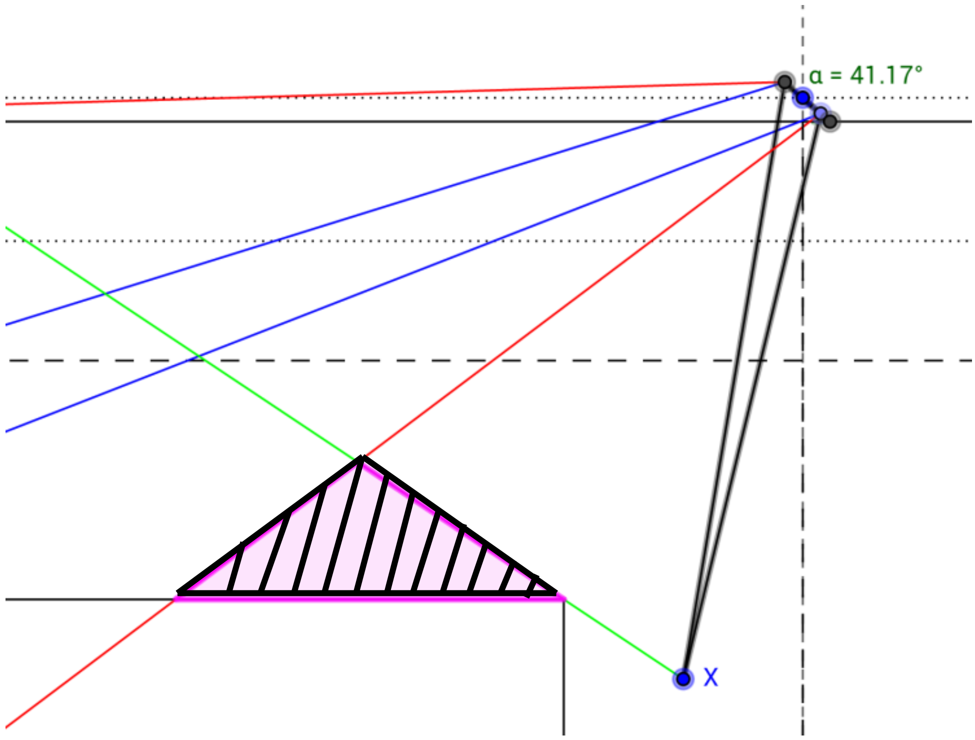


図 3-25：D3 の図

※斜線部分は X からの死角となる部分

ここまでの問題解決を(4)の場面とし，(1)〜(4)の場面の結果は表 3-2 のように整理される．

表 3-2：ここまでの数値的結論の整理

(1)	結果		(2)	結果		(3)	結果		(4)	結果	死角
A	45°		B1	44.01°		C1	43.77°		D1	35.61°	○
			B2	37.93°		C2	37.92°		D2	29.26°	△
			B3	50.09°		C3	49.61°		D3	41.17°	◎

ここまでの問題解決から，今回の解決においては総合的に見て，D3 の条件が望ましいと結論付けることとする．つまり，問題場面では道路 A の中央線の正面で，道路 B の上側の端から 30cm 外側の位置に 41.17°の角度でミラーを設置することで問題解決がなされたとし，結論とする．

また，この後，課題をさらに発展させ，問題解決を進めていく方向性として，さらに仮定を再設定し，問題場面を変えていくことも可能である．例えば交差点の丁字路の 2 つの道路の交わる角度を変えて，Y 字路にしてみることや自転車からの視点を考えてみたり，ミラーの数を増やしたりと，様々な発展も可能となっている．

以上の問題解決の(1)〜(4)の 4 つの場面を整理する．4 つの場面では問題場面並びにミラーの位置や形状についての仮定をおき，さらにおき直しながら問題解決を進めていくこととする．ゆえに 4 つの場面を次のように問題場面を整理する．

(1)道幅を 0 とし，図形的には直線として表し，さらにミラーを図形的に点としてみて表し，道路の交点（この点を O_1 とする）におく．
(2)道路の道幅を 6m とし，ミラーを点としてみて道路の上端におく．
(3)ミラーを直径 60cm の平面鏡としてみて（平面図において図形的にみると線分），道路の上端より直径の半分の 30cm 分外側にミラーをおく．
(4)ミラーを直径 60cm の曲面鏡としてみて（平面図において図形的にみると弧），道路の上端より直径の半分の 30cm 分外側にミラーをおく．

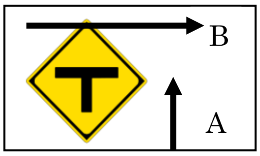
この整理した視点として，まず砂場(2003)の「B．仮設に基づく単純化の過程」の主張をもとに，まず問題場面を単純化し，問題の難易度を下げた状態からスタートした．そして，第 1 章で述べたように，仮定を見直し，おき直すことで徐々に現実場面に即した結論を導き出していくという姿勢をとった．そこから基本的に一つずつ仮定をおき直して場面を進展させていく．この時，おき直した仮定に伴って，さらにこれまで仮定していたものも変更する必要があるものはおき直す．例えば，道幅を設定したことで，X と Y の位置を設定し直している．そして，現実場面に即した数学的モデルでの問題解決を行い，結論を出すことを目指している．

よって，以上のように整理した 4 つの場面をもとに，教材を構成し，整理し，開発につなげていくこととする．

2．開発した教材の整理

前項の内容から，4 つの場面を経た問題解決の流れに沿って開発した教材として，問題解決の過程を整理し，以下の教材「ミラーを設置しよう」を示す．

身近な所には交通の安全面で危険だと思われる場所が数多くある．対応策として道路反射鏡（以下ミラー）を設置することがよいと考えているが，交通安全面での危険性を少なくするために，できるだけ見える範囲が大きくするためにはどのような位置や角度でミラーを設置すればよいか考えてみよう．



(1)車が通過する道路を直線とし，道幅を考えず，交差点を右図のような丁字路を考える．このとき，道路に対してどのような角度でミラーを設置すればよいだろうか．

ここで道路について，下から上への道路を A，左から右への道路を B としておく．自分(以下 X)は車で A から B へ右折する一方で，B の道を左からやってくる車(以下 Y)がある場面を考える．

(2)(1)では道路の道幅を考えていなかった．そこで道幅を 6m（丁字路のどちらの道路も同じ幅とする)）として考えてみよう．また，B へ合流する手前の A における一時停止線を B に入る手前 1m におくこととする．
①(1)の場面と同様に考えると，道路に対してミラーをどのように設置したらよいだろうか.
②X がミラーで Y が来るのを確認するのを，X が B 道路に出る 4 秒前とし，Y は 40km/h で走行するとする．この場合 Y がミラーで見えるとすれば，どの程度離れているところで見えるとよいだろうか.
③①，②を踏まえ，ミラーの設置地点を変えてみて，それぞれの場面で，道路に対してミラーがどのような角度で設置すればよいか考えよう．

(3)現実場面に照らすとミラーには幅がある（一般的に直径 60cm＝0.6m）．このようにミラーの幅を考えるとある範囲が見ることができるのである．
①この場合ミラーで見える範囲はどのようになるだろうか.
②ミラーの設置地点を変えてみて，それぞれの場面で，道路に対してミラーがどのような角度で設置すればよいか考えよう．
③ここまでの状況を考え，ミラーは現実場面ではどのような形状をしているだろうか.

(4)ミラーは球面の一部の形状をしている．つまり平面的にみると円の一部である．
①このことをもとに，まず円周上における反射の仕組みがどのようなものか考えてみよう．
②①をもとに見える範囲がどのようになるか考えてみよう．
③ミラーの位置設定を変えてみて，最終的にどの地点にミラーを設置したらよいだろうか.

筆者が行った問題解決を整理すると以上のようになった．これを踏まえ，次節では「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化との関連を整理していく．

第 2 節「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化と開発した教材の関連

1．本研究で同定した数学的モデル化過程と開発した教材との関連

開発した教材は主に，東京書籍中学 1 年教科書「第 5 章－平面図形　第 2 節－基本の作図」の学習の内容を活用できる．例えば基本作図の垂線，垂直二等分線，角の二等分線を始め，円についての内容のも扱える内容となっている．図形の作図について教科書等で習っているが，これまで実際の現実場面の解決機会があまりなかったのではないかと考える．実際教科書を見ると，現実事象の問題解決に作図を使うような問題は図 3-26 のような問題がある程度であった．

例 3
　左の図は，銅鏡の一部です．もとの銅鏡の形を円とみて，その円を作図しなさい．

図 3-26：作図を用いた現実事象の問題

一方，開発した教材は安全確保のため，効果的にミラーを設置できるかを，現実場面を解決するために仮定をおき，作図を活用して問題解決を図れる教材となっている．また，平面と曲面ではこれほどまでの違いが出ることに対して，経験ではあったかもしれないが，このように数学的な内容をふまえて確認したことはこれまでなかったと思う．ゆえにこの経験は生徒にとって非常に貴重なものとなるはずである．

また本教材では幾何的表現による数学的モデルを考えている．ゆえに図による表現をもとに思考が進められている．そして入射と反射の法則のもとで作図をして問題解決している．これは理科の内容を活用しており，現実事象と数学を関連付けるために，様々な分野の既習の内容を活用して問題解決していることもこの教材の特徴であり，価値あるものであると言えると考える．

このように開発した教材は現実事象を数学的モデル化による問題解決を行ったと言える．さらに問題解決の過程を本研究で同定した数学的モデル化過程に対応させ，整理していく．

まず第 1 章において，本研究では以下に設定する段階を経て，数学的モデル化による問題解決を行うこととしていた．

(1)数学的な問題場面の作成：現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで，数学の問題場面としておきなおす．

(2)数学的モデルの作成：数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで数学的モデルを導く．

(3)数学的作業：数学的手法を用いて数学的結論を得る．

(4)解釈：数学的結論が現実的文脈に照らしてどのような意味を持つのかを理解する．

(5)評価：現実的文脈を考慮した結論を現実場面に照らして評価し，妥当であれば最終的な結論とする．妥当でなければ仮定を見直すとともに，おき直す仮定を考え，問題解決の進展を図る．

まず「①現実場面における問題」があり，それを単純化・理想化し，さらに条件を整理することで，「②数学的な問題場面」ができる．さらにこの場面で近似・仮定の設定をすることで，「③数学的モデル」が完成する．三輪(1983)の述べる定式化がここまでの過程である．これを数学的作業により解決することで，「④数学的結論」を得る．この数学的結論が現実的文脈に照らしてどのような意味を持つのかを解釈し，「⑤現実的文脈を考慮した結論」を出す．これが最終的に現実場面に対して適切か評価することで，問題解決がなされたとする．もし結論が妥当でなければ仮定を見直すとともに，おき直す仮定を考えることで問題解決を進展させる．以上の過程を整理し，本研究の数学的モデル化過程は以下の図 3-27 のように同定した．

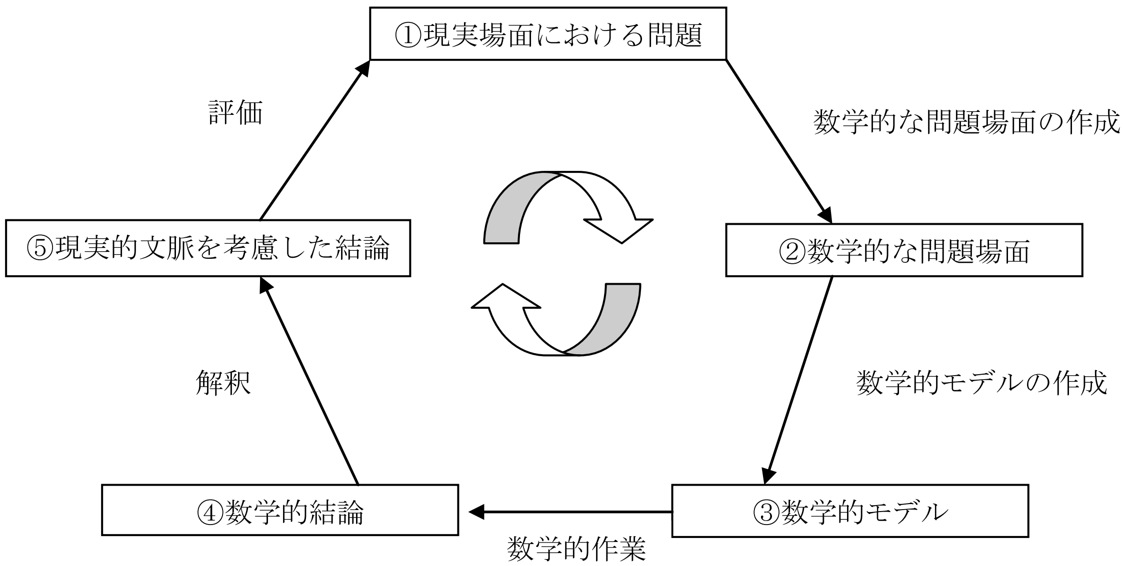
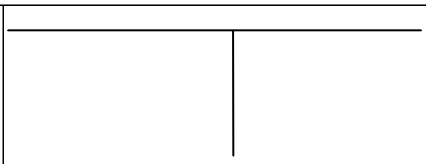
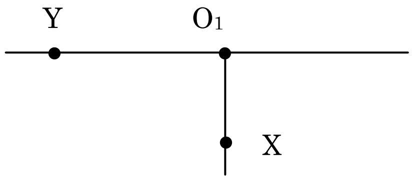


図 3-27：本研究における数学的モデル化過程

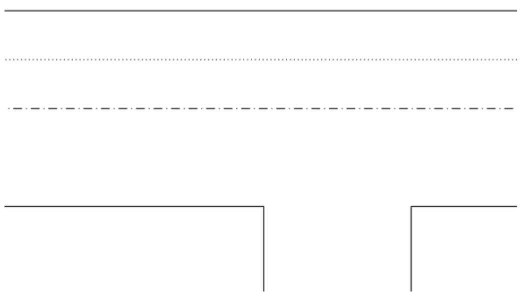
本項では，この本研究における数学的モデル化過程に沿って，今回開発した教材がどのような問題解決をしながら結論にたどりついたかを整理し，開発した教材が数学的モデル化による問題解決がなされた教材であることを明らかにする．(1)～(4)の 4 つの場面ごとに，同定した数学的モデル化過程に対応させて整理していくこととする．整理した内容については以下のようになっている．

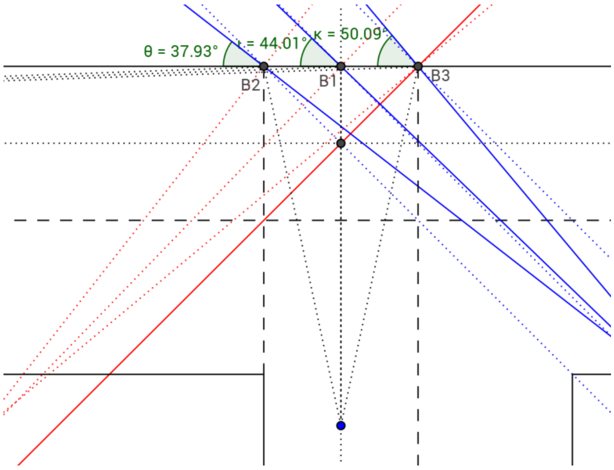
・(1)の場面：最も単純化された場面

数学的モデル化過程	主な問題解決の活動
①現実場面における問題	丁字路（図 3-1～3-4 の現実場面）にミラーを設置するという問題意識をもつ．
↓数学的問題場面の作成	2 つの道路を直線として仮定し，その交点にミラーを点としておく．

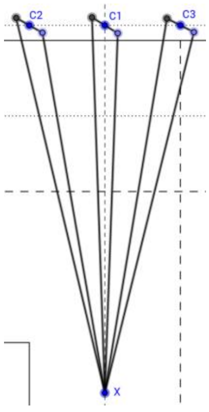
②数学的な問題場面	 上図のような道路を直線と見た場面を考える.
↓数学的モデルの作成	自分の車を X，確認したい車を Y とし，2 つの道路の交点にミラーを点としておくといった，位置に関する仮定をおく.
③数学的モデル	 自分の車を X，確認したい車を Y とし，位置を設定する.
↓数学的作業	$\angle XO_1Y$ の二等分線を引き，これに対する垂線で O_1 を通るように引く.
④数学的結論	道路に対して 45°の角度でミラーを設置する.
↓解釈	直線上にいれば Y を確認できる.
⑤現実的文脈を考慮した結論	道路上にいれば Y を確認できる.
↓評価	道路には道幅があるため, 仮定をおき直して, 問題解決する.

・(2)の場面：道幅を設定した場面

数学的モデル化過程	主な問題解決の活動
①現実場面における問題	道幅について仮定をおき，問題解決を行う.
↓数学的問題場面の作成	道幅を 6m と仮定をおく.
②数学的な問題場面	 上図のような問題場面を考える.
↓数学的モデルの作成	X，Y，ミラーの位置の仮定をおき直す.

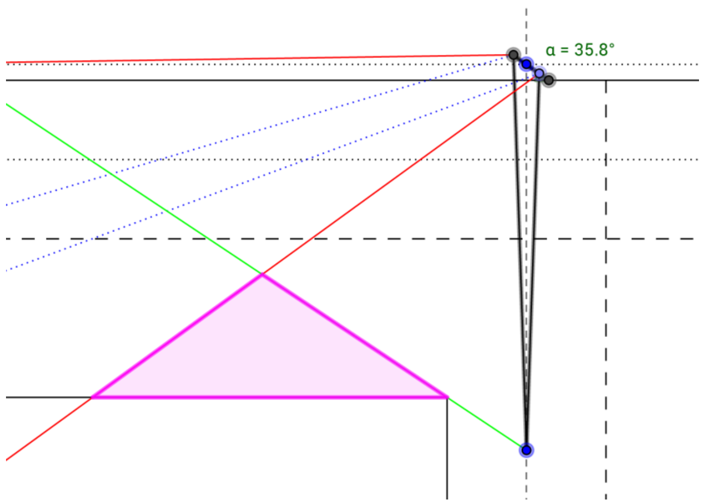
③数学的モデル	 Y の位置を O_1 より左に 45m，X を交差点手前 1m，ミラーを上記の B_1～B_3 の 3 点におくという仮定をおき，それぞれの場合を考えてみる．
↓数学的作業	上図のように 3 点における入射と反射の線を作図する．∠XB_1Y（B_1 は B_2，B_3 におきかえる）の二等分線を引き，これに対する垂線で B_1～B_3 それぞれを通るように引く．上図のように 3 点における入射と反射の線を作図する．
④数学的結論	B_1～B_3 各地点において以下の角度で設置する． ∴B1：44.01°，B2：37.93°，B3：50.09°
↓解釈	B_1～B_3 各地点において上記の角度で設置すれば，Y を確認できる．
⑤現実的文脈を考慮した結論	ミラーで確認しても Y の 1 点のみでしか確認できない．
↓評価	ここまでミラーを点としてみてきたが，ミラーについての仮定を変え，幅を持たせることとする（平面図では線分）．

・(3)の場面：ミラーを平面鏡（平面図的には線分）とした場面

数学的モデル化過程	主な問題解決の活動
①現実場面における問題	ミラーに幅を持たせるように仮定をおき，問題解決を行う．
↓数学的問題場面の作成	ミラーの幅を 60cm と仮定をおく．
②数学的な問題場面	 左図のような問題場面を考える．ミラーの中心の位置は道路端より 30cm 外側に設置する．

↓数学的モデルの作成	ミラーの位置の仮定をおき直す．また，反射の性質についても再考する．今回は幅を持たせたことで，見える範囲に幅ができる．
③数学的モデル	上記の問題場面を想定する．ミラーを上記の C_1～C_3 の 3 点におくという仮定をおき，それぞれの場合を考えてみる．
↓数学的作業	上図のように 3 点における入射と反射の線を作図する．C_1～C_3 のミラーの両端の点におけるミラーに対する垂線つまり対称軸を引き，この対称軸に対して対称になるように反射の線を作図する．
④数学的結論	C_1～C_3 各地点において以下の角度で設置する． ∴C1：43.77°，C2：37.92°，C3：49.61°
↓解釈	C_1～C_3 各地点において上記の角度で設置すれば，Y を中心に前後に幅を持った範囲で確認できる．
⑤現実的文脈を考慮した結論	実際のミラーではもっと広い範囲を見ることができる．
↓評価	ミラーを平面鏡としてみてきたが，ミラーについての仮定を変え，曲面鏡であるとする(平面図では円の弧)．

・(4)の場面：ミラーを曲面鏡（平面図的には円の弧）とした場面

数学的モデル化過程	主な問題解決の活動
①現実場面における問題	ミラーを曲面鏡であると仮定をおき，問題解決を行う．
↓数学的問題場面の作成	ミラーの幅を 60cm と仮定をおく．
②数学的な問題場面	 上図のような問題場面を考える．
↓数学的モデルの作成	ミラーの反射の性質についても再考する．今回は円周上における反射であるため，円の接線等の知識を活用し，見える範囲がより広くなる．
③数学的モデル	上記の問題場面を想定する．ミラーを上記の D_1～D_3 の 3 点におくという仮定をおき，それぞれの場合を考えてみる．

↓数学的作業	上図のように 3 点における入射と反射の線を作図する．D_1～D_3 のミラーの両端の点と円の中心を結んだ直線が対称軸となり，この対称軸に対して対称になるように反射の線を作図する．
④数学的結論	D_1～D_3 各地点において死角も考慮し，以下の角度で設置する． ∴D_1：35.61°，D_2：29.26°，D_3：41.17°
↓解釈	D_1～D_3 各地点において上記の角度で設置すれば，Y を中心に前後により広く幅を持った範囲で確認できる．
⑤現実的文脈を考慮した結論	死角等も考慮し，問題場面としても現実事象に近づいた状態で問題解決ができた．
↓評価	現実事象に対して妥当な結論を導き出せた．

以上のように，本研究で開発した教材は，本研究で同定した数学的モデル化過程に沿った形で問題解決が行えるようになっている．4 つの場面を通じて場面が進展していくごとに数学的モデル化過程がより充実したものになっている．数学的モデルとしてもより現実事象に即した状態へと変わっていき，問題解決自体の質が向上していることから，数学的モデルが洗練され，問題解決が進展している．結論に関しても，その場面ごとに解釈並びに評価を行うことで，振り返りを行い，理解を深めながら思考を進めていくことができている．よって筆者自身もそうであったのだが，生徒も余裕を持って問題解決できるのではないかと感じた．ゆえに本教材は，同定した本研究における数学的モデル化過程の価値を生かした問題解決が可能となる教材となっている．

2.「仮定の意識化」と開発した教材との関連

続いて開発した教材と「仮定の意識化」の関連を見ていく．清野(2006)は「仮定の意識化」の役割として次の 3 点を挙げていた．

1) 解決過程や結果の妥当性を確認する役割
2) 数学的モデルを洗練する役割
3) 問を生成し，数学的モデル化を進展させる役割

本研究では「仮定の意識化」を重視することで果たされる役割の実現のためにすべき行為として，本研究では「問を生成し，仮定を見直し，おき直す」の 3 段階による行為と定めていた．本項では，今回開発した教材の問題解決の過程でいかに仮定を意識化しながら結論にたどりついたかを整理し，開発した教材で「仮定の意識化」が可能であり，これにより，現実事象と数学が関連が意識できる教材であることを明らかにする．(1)～(4)の 4 つの場面ごとに，3 つの役割について整理していくこととする．整理した内容については以下のようになっている．

・(1)の場面

まず 3)の役割で，問題場面をより現実を意識した状態にすることが必要であると，仮定を見直し，おき直す契機を作っている．

続いて 1)の役割として，問題解決後の数学的モデル化過程の解釈の場面において，導き出した結論を踏まえて，解決過程や結果の妥当性を確認しているところであり，(1)は最も単純化された場面であったため，妥当かどうかというより，より具体的な問題場面を意識し，仮定を見直す必要があった．ここでは作図で道路を直線で表したことを見直す．

2)の役割は，(1)では単純化された場面として，道路を道幅 0 の直線としてみていた．ゆえに，この状態から仮定をおき直していくことで，現実場面へと徐々に近づけていくスタートとなっている．また，これだけ単純化された場面だと，次におき直すべき仮定も設定しやすいと考えられる．いずれにせよ，洗練されていく数学的モデルの根本となっているものを意識化させる役割を果たしている．

・(2)の場面

まず 3)の役割で，ここでは Y が見えるのがただ一点のみで，少しでも動いてしまうと確認できないことが作図から明らかになった．ここから Y が動いても確認するためにはどうしたらよいかという問を考え，再び仮定を見直し，おき直す契機を作っている．

続いて 1)の役割は，(1)の場面と同様に，導き出した結論を踏まえて，解決過程や結果の妥当性を確認しているが，まず解決過程については問題ない一方で，結果は妥当ではない．Y がその 1 点にいる時でなければ確認できないからである．ゆえに，ミラーの形状に関する仮定を見直している．

2)の役割は，(2)では道路に道幅ができたことで，X や Y，そしてミラーの位置に関して仮定をおき直していた．しかし，この場面での問題解決で明らかになったのは，Y がその 1 点にいる時でなければ確認できないということであった．これでは，この点を通る瞬間を逃せば，結局確認できず，当初の目的であった事故の危険性の減少にはつながらない．ゆえに，新たにミラーの形状についての仮定をおき直す．ここまではミラーを点としてみていたが，本来は幅があるものである．ゆえに，ミラーに幅を持たせ，平面鏡であると仮定をおき直す．これにより，数学的モデルがさらに洗練されることになる．

・(3)の場面

まず 3)の役割で，実際のミラーはもっと広く見えているのではと問を作ることで，さらに仮定を見直し，おき直す契機を作っている．

続いて 1)の役割は，これまでの場面と同様に，解決過程は問題ないが，結果はまだ妥当ではない．見える範囲ができたが，実際にはもっと広く見えている．ゆえに，さらにミラーの形状について見直している．

2)の役割は, (3)ではこれまでとは異なり, ミラーに幅を持たせたことにより, 見える範囲が生まれた．ゆえに(2)までの場面と比べると，非常に数学的モデルが洗練されていると言える．しかし，実際にはもっと広く見えることからも，さらに数学的モデルを洗練させることが可能であると考えられる．ここでは，再びミラーの形状の仮定に着目する．(3)では平面鏡，平面図としては線分としてみていた．しかし，ミラーを見てみると，表面が滑らかに曲がっていることが分かる．これはミラーの表面が球体の一部であるからである．ゆえにミラーは曲面鏡であることが分かった．平面図としてみると，円の一部，つま

り円の弧であると言える．ゆえに，ミラーを曲面鏡であると仮定をおき直す．これにより，数学的モデルがさらに洗練されることになる．

・(4)の場面

3)の役割でここまで洗練されてきた数学的モデルによる問題解決を踏まえ，問を生成し，数学的モデル化を進展させることはしていない．

1)の役割は，導き出した結論を踏まえて，解決過程については妥当である．さらに結果も現実事象に照らしてみて，妥当であるといえる．X からの死角も考慮されているので，より，具体的な場面に近づいた状態で問題解決がなされたと考えられる．

2)の役割は，ここまで洗練されてきた数学的モデルによる問題解決を踏まえ，ここではさらに数学的モデルを洗練することはしていない．

以上のように，本研究において「仮定の意識化」を重視することにより，数学的モデル化過程との対応を踏まえ，より現実事象と数学を仮定という視点のもとで，より関連付けながら問題解決することができている．3 つの役割が果たす効果のもと，4 つの場面を通じて，仮定を見直し，おき直していくことで，数学的モデルがより洗練され，問題解決自体が非常に進展していることは言うまでもない．さらに，ミラーの特徴として，点，線分，円の弧として仮定を見直し，おき直していくことで，それぞれにおける入射と反射の法則が適用の仕方が変わっていっている．点のときは，その 1 点のみにおける入射と反射なので，Y もその 1 点でしか確認できていないが，ミラーに幅を持たせることで，ミラーの両端の 2 点における入射と反射の作図をすることで，その 2 本の直線の間が見えているということになり，見える範囲が生まれたということになる．さらに，曲面鏡としてみると，円の性質を活用することで，さらに見える範囲が広くすることができる．これも仮定を見直し，おき直したことで，数学的モデルが洗練され，問題解決が進展したことの一つの要因として挙げられる．また，平面鏡と曲面鏡の違いについては，日常生活において感覚的に感じられているかもしれないが，数学による解決で作図したことにより，実感を伴った理解をすることができ，このような経験が積み重なっていくことで，数学観がよりよく変化していくきっかけとなるとも考えられる．

以上のように，「仮定の意識化」を重視することによる効果が多数挙げられた．これは開発した筆者ですら見える範囲の広がり具合に驚きを持ったと同時に，問題解決が充実していたと感じている．このように問を生成し，仮定を見直し，おき直すことで，基本の作図から円に関わる作図まで様々扱えたのもよりよい数学観を持てることにつながると考える．

一方で，先行研究で挙げられている教材と本教材における仮定の設定についての特徴の相違点を述べたい．先行研究として高橋広明(2010)でもミラーを取り扱った教材が研究されている．高橋は「曲面鏡は平面鏡よりどのくらい広く見えるか」という教材を開発している．　この教材の特徴は車のルームミラーを平面鏡と曲面鏡でそれぞれの視界についての作図から実際に違いを実感させている．また，「視角」という言葉で，もし最大の視界を維持するならば視点と鏡の位置関係がどうであるかを考え，曲面鏡がいかに効率よく広い視界を確保できるか実感させている．　平面鏡と曲面鏡の見える視界の違いについては図 3-28 の通りである．

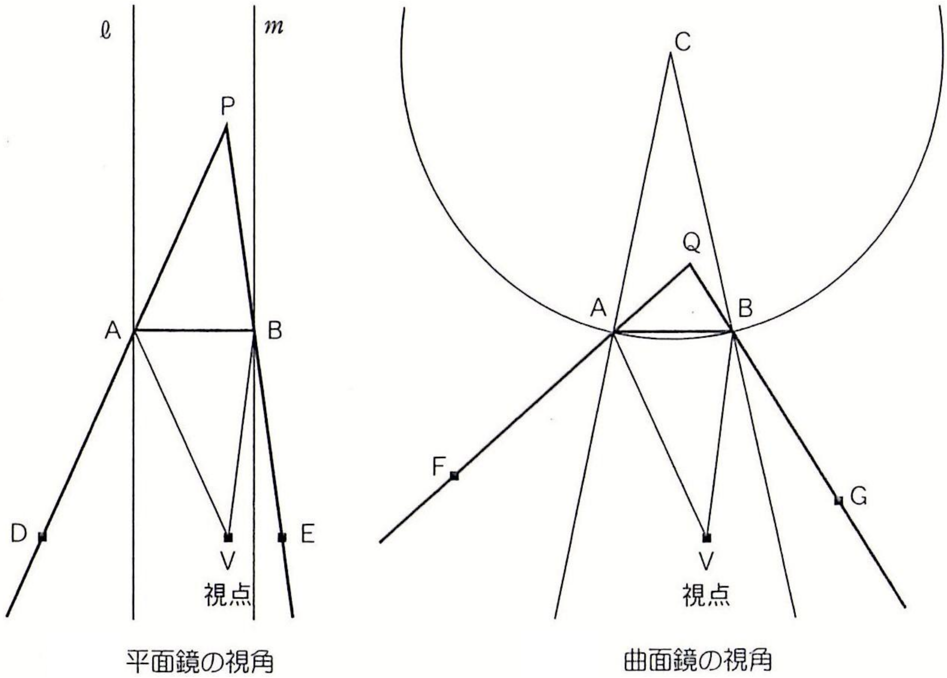


図 3-28：平面鏡と曲面鏡の視角についての図

この教材において，作図を通して「視角」という角度に焦点を当てた考察が進められているが，さらに本研究で開発した教材は，ミラーについての仮定を扱うのはもちろんだが，実際の交差点や道路の様子といった高橋(2010)の教材よりも広い問題場面を考慮することで，ミラーの位置も変数として捉え，「仮定の意識化」により，現実事象と数学の関連をより意識した問題解決ができると考えられる．

意識化させる仮定として，具体的に考えると，長崎(2001)の「算数・数学と社会をつなげる力」や清野(2006)で整理された仮定の特徴を考慮している．長崎(2001)は特に数学的モデル化に対応する「B.社会の問題を数学的に解決する力」に関する仮定が意識化されることが望ましい．B の力は以下の表 3-3 のようになっていた．

表 3-3：算数・数学と社会をつなげる力（一部）

[算数・数学と社会をつなげる力]（一部）
B.社会の問題を数学的に解決する力
B1.社会の現象を数学の対象に変える
B11.仮定をおく　B12.変数を取り出す　B13.変数を制御する　B14.仮説を立てる
B2.対象を数学的に処理する
B21.表・式・グラフ・図等で表現する　B22.操作を実行する
B3.社会に照らして検証する
B31.予測・推測をする　B32.修正する

清野(2006)は三輪(1983)の数学的モデル化過程を基に各段階における仮定を特徴づけていた．その特徴を表 3-4 のように整理していた．

表 3-4：数学的モデル化において設定される仮定の特徴

a.定式化において意識化される仮定
a1.事象の構成要素の特定に関連する仮定
a1.1.関係の薄い細部を無視ないし省略する仮定
a1.2.数値に関する仮定
a1.3.構成要素を単純化・理想化する仮定
a2.構成要素間の関係の設定に関連する仮定
b.数学的処理において意識化される仮定
b1.数学的処理を簡素化するための仮定
b2.数学的処理を遂行するための仮定
c.解釈・評価において意識化される仮定
c1.設定されている構成要素・構成要素間の関係に関連する仮定
c2.構成要素を追加したより良いモデル化に関する仮定
c3.構成要素間の関係のより良いモデル化に関する仮定

ここで，改めて開発した教材における設定した仮定について見ていく．設定した仮定について(1)～(4)の各場面に分けて整理する．設定した仮定として，道路（問題場面）についての仮定，ミラーについての仮定，その他として位置や死角に関する仮定の 3 種類に分けて整理する．さらに，仮定をおく上で，変数または定数として考えた仮定がある．これについても整理しておくこととする．これはこの問題解決におけるもので，違う状況では定数，変数の扱いも変わってくる場合もある．

仮定について(1)から(4)へと問題解決を進展させていくと，仮定についても変化していくものがある．これについては維持しているか，またはどのように変わっていったかを各場面で対応させながら整理している．

以上の内容のもと，具体的な場面における設定した仮定について 4 場面にそれぞれ分けて表 3-5 のように整理してみる．

表 3-5：各場面における設定した仮定の詳細と変化の過程

	(1)	(2)	(3)	(4)
設定した仮定	[道路について] ・道路が直角に交わるものとする(丁字路とする) ・道路を直線とする ・道幅を 0 とする ・直線を車の通過する道路と見る	仮定の維持 ・道路の両端を平行とする ・道幅を 6m とする ・道路と車の通過経路を分離し，再設定する．	仮定の維持	仮定の維持

	[ミラーについて] ・ミラーを点とする ・道路(直線)の交点にミラーをおく	仮定の維持 ・道路上にミラーをおけず，道路の端に平行移動する [その他] ・ミラーで見えてほしい車 Y の位置をおく(45m) ・見える場所はミラーに対して反射した直線上のみで，見えない死角が存在する	・ミラーを上からみたとき 60cm の直線であるとみる ・ミラーが道路にはみ出ないようにおく(道路端より 30cm 上にミラーの中心をおく） 仮定の維持 ・ミラーに幅ができたことで見える視界と死角ができる	・ミラーが球面の一部(平面では円の一部)とみる ・曲面鏡を半径 220cm の円の一部とみる． 仮定の維持 ・死角部分が小さくなるようにする
変数扱いとした仮定	・特になし	・ミラーの位置 ・ミラーの反射軸の角度	変数扱い維持 ・ミラーの角度	変数扱い維持
定数扱いとした仮定	・特になし	・車 X，Y の位置	変数制御の維持	変数制御の維持

この表のように，この教材の問題解決では問を生成し，仮定を見直し，おき直すことで様々な仮定について意識化している．また一度設定した仮定についても問題解決が進展するたびに維持しているものもあれば，変わっていっているものもある．この仮定の再設定についても仮定を意識化することでなされている行為であり重要なものである．ゆえに，この教材は「仮定の意識化」の価値が示せる教材であると言える．

ここまで筆者の「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決の過程を整理してきた．筆者自身この問題解決を通して，現実事象の問題解決の進展や現実事象と数学の関連を感得できた．このような経験を生徒らが感じられるような授業をできれば本研究で掲げている生徒の実態の改善が可能となるのではないだろうか．そこで，ここまでの内容を踏まえた教材の授業化を次節にて進めていくこととする．

第 3 節　開発した数学的モデル化教材の授業での取り扱いと学習理論

1．実践に向けた開発教材の洗練

開発した教材の授業化に向け，数値の妥当性を判断していく必要がある．基本的に生徒が問題解決していける環境を整えなければならないと考える．太田伸也(2008)は「教材開発や教材研究は，素材を数学的に深めたり広がりを考えたりする側面と，どの部分を生徒の活動にするかを見極めるという側面を持つ．この両側面は相互にかかわり合って鋭くなり，このことを通して，数学教育の目的・目標がどのように授業に反映されるかが決まる．」(pp.85-86)と述べている．よって，開発した教材を授業で用いる上でまず，生徒にとって最低限作図が可能な状態で，かつ妥当な問題場面の設定をし，仮定を見直し，おき直していくことで，現実事象と数学の関連を実感でき，問題解決を進めることができる状態を目指す．ゆえに本項では教材化に向けて数値の吟味を行い，実践に向けた開発教材の精錬を行うことを目的とする．

問題場面として教材開発中の問題解決では図 3-11 のような道幅 6m の丁字路を考えており，Y の位置は O_1 から 45m の位置にしていた．これを前項における問題解決でコンパス等を用いて解決する際，問題場面を 1／150 に縮小して問題解決をしていたが，作図が困難で問題解決が容易に進まない状態になってしまっていた．そこで問題場面の再設定を行った．道幅について改めて考えると 6m は広すぎではないかと考えるようになった．ミラーが設置されているような道路の場面を考えると，そこまで広くない道路であることがわかる．具体的に中学校で行う実践のため，図 3-29 のような問題場面を想定してみた．この問題場面はミラーが設置されたばかりの場面なのである．

図 3-29：授業実践を想定した問題場面

今回，図 3-29 のような問題場面から，授業化に向けて，道幅を 4m に再設定することとした．また，一番の問題は Y の位置で，これが遠いために全体の問題場面を縮尺をかけても作図が容易なサイズにならない．これらを踏まえ，生徒が問題解決する作図するワークシートとして A3 用紙に収まるようにした

いと考えた．そこで道幅と Y の位置を再考した．また Y の位置は教材開発中では，Y が走ってきて，それに対してぶつかることなく X が右折するためにどの程度の距離を離れていればぶつかることがないかという思考のもとで考えていた．しかし，現実場面のミラーを見ると，そんなに遠くを写している訳ではない．となると，もっと近くで構わないということになる．ここで Y の状況を改めて考えると，Y が走行していて，X を確認して急ブレーキをかけて止まれる距離を確保できればよいという状況を考えてみる．ここで考えるべき要素として制動距離の考えを導入する．制動距離とは，車がブレーキをかけてから止まるまでに動いてしまう距離のことである．JAF のホームページの情報によると，速度と制動距離には表 3-6 のような関係があるとしている．

表 3-6：速度と制動距離との関係

速度(km/h)	制動距離(m)
40	6
60	14
80	25
100	39
120	56

（http://www.jaf.or.jp/qa/ecosafety/careful/09.htm）

ここで速度については一般的に 40km/h とし，60km/h までは対応できるように考えることとする．すると，制動距離としては 14m 進んで止まるということなので，この分しか離れていなければ，X と Y がちょうど接触してしまうとも考えられる．ゆえに少し余裕を持って 15m 離れていることと考えることにする．

ミラーの大きさも直径 60cm，80cm，100cm の 3 種類がある．授業化に際し，それぞれの大きさで実際に作図してみたり，また，身近にあるミラーを実際に確認してみたことから，最適な大きさを吟味した．今回の授業では 60cm を採用することとした．

ここまでの内容から，A3 用紙で作図を行うためには，1／50 に縮尺をかけると，問題解決で作図が可能な状態になっている．縮尺を踏まえた主な数値的な設定は以下の通りになっている．

・道幅：4m→8cm
・道路の中央線（道路端との距離）：2m→4cm
・車 X，Y が通る道路上の直線(左車線，道路端との距離)：1m→2cm
・ミラーの大きさ（直径）：30cm→0.6cm（線分として表示）
・ミラーを設置する地点（道路 B 上の道路端より 30cm 上）：30cm→0.6cm
・自分 X の地点（道路 B 下の道路端より 1m 下）：1m→2cm
・車 Y の地点（自分 X と車 Y が通る直線の交点を O とし，そこから左へ 45m）：15m→30cm
・曲面鏡の曲率半径を考慮した円の半径：220cm→4.4cm

これらを踏まえた問題場面は以下のようになり，授業で用いるワークシートにおける問題場面として図 3-30 を用いることとする．

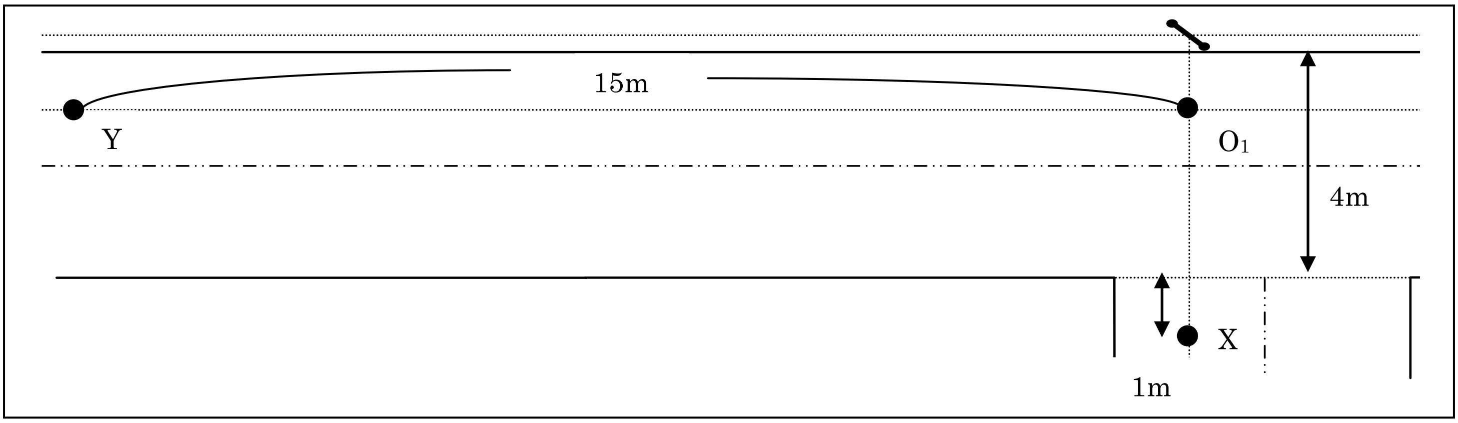


図 3-30：授業で用いる問題場面（※数値は実際の大きさ）

ここまで問題場面の授業に向けた再設定を行ってきた．実際数学的モデル化教材を数多く開発してきた西村(2012)は，「子どもが得る結論が実際とかけ離れていたり，問題場面に対して説得力ある主張ができなかったりする場合は教材化をあきらめなければならない」(p.153)と述べているが，先の教材開発から問題場面の再設定を行ったことで，より現実の問題場面に近づけることができた．特に Y が 45m 離れている点を 15m としたことは，最も実際と離れていた点であった．ゆえに授業化を目指した問題場面の再設定は，より現実事象と「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決を有効に活用できる状況にできたと言える．

最後に現実事象の前提として，道路反射鏡はあくまで死角を間接的に見えるようにしているものであり，最終的には自分自身で今一度確認することが求められるということを抑える．道路反射鏡を設置するのはあくまで事故の危険性を少なくするためであり，設置したからと言って完全に危険性がなくなるということではない．ゆえに間違った解釈を生徒に与えないように教師側でおさえておく．道路反射鏡協会では以下のように述べられている．

「実際の事故事例でもカーブミラーには何も映っていなかったと主張するケースもあり，道路反射鏡が対象物を映し出す範囲には限界があり，映らないから安心とは限らないのです．
道路反射鏡の役割は見通しの悪いカーブや交差点など事故発生の可能性が高い場所に設置され，**通行人やドライバーの死角を間接的に「補足」する働き**なのです．
最終的には，見通しが悪ければドライバーが一時停止し，**自分の目で安全を確認することが必要**となります．」(道路反射鏡協会：http://www.dhk.gr.jp/about_mirror/mirror-characteristic.html　)

ここまで教材の授業化に向けて数値の吟味を行ってきた．この吟味を踏まえ，授業で生徒に提示する問題としては以下の問題を提示することとする．また，授業で活用するワークシート（授業実践を経て最終的に修正したもの）については資料の③に載せておく．

〇今日の課題　『ミラーを設置しよう！』

交通安全面での危険性を少なくするために，ミラーを設置したいと思う．どのような位置，角度で設置すればよいか考えてみよう．また，見える範囲を大きく確保するためにはどうしたよいか考えよう．

(1)ミラーを道路端におくことにする．このとき，ミラーを道路に対してどのような角度で設置すればよいだろうか．※ワークシートの縮尺は1／50とする．

(2)ミラーが幅をもつことにする（※このワークシートではミラーの中心から 0.6cm）．車を表す点 Y が右に 2m（※このワークシートでは4cm）動いたとする．このとき，ミラーでこの車を確認できるかどうか，作図をして調べよう．（D'は道路の端 D より 30cm（※このワークシートでは 0.6cm）外側の線とする）
①どの点における反射の線を作図したらよいか考えよう．
②点 Y から 4cm 右に動いた点 Y'を取り，ミラーで Y'を確認できるか考えよう．

(3)ミラーを円の一部と考え，このミラーを含む円の半径を 220cm（※このワークシートでは4.4cm）とする．車を表す点 Y が右に9m（※このワークシートでは18cm）動いたとする．このとき，ミラーでこの車を確認できるかどうか，作図をして調べよう．
①円の中心を作図して見つけよう．
②ミラーの両端の点における反射の線をかくには，何が必要だったかを考えて作図しよう．
③Y から18cm 右に動いた点 Y"を取り，ミラーで Y"を確認できるか考えよう．

この教材は筆者の問題解決とは少し異なり，ミラーの位置については X の真正面となる点のみしか考えていない．またミラーの角度も(1)で道路 B に対する角度を求め（約 43°），それを(2)，(3)でも維持している．これにより，作図がミラーの両端 P，Q の 2 点における反射の線のみで解決可能となっている．また，各問いの結論として曖昧な結論で終わらないようにしている．具体的に，(2)と(3)においてまず反射の線の作図を行い，その作図後に Y を移動させた後の点，Y'，Y"をとり，これらが反射の線の内部にあればそれぞれ確認でき，なければ確認できない，という具体的な結論を求めることにした．これにより，Y が移動しても見えることから，ミラーの仮定をおき直すことで，問題解決が進展した事を生徒に実感させることを狙いとしている．

またミラーの位置も本来であれば変数として捉えられるものであったが，GeoGebra を用いての解決は時間がかかり，生徒に作図による問題解決の必要観を損ねかねないという理由から，本実践では扱わないこととした．しかし，最後にミラーの位置も変えられるということを触れることで，よりよい数学的モデルを志向する姿勢は持たせて終わるようにする．

以上を踏まえ，この課題を実際に解決してみると次の作図と結果になった．

・(1)について

(1)ミラーを道路端におくことにする。このとき、ミラーを道路に対してどのような角度で設置すればよいだろうか。

※ワークシートの縮尺は1／50とする。

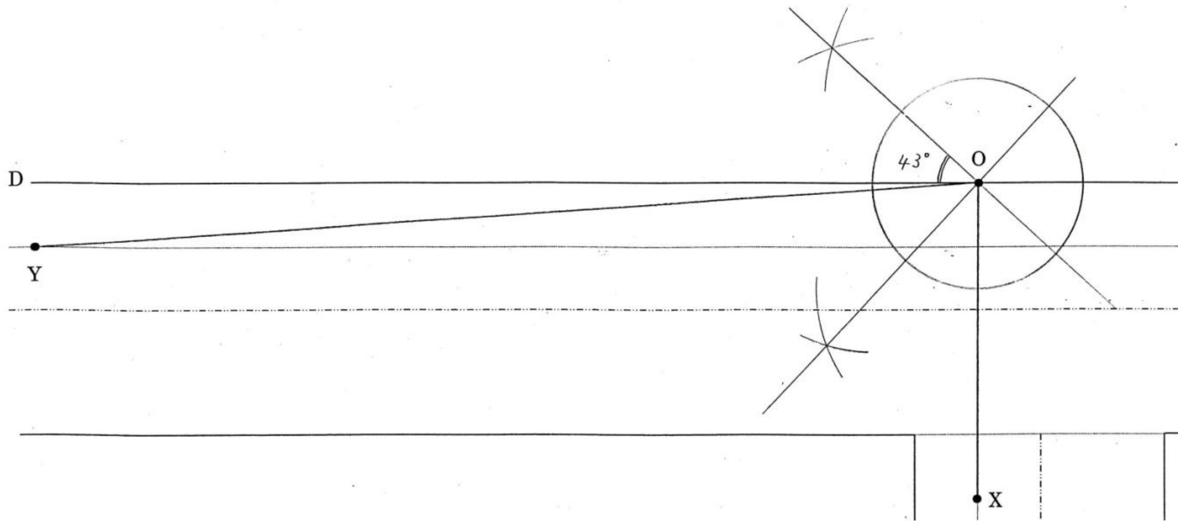


図 3-31：教材化した課題の問題解決(1)

作図からミラー道路 B に対して 43°で設置するという結論を得られた.

(2)ミラーが幅をもつことにする(※このワークシートではミラーの中心から 0.6cm)。車を表す点 Y が右に2m(※このワークシートでは4cm)動いたとする。このとき、ミラーでこの車を確認できるかどうか、作図をして調べよう。(D'は道路の端 D より30cm(※このワークシートでは 0.6cm)外側の線とする)

①どの点における反射の線を作図したらよいか考えよう。

②点 Y から 4cm 右に動いた点 Y'を取り、ミラーで Y'を確認できるか考えよう。

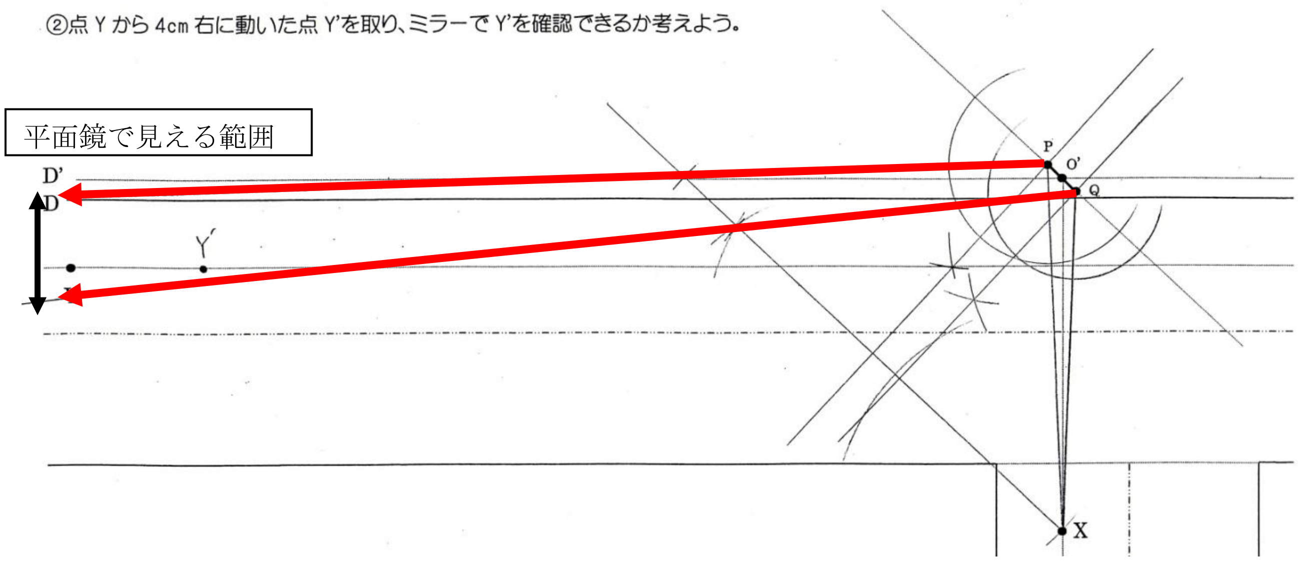


図 3-32：教材化した課題の問題解決(2)

ミラーの両端における反射の線の作図により，ミラーが範囲を持って確認できることが分かった．また移動した Y'がこの範囲内にあることから，結論としては確認できるということもわかった.

・(3)について

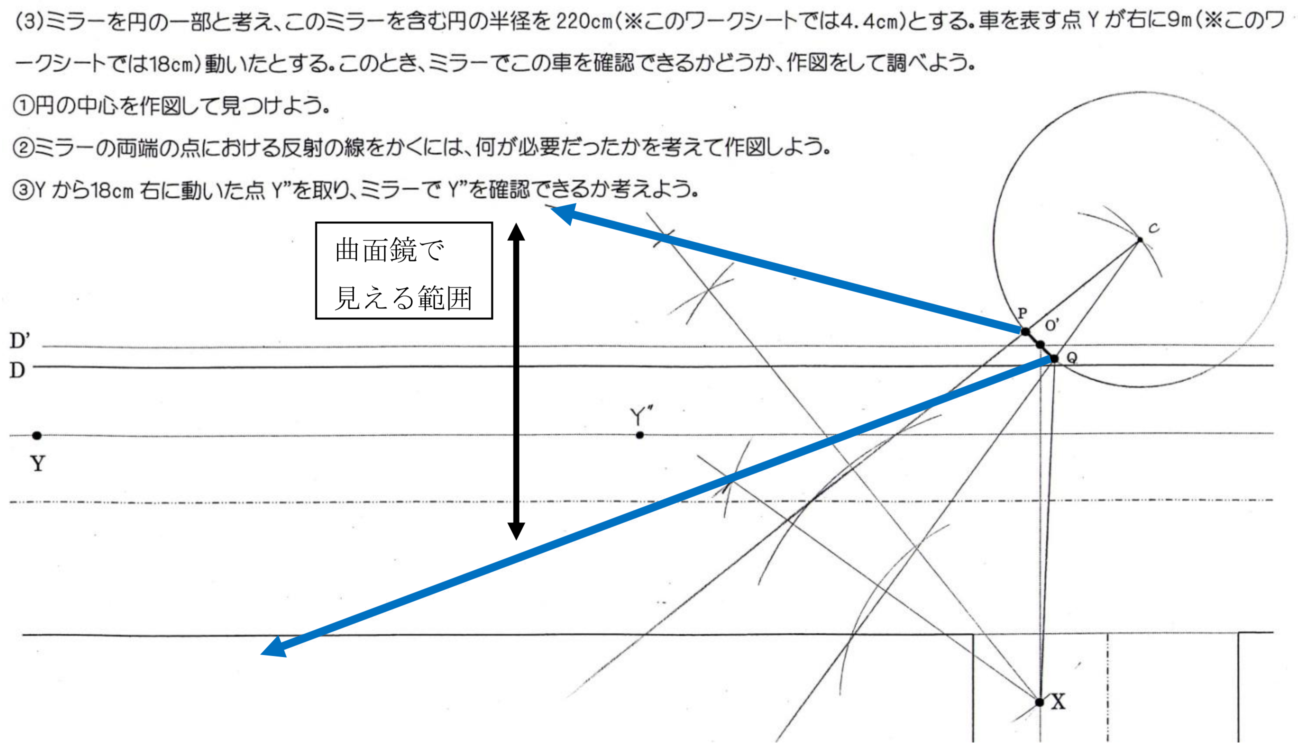


図 3-33：教材化した課題の問題解決(3)

以上のような解決となった．筆者の問題解決のように，最後に曲面鏡の角度を変え，死角を小さくすることは本実践ではしないこととした．その一方で，道路 A の両端の道路 B と交わっている角のてんをそれぞれ R，S とし，これらに対して X から半直線を引くと，X から直接見える範囲がわかり，(3)までの作図の結果と合わせると，Y が最初いた 15m 離れた地点から X の真正面の位置まで移動してきても，この 15m の範囲は確認できるということが明らかになり，事故の危険性を小さくしたと結論付ける．

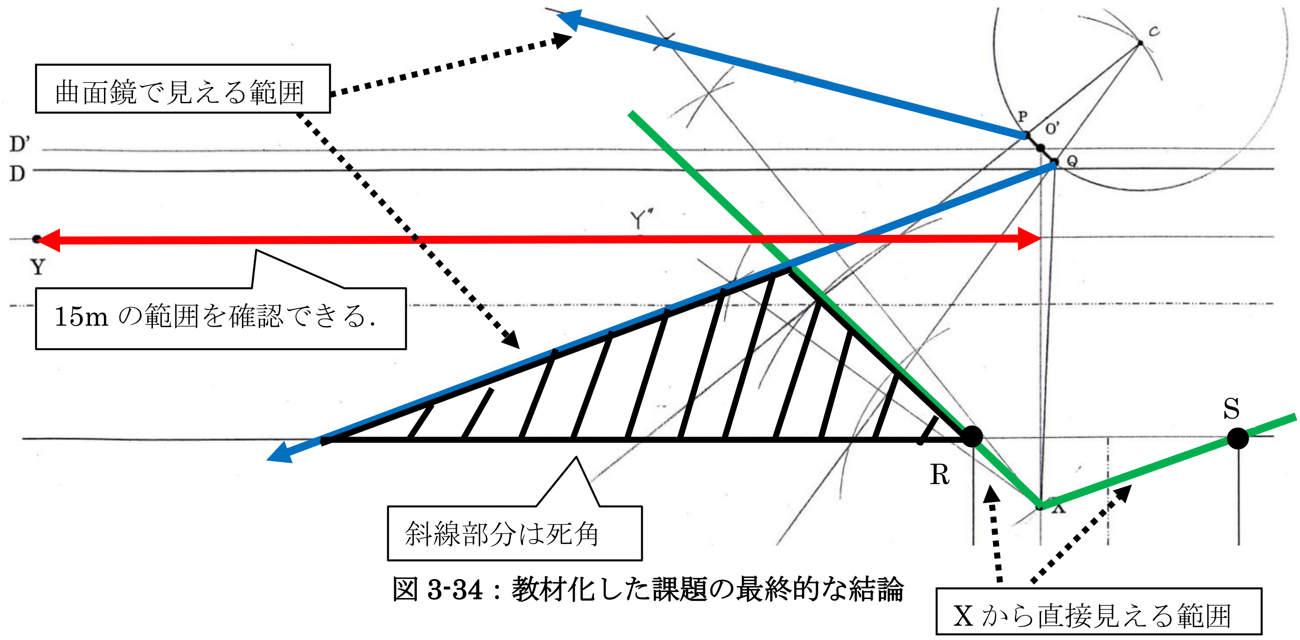


図 3-34：教材化した課題の最終的な結論

2. 先行研究における数学的モデル化教材の学習の展開と評価

本項では開発した教材を授業実践するためにどのような学習理論並びに評価のもとで実践していくべきかを，数学的モデル化教材の実践に関する先行研究を参考に整理をすることで，次項での本実践における授業の展開と評価方法の決定につなげることを目的とする．まず清野(2006)は「仮定の意識化」について「仮定を設定するプロセスを重視するとともに，（暗黙裡に）設定されている仮定を顕在化させ，その仮定の吟味を行うという指導指針である．」(p.184)と述べている．ゆえに本実践でも仮定を意識化させる場面を重視することで，現実事象と数学の関連を意識し，問題解決を進展させることを目指しているため，清野(2006)の数学的モデル化教材の授業実践を参考にすることとする．清野は数学的モデル化過程において設定される仮定の特徴について表 3-7 のように同定していた．

表 3-7：数学的モデル化において設定される仮定の特徴

a.定式化において意識化される仮定
a1.事象の構成要素の特定に関連する仮定
a1.1.関係の薄い細部を無視ないし省略する仮定
a1.2.数値に関する仮定
a1.3.構成要素を単純化・理想化する仮定
a2.構成要素間の関係の設定に関連する仮定
b.数学的処理において意識化される仮定
b1.数学的処理を簡素化するための仮定
b2.数学的処理を遂行するための仮定
c.解釈・評価において意識化される仮定
c1.設定されている構成要素･構成要素間の関係に関連する仮定
c2.構成要素を追加したより良いモデル化に関する仮定
c3.構成要素間の関係のより良いモデル化に関する仮定

清野は「仮定を明確に同定するという活動は，授業の中で，仮定に関する生徒の発言や考えを見過ごさないようにするために必要であるし，また，その発言や考えを特徴付けるために必要となる」と述べている．この仮定の特徴をもとに授業構成の各段階について以下のように述べている．

> 「授業ではまず，現実事象の問題の提示が行われる．現実事象の問題は，様々な要素が複雑に絡み合っているため，事象に対して数学を活用するためには，まず様々な側面の捨象や単純化および理想化を行い，事象の構成要素と特定する必要がある．授業では，この議論から行う（事象の構成要素の特定の段階）．すなわち，表 3-7(※)における「a1.事象の構成要素の特定に関連する仮定」を意識化させ，問題の前提を構成していくのである．その際には，問題を解決するために，どのような構成要素を取り上げるべきかを問うとともに，捨象している構成要素を明確にする（「a1.1.関係の薄い細部を無視ないし省略する仮定」の意識化）．また，取り上げた構成要素のうち，何を変数（変量）とし，何を定数（定量）として考えたものには，数値を与えるのである．（「a1.2.数値に関する仮定」の意識化）．さらに，取り上げた構成要素をどのように理想化・単純

化するのかも議論される（「a1.3.構成要素を単純化・理想化する仮定」の意識化）．こうした議論を通して，構成要素を特定するという行為が現実事象の問題解決にとって，不可欠であることを認識させるのである．」(pp.184-185) (※筆者が本修士論文の表番号に対応させている)

「構成要素が特定された後は，自力解決へと進んでいく．自力解決後，生徒によって，解決に至った解法の発表が行われる．その際,「仮定の意識化」を重視した授業では，解法の選定だけでなく，それらをどのような順序で発表させるのか，すなわち解法の配列に対する十分な吟味が必要となる．生徒たちの解法は，どのような仮定に基づいて問題を解決しているのかが必ずしも明確ではなく，仮定の意識の下に埋没している場合が多い．そのため，仮定が徐々に顕在化されるように，解法を配列し，仮定の意識化を促す必要があるからである．」(p.185)

「発表後は，解法の比較・検討を行う（解法の比較・検討の段階）．その際，どのような仮定を基に，解決を行ったのかを明確にするための議論を行う．この段階は，仮定を吟味することの重要性や現実事象を数学的に解決する方法を教授する良い機会になると考えられるため,「仮定の意識化」を重視した授業では決定的となる．（中略）
議論の際，行うべきことは，生徒の解法を仮定に着目して，整理することである．すなわち，各解法を独立にしておくのではなく，各解法の中では，どのような仮定が設定されているのかを生徒に問い，共通な仮定があれば，その整理を促すのである．整理することによって，仮定がより一層顕在化されるとともに,解法の中に異なる仮定が設定されていることも顕在化される.また,異なる仮定の顕在化は，次の解釈・評価の段階において，どちらの仮定がより現実事象の問題解決にとって，妥当な仮定であるかを議論する源となる．」(pp.185-186)

「授業ではこの後，解釈・評価の段階へと移る（数学的結論の解釈・評価の段階）．すなわち，得られた数学的結論を現実事象と照合し，数学的結論の適合性や妥当性を吟味するのである．その際，設定した仮定（c1.設定されている構成要素・構成要素間の関係に関連する仮定）を再度意識化させ，得られた数学的結論と関連させながら吟味する．現実事象のデータの数学的処理では，誤差が伴うため，得られた数学的結論が現実事象と離れてしまっている場合がある．それゆえ，数学的結論が現実事象と適合しているかどうかといった表面的な判断だけでなく，その背後にある仮定に着目させ，問題解決のプロセスを評価させることが必要である．」(p.186)

「解釈・評価の段階を終えると，次は，より良いモデル化の段階へと移行する（より良いモデル化の段階）．その際，まず単純化，特殊化されている状況は何かを問い，（暗黙裡に）設定されている仮定をできる限り明らかにして，問題解決を支えている前提を明確にする．次に，より現実事象を反映した数学的モデルや一般性のある数学的モデルを作成するために，どのような構成要素を新たに付け加えるべきかを問い，「c2.構成要素を追加したより良いモデル化に関する仮定」や「c3.構成要素間の関係のより良いモデル化に関する仮定」を意識化される．そして，仮定の修正や構成要素の追加によって得られた新たな数学的モデルの吟味を行うのである．」(p.186)

清野(2006)は以上に挙げた授業構成の段階の整理を踏まえ，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導の原理を表 3-8 のように整理した.

表 3-8 :「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導の原理

学習指導の段階	意識化させる仮定
現実事象の問題の提示	
1．事象の構成要素の特定の段階 (1)設定する仮定の意識化 (2)問題の前提の構成	a1.1.関係の薄い細部を無視ないし省略する仮定 a1.2.数値に関する仮定 a1.3.構成要素を単純化・理想化する仮定
自力解決と解法の発表	
2．解法の比較・検討の段階 (1)解法の選定とその配列の吟味 (2)設定した仮定の意識化 (3)仮定の整理	a2.構成要素間の関係の設定に関連する仮定 b1.数学的処理を簡素化するための仮定 b2.数学的処理を遂行するための仮定
3．数学的結論の解釈・評価の段階 (1)数学的結論の適合性や妥当性の吟味 (2)設定した仮定の評価	c1.設定されている構成要素・構成要素間の関係に関連する仮定
4．より良いモデル化の段階 (1)単純化・特殊化されている状況の意識化 (2)仮定の修正と仮定の追加 (3)新たに作成した数学的モデルの吟味	c2.構成要素を追加したより良いモデル化に関する仮定 c3.構成要素間の関係のより良いモデル化に関する仮定

ここで，上の表の学習指導の段階について清野(2006)が詳細に述べた部分(pp.184-186)を以下に示す．そして，その場面ごとに本研究での数学的モデル化過程との対応を考え，本実践においてその段階ではどのように学習を進めていくかを考察する.

・現実事象の問題の提示／事象の構成要素の特定の段階

「授業ではまず，現実事象の問題の提示が行われる．現実事象の問題は，様々な要素が複雑に絡み合っているため，事象に対して数学を活用するためには，まず様々な側面の捨象や単純化および理想化を行い，事象の構成要素と特定する必要がある．授業では，この議論から行う（事象の構成要素の特定の段階)．すなわち，表 3-11（※）における「a1.事象の構成要素の特定に関連する仮定」を意識化させ，問題の前提を構成していくのである．その際には，問題を解決するために，どのような構成要素を取り上げるべきかを問うとともに，捨象している構成要素を明確にする（「a1.1.関係の薄い細部を無視ないし省略する仮定」の意識化)．また，取り上げた構成要素のうち，何を変数（変量）とし，何を定数（定量）として考えたものには，数値を与えるのである．（「a1.2.数値に関する仮定」の意識化)．さらに，取り上げた構成要素をどのように理想化・単純化するのかも議論される（「a1.3.構成要素を単純化・理想化する仮定」の意識化)．こうした議論を通して，構成要素を特定するという行為が現実事象の問題解決にとって，不可欠であることを

認識させるのである.」(p.185)

(※は文献中では違う番号だが，ここではこの論文中の表の番号に対応させた．)

本実践では，学級全体で共通の解法で解決していくので，問題場面の設定を学級全体で進めていく．この定式化の段階で数学的モデルの作成のために必要な要素などを挙げていき，a1 の内容を網羅していく．最初の段階では意識的に扱わなくても，各場面での結論を振り返ったときに暗黙裡におかれた仮定の存在や，定数として扱ったものが実は変数としても考えられることにも触れることで価値を意識化させ，次回の問題解決では仮定としておき直す要素とすることにもつなげていく.

・自力解決と解法の発表

「構成要素が特定された後は，自力解決へと進んでいく．自力解決後，生徒によって，解決に至った解法の発表が行われる．その際,「仮定の意識化」を重視した授業では，解法の選定だけでなく，それらをどのような順序で発表させるのか，すなわち解法の配列に対する十分な吟味が必要となる．生徒たちの解法は，どのような仮定に基づいて問題を解決しているのかが必ずしも明確ではなく，仮定の意識の下に埋没している場合が多い．そのため，仮定が徐々に顕在化されるように，解法を配列し，仮定の意識化を促す必要があるからである.」(p.185)

本教材では基本的に共通の解法の解決のため，発表はどのような方法のもとで解決できたか確認するにとどめることになると考える．ここでは特に仮定について意識化させることはせず，次の段階でまとめて意識化させることとする.

・解法の比較・検討の段階

「発表後は，解法の比較・検討を行う（解法の比較・検討の段階)．その際，どのような仮定を基に，解決を行ったのかを明確にするための議論を行う．この段階は，仮定を吟味することの重要性や現実事象を数学的に解決する方法を教授する良い機会になると考えられるため,「仮定の意識化」を重視した授業では決定的となる.（中略）

議論の際，行うべきことは，生徒の解法を仮定に着目して，整理することである．すなわち，各解法を独立にしておくのではなく，各解法の中では，どのような仮定が設定されているのかを生徒に問い，共通な仮定があれば，その整理を促すのである．整理することによって，仮定がより一層顕在化されるとともに,解法の中に異なる仮定が設定されていることも顕在化される.また,異なる仮定の顕在化は，次の解釈・評価の段階において，どちらの仮定がより現実事象の問題解決にとって，妥当な仮定であるかを議論する源となる.」(pp.185-186，中略は筆者によるもの)

本実践において，解法の比較・検討については 1 つの問題場面で複数の解決方法がでることは基本的にないと考えているため，3 つの問題場面における結論が出たのちに，これらの結論を比較することで，仮定を意識化させることとしたい.

・数学的結論の解釈・評価の段階

「授業ではこの後，解釈・評価の段階へと移る（数学的結論の解釈・評価の段階）．すなわち，得られた数学的結論を現実事象と照合し，数学的結論の適合性や妥当性を吟味するのである．その際，設定した仮定（c1.設定されている構成要素・構成要素間の関係に関連する仮定）を再度意識化させ，得られた数学的結論と関連させながら吟味する．現実事象のデータの数学的処理では，誤差が伴うため，得られた数学的結論が現実事象と離れてしまっている場合がある．それゆえ，数学的結論が現実事象と適合しているかどうかといった表面的な判断だけでなく，その背後にある仮定に着目させ，問題解決のプロセスを評価させることが必要である.」(p.186)

解釈については，導き出した結論が現実場面ではどのような意味をなすのか，考えさせることで日常と数学との関連性がより意識されるようにする．また，評価については現実場面との妥当性・適合性の判断により，次により良いモデル化を目指す上でどのような仮定をおくとよいのかを考える場面とする．つまり，3 つの問題場面における解決で，おいた仮定がどのように変わっていったか，そして導き出した結論にどのように影響したか，各問題場面の解決を終えた後の振り返る場面で確認させ，仮定を意識化させる．本実践では，生徒の実態からあまり仮定を意識化する経験をあまりしてきていないことを想定し，教師側からの発問を通して仮定を意識化させることで経験させ，問題解決が進展していくにつれ，徐々に生徒自らも仮定を意識化できるようにさせていくようにしたい.

・より良いモデル化の段階

「解釈・評価の段階を終えると，次は，より良いモデル化の段階へと移行する（より良いモデル化の段階）．その際，まず単純化，特殊化されている状況は何かを問い，（暗黙裡に）設定されている仮定をできる限り明らかにして，問題解決を支えている前提を明確にする．次に，より現実事象を反映した数学的モデルや一般性のある数学的モデルを作成するために，どのような構成要素を新たに付け加えるべきかを問い，「c2.構成要素を追加したより良いモデル化に関する仮定」や「c3.構成要素間の関係のより良いモデル化に関する仮定」を意識化される．そして，仮定の修正や構成要素の追加によって得られた新たな数学的モデルの吟味を行うのである.」(p.186)

この段階では現実場面を踏まえ，どのような仮定をおき直すことができるのかを考える．本実践での解決の作図と現実場面との対応を踏まえて考えさせたい．本実践では各場面において見直し，おき直す仮定として，作図におけるミラーの形状についての 1 つだけ意識化させることとし，導き出した結論に対して設定した仮定の重要性に気付かせるようにしたい.

以上の学習指導の段階に沿って，清野(2006)は「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導の原理を整理し，授業を実践されていた．本研究も，清野(2006)同様，三輪(1983)の数学的モデル化過程をもとにしているので，仮定を意識化させる上で，基本的にこの学習指導に沿って，授業が展開されることが想定される．その上で，本研究で同定した数学的モデル化過程の特徴を踏まえ，仮定を見直し，おき直すことでより仮定を意識化させられるようにしたい.

次に西村(2012)が整理している数学的モデル化教材の授業の枠組みを見てみる．まず西村(2001)は数学

的モデル化を扱う授業の方針で授業の方法が変わることを次のように述べていた．

「数学的モデル化教材を扱う授業にも，生徒の既習の数学的な概念や手法を適用することに主眼を置く授業と，生徒の未習の数学的な概念や手法を学習しながら問題の解決を図ることに主眼を置く授業があると考えられる．（中略）前者を「適用型」，「後者」，すなわち，数学的モデルの作成や数学的作業の過程で，生徒の未習の数学的な概念や手法を学習しながら問題の解決を図る授業を「概念学習型」と定義する．

特に，適用型において，その主として用いられる概念や手法が，ひとつの単元に限定される場合を「限定」，複数の単元の内容を総合的に適用することが求められる場合を，「総合」と呼ぶことにする．（中略）

さらに，適用型，概念学習型以外に，数学的モデル化過程を踏むための諸能力の育成をねらいとした授業が構想できる．（中略）「数学的モデル化能力育成型」とする．」(pp.5-6，中略は引用者)

これらを西村(2001)は表 3-9 のように数学的モデル化教材の授業の枠組みとして整理している．

表 3-9：数学的モデル化教材の授業の枠組み

a)　適用型：既習の数学的な概念や手法を適用する． a-1　限定：主として適用する数学的な概念や手法が，ひとつの単元の内容に限定される． a-2　総合：複数の単元の内容を総合的に適用する． b)　概念学習型：数学的モデル化の作成や数学的作業の過程で．生徒の未習の数学的な概念や手法を学習する． c)　数学的モデル化能力育成型：数学的モデル化過程を踏むための諸能力の育成を図る．

ここで数学的モデル化教材の授業方針の整理を行う．まず西村(2001)は数学的モデル化を扱う授業の方針で授業の方法が変わることを次のように述べている．

「数学的モデル化教材を扱う授業にも，生徒の既習の数学的な概念や手法を適用することに主眼を置く授業と，生徒の未習の数学的な概念や手法を学習しながら問題の解決を図ることに主眼を置く授業があると考えられる．（中略）前者を「適用型」，「後者」，すなわち，数学的モデルの作成や数学的作業の過程で，生徒の未習の数学的な概念や手法を学習しながら問題の解決を図る授業を「概念学習型」と定義する．」(pp.5-6)

また，その理論が，西村(2012)は基本的に概念学習型と適用型の 2 つに凝縮しており，これらの方法を用いる際の数学的処理の状況を次のように着目していた．

a)身につけている数学を，解決の「道具」として使って解決する
b)身につけている数学を使って，新たな「道具」を作って解決する　　(p.186)

とある．これらの状況を作りながら数学的モデルを作り，解決へ向けて思考していくことが重要である．
　また西村(2012)は授業展開として，「数学的モデル化過程が始動する状況と数学的処理の状況の組み合わせ，すなわち，仮定重視型・検証重視型・全過程型のいずれかと，適用型・概念学習型のどちらか一方との組み合わせによって決まる．それは，過程重視・適用型，仮定重視・概念学習型，検証重視・適用型，検証重視・概念学習型，全過程・適用型，全過程・概念学習型の 6 つである．」(p.187)としている．本研究は適用型の教材であるため，まず 3 通りの方法を挙げ，本教材の思考の進展に合う展開を参考にする．

①全過程・適用型の授業展開の概要
1)問題を提示し，問題場面の理解を図る．
2)個別またはグループで問題を翻訳し，解決の計画を立てる．適宜，それを発表する．
3)2)をふまえ，個別またはグループで，定式化する．
4)個別またはグループで数学的モデルを作成し，数学的処理をする．必要に応じて，問題の翻訳や定式化に戻る．
5)結論をまとめる．
6)数学的モデルや結論を発表したり，検証したり，必要に応じて修正する．
7)自分や友達の解決過程を振り返る．
　4)は，次元 1 の各相に行きつ戻りつしながら問題解決が進展することを前提としている．また，教材開発の段階で，多様な数学的モデルが考えられるようにすることにより，6)では，いくつかの数学的モデルを比較することが可能になっている．これをもとに 2)～6)を繰り返すこともある．

②仮定重視・適用型の授業展開の概要
①の 2)，3)が次のようになる．
2)解決したい状況に対して，示されている「問題の翻訳」や「定式化」でよいかを検討する．
3)必要に応じて「問題の翻訳」や「定式化」を修正する．適宜，それを発表する．
　6)では，数学期モデルやはじめに示されていた他者の「問題の翻訳」や「定式化」と比較する．

③検証重視・適用型の授業展開の概要
①の 2)，3)が次のようになる．
2)示されている数学的モデルや結論が，どのような「問題の翻訳」や「定式化」に基づいているかや，それが妥当か等を検証する．
3)必要に応じて「問題の翻訳」や「定式化」を修正する．適宜，それを発表する．
　6)では，はじめに示されていた他者の数学的モデルや結論と比較する．　　(pp.188-189)

　西村(2012)の授業展開を参考にすると，既習の内容を活用して問題解決するということを目指す教材の

ため，基本的に①の流れに沿いたい．しかし②と③の要素も取り入れた形がいいと考える．①から見て②と③の変更点は「仮定の意識化」の役割を考えると考慮したい観点ではあるからである．場面を進展させるにつれてよりよい仮定をおく上で，数学的モデル化過程のもとで考えながら生徒にも思考していくことを求めていく必要がある．また，適宜発表させるともあるが，生徒の様子を見ながら，状況の整理という面でも考えながら進めていく必要があると考える．

基本的にこの流れは本研究における数学的モデル化過程と対応しているので，西村の見解を参考にしながら指導案の学習の流れを考えていくことにする．

続いて数学的モデル化教材の評価の整理を行う．まず西村(2012)は「数学的モデル化を遂行する力」を以下の 4 つの次元にて規定してあった．

次元 1　数学的モデル化過程
次元 2　数学的モデル化能力
次元 3　批判的サイクル
次元 4　数学的モデル化に関する意識・態度　(p.85)

本研究では「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の開発を目指すことから，西村(2012)の 4 つの次元で言うと次元 1 と次元 2 を参考に数学的モデル化教材の評価を定めていくこととしたい．

次元 1 については先に定めた本研究における数学的モデル化過程を用いることとする．次元 2 について西村(2012)は長崎(2001)が述べている「算数・数学と社会をつなげる力」を参考にしていた．ここではその中で B の「社会の問題を数学的に解決する力」を表 3-10 に示しておく．

表 3-10 :「算数・数学と社会をつなげる力」(一部)

B. 社会の問題を数学的に解決する力
B1. 社会の現象を数学の対象に変える
B11. 仮定をおく　B12. 変数を取り出す　B13. 変数を制御する　B14. 仮説を立てる
B2. 対象を数学的に処理する
B21. 表・式・グラフ・図等で表現する　B22. 操作を実行する
B3. 社会に照らして検証する
B31. 予測・推測をする　B32. 修正する

この中で，西村(2012)は「仮説を立てる」，「仮定をおく」，「修正する」の 3 点について評価のレベル設定について以下のような例を出している．(pp.192-193)

●仮説を立てる

レベル 3 : さまざまな問題場面において，根拠をもって明示的に仮説を立てることができる．また，他者の立てた仮説を，非明示的な場合も認識することができる．

レベル 2 : さまざまな問題場面において，非明示的や無意識的な場合もあるが，仮説を立てることができる．また，他者の立てた明示的な仮説を認識することができる．

レベル 1：見慣れた問題場面においては仮説を立てることができる.

●仮定をおく

レベル 3：いろいろな種類の仮定がある事を理解し，様々な問題場面において，仮定を明示的に置くことができる．また，暗黙裏におかれている仮定を認識することができる.

レベル 2：さまざまな問題場面において，非明示的や無意識的な場合もあるが，仮定をおくことができる.

レベル 1：見慣れた問題場面においては仮定をおくことができる.

●修正する

レベル 3：予測・推測した結果と現実場面との相違の原因を特定し，必要に応じて，仮説や仮定を適切に修正することができる．また，条件の変化に応じて，数学的モデルを適切に修正することができる.

レベル 2：予測・推測した結果を現実に照らして検証し，必要に応じて仮設や仮定を修正することができる.

レベル 1：予測・推測した結果を現実に照らして検証することができる.

※数学的モデル化を遂行する力は構成要素同士が互いに関係しながら発揮されるので，構成要素ごとにあまり細かなレベルを設けても，目標を考える目安にならないと考え，レベル 0〜レベル 3 の 4 段階(レベル 0 はレベル 1 に達していない状況)とした．また，次元 2 の構成要素の小項目段階(「定性的で，ないものとする，仮定をおく」「量的で，依存関係にある変数を取り出す」等)のレベルは，中項目段階のレベルをもとにして考えることができるので，中項目段階のレベルを示した.

この評価のレベルの整理を踏まえ, 西村(2012)は自身の教材で「車のサイドミラー」を例に挙げている.

はるかさんの家の近くを，右の写真のようなバスが運行されている．バスと自転車の事故があったことを知ったはるかさんは，大きなサイドミラーに付け替えるよう，バス会社に訴えたいと考えた. その効果を図や数値で示し, バス会社を説得するための提案資料を作ろう.

リムジンバスが自転車と衝突…死角に入った？

2005 年 3 月 3 日

2 月 27 日，東京都立川市内の交差点で，空港リムジンバスが，7 歳の男児が乗った自転車と衝突．男児は全身を強く打って死亡した．警察ではバス運転手を業務上過失傷害の現行犯で逮捕している.

警視庁・立川署によると，事故が起きたのは 2 月 27 日の午後 2 時ごろ．立川市高松町 3 丁目付近の市道交差点で，立川バスが運行する空港リムジンバス(立川発，成田空港行き)が交差点を右折しようとした際，前方の横断歩道を自転車で渡っていた 7 歳の男児を巻き込んだ.

(中略)

警察では男児の自転車が運転席から死角に入っていた可能性もあるとして，同型車両を使った検分も行う方針だ.

写真

(※実際は提示)

解決例として図 3-35 を提示している．

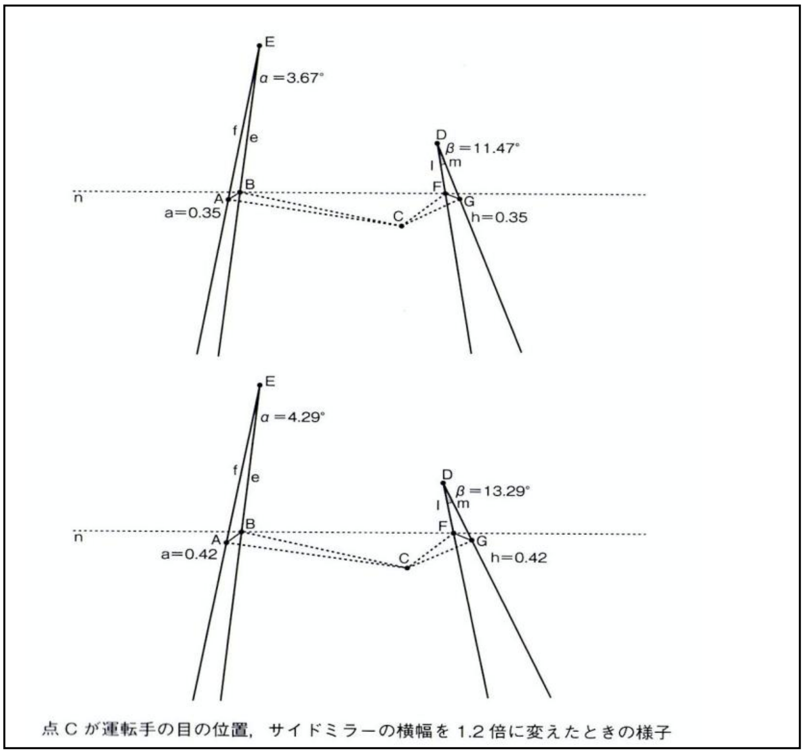


図 3-35：課題「車のサイドミラー」の解答例

この教材は様々な仮定を立て，図示することで問題解決されている．例えば，次元 2 の「算数・数学と社会をつなげる力」の B1 に着目し，その解決に際して行った行為について，3 つの例を挙げ，評価のレベル設定に対応させて整理されている．

●大きいサイドミラーに変えたときの効果を図や数値を示す問題として翻訳する
：仮説を立てる→レベル 3
●見える範囲に関わる仮定をおく(鏡の種類，サイドミラーの大きさや設置位置，バスの大きさ，運転手の目の位置等)
：仮定をおく→レベル 2
●見える範囲に関わる変数を取り出し，それらを制御する(サイドミラーの向き，サイドミラーの大きさの変化のさせ方等)
：変数を取り出す，変数を制御する→ともにレベル 2

解決において必要な構成要素のレベルが，子どもの現在のレベルより 2 つ以上上である場合は，教材を修正することも考える必要がある．例えば，この問題では仮説を立てるにはレベル 3 必要だが，対象の子どもの多くはレベル 1 だとする．このときは，「その効果を図や数値で示し，バス会社を説得するための提案資料を作ろう．」の部分を次のように修正する．
「はるかさんは，サイドミラーで見える範囲を角度で示した「視角」で示し，その効果をバス会社

に訴えようと考えた．そのための必要な提案資料を作ろう．」
　このことにより，レベル 2 の「他者の立てた明示的な仮説を認識する」ことで解決できる問題になる．なお，上述の問題は，大きいサイドミラーに変えたときの効果を図や数値で示すという問題の翻訳の部分や，サイドミラーの種類，バスの大きさ，サイドミラーと運転手の目の位置の関係に関する仮定は与えてあった．子どもの既有の構成要素のレベルに応じて，同様の修正をすることもある．

(pp.193-195)

西村(2012)は数学的モデル化を遂行する力を質的に高めることを目指すならば,その評価も質的に行う必要があると述べている．西村の研究では次の評価資料を考えていた．(p.199)

1)　授業中の観察やワークシートの記述
2)　授業で扱った問題について，さらに解決を進めさせたレポート
3)　授業で扱った問題と発揮される数学的モデル化を遂行する力がほぼ同様な問題の解決過程

西村(2012)によると 1)は主に，授業中の解決過程での，数学的モデル化を遂行する力の発揮の様相を評価する．2)，3)は主に，手立てにより高められた力を授業後に用いることができるようになっているかを評価する．西村(2012)は評価の仕方として，可能な限り次元 1 の相ごとに，次元 2 の構成要素を中心に，数学的もせるかを遂行する力のレベルや授業目標をふまえて作成するとしている．西村(2012)はルーブリック（評価基準表）を用いている．可能な限り次元 1 の相ごとに作成するのは，そのことにより次元 1 に関する評価を同時に行うことができるからである．また，それぞれの相では，必ずしも，発揮される力の構成要素ごとに評価基準を設けないことにする．個々の構成要素は，互いに関係しながら発揮されるので，別々に捉えることが難しかったり，別々に評価することに意味がなかったりする場合があるからである．また，評価の段階数は，A,B,C,D の 4 段階とする．ただし，この A,B,C,D の段階は，数学的モデル化を遂行する力のレベル 3，2，1，0 に対応させるわけではない．あるレベルからその 1 つ上のレベルへ上がる間に，教材や授業目標に応じて，さらに段階を設けて評価基準を設定する．
先の｢車のサイドミラー｣の教材の評価の例として,西村(2012)の数学的モデル化過程の各段階に分けて評価している．評価の例は表 3-11 を挙げている．

表 3-11：数学的モデル化教材の評価例

	A	B	C
問題の翻訳	サイドミラーを大きくしたときの効果を「視角」や「面積」等で数値化して示す問題として捉える．	サイドミラーを大きくしたときの，見える範囲の変化を調べる問題として捉える．	サイドミラーで見える範囲を調べる問題として捉える．

定式化	見える範囲に関わる運転手とサイドミラーとの関係(運転手の目の位置とサイドミラーの高さの関係)に関する仮定が置かれていることを認識し，サイドミラーの大きさや向き等に関する仮定をおくとともに，それらを後から変更する必要性を認識している．	見える範囲に関わる運転手とサイドミラーとの関係(運転手の目の位置とサイドミラーの高さの関係)に関する仮定が置かれていることを認識し，サイドミラーの大きさや向き等に関する仮定をおく．	問題に示された運転手とサイドミラーとの関係や，バスの大きさの仮定だけを用いる．
数学的モデルの作成	視線を表す，見えない線を含め，問題場面を平面図で作図する．	視線を表す，見えない線を含め，問題場面を平面図に表す．	バス(運転手の位置やサイドミラー)を平面図に表す．
数学的処理	サイドミラーで見える範囲を読み取り，「視角」等で数値化するとともに，サイドミラーの大きさや向きに関して，いくつかの場合を考える．	図から，サイドミラーで見える範囲を求め，「視角」等で数値化する．	図から，サイドミラーで見える範囲を求める．
解の翻訳	サイドミラーで見える範囲を読み取るとともに，サイドミラー自体が作る死角も含めて，サイドミラーを大きくしたことの効果について検討する．	サイドミラーで見える範囲を読み取るとともに，サイドミラーを大きくした効果について検討する．	サイドミラーで見える範囲を読み取る．
評価	身近にある鏡で見える範囲が，同じように作図して求められる範囲と一致するかどうかを調べ，修正の必要があるかどうかを判断する．	身近にある鏡で見える範囲が，同じように作図して求められる範囲と一致するかどうかを調べる．	身近にある鏡で，映る範囲が，見る位置，向き，大きさによって変化することを確かめる．
評価	サイドミラーを大きくしたときの効果を，数学的表現を用いて，聞き手を意識してわかりやすく伝える．	サイドミラーを大きくしたときの見える範囲の変化を，数学的表現を用いて伝える．	大きくしたサイドミラーで見える範囲を伝える．

（※C に達していないものを D とする）

西村(2012)は以上に挙げた授業展開や評価内容を踏まえ,授業の構成原理を以下のように整理している.

①授業の型を決める
　数学的モデル化過程が始動する状況(仮定重視型，検証重視型，全過程型)と数学的処理の状況の状況(適用型，概念学習型)を決める.
②授業展開の概要を確認し，そのときの子どもの思考を予想する
　①の型の組み合わせ(過程重視・適用型，仮定重視・概念学習型，検証重視・適用型，検証重視・概念学習型，全過程・適用型，全過程・概念学習型)ごとの授業展開の概要を確認するとともに，その時の子どもの思考を予想する.
③授業の目標を設定する
　数学的モデル化を遂行する力のレベルを参考にしながら授業目標を設定する.
④授業の手立てや支援を考える
　次の 6 つの指針をもとに，教材や子どもの実態に応じた具体的な手立てや支援を，複数の指針を組み合わせることも含めて考える.
Ⅰ「批判」をしやすい状況を作る
指針 1）不十分な状況を作る
指針 2）参照点として，新たなデータや模型・教具などを利用させたり，すでに扱った問題や事象を想起させたりする
指針 3）互いに参照することが効果的な考えを取り上げる
指針 4）「解釈」を促進するための発問をしたり，「解釈」を学級で練り上げたりする
Ⅱ自他の解決過程を振り返らせる
指針 5）自分や他者の解決過程を振り返り，その結果を記述させる
指針 6）自分や他者の解決過程をルーブリックを用いて評価させる
⑤ルーブリックを作成する
　数学的モデル化を遂行する力の質的な変容を評価するためのルーブリックを，可能な限り次元の相ごとに，次元 2 の構成要素中心に，数学的モデル化を遂行する力のレベルや授業目標をふまえて作成する.

(p.202)

本研究において，数学的モデル化過程の定式化の部分が大事だと述べて来たが，定式化には具体的にどのような力があるのか考えると，西村，長崎(2008)の「算数・数学と社会をつなげる力」の「B. 社会の問題を数学的に解決する力」が挙げられる．これは先述してきたように，数学的モデル化に当たる力としている．清野の「仮定の意識化」の役割がより効果が顕著に果たされるようにする上で，西村，長崎(2008)の「算数・数学と社会をつなげる力」の B の力のような，詳細な視点で仮定を設定していることを意識化させることで，現実事象と数学の関連を踏まえ，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の問題解決にもつながると考える.

ゆえに教材の実践をする上で，いかに「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決ができたかを評価する上で，西村(2012)の観点は非常に参考になると考える．特に「仮定をおく」ことはも

ちろんだが，さらに「修正すること」は本研究では数学的モデル化を洗練し，進展させるには必要な視点である．西村(2012)は評価のレベル設定として 3 段階設定している．このレベルをそれぞれ見ても一つ一つの間の力の差が適度に広いように感じる．つまり，1 つ上のレベルと生徒に要求することは結構な負担になることが考えられる．西村(2012)はこの対策として問題を変えて対応している．ゆえに実践するうえでどのレベルに合わせるかも検討するべきで，問題に仮定なども予め設定して提示するべきものもあるのかもしれないと感じた．一方で，生徒とともに作り上げていくことも当然ながら目指すところではあるので，基本的にはこの姿勢で行くこととし，発問等で，生徒から考えを引き出せるよう対応することをまずは考えていきたい．

また，質的な評価を目指す上で，西村(2012)は 3 つの資料を例に挙げている．本研究の実践では 1)を基本とし，発展として生徒が他の場面を想定することができるようなレベルであれば 2)も扱いたいと考えている．

最後に西村(2012)の評価の観点を踏まえて，本実践における評価の仕方を考える．まずは数学的モデル化過程の段階ごとに「算数・数学と社会をつなげる力」の評価をしていたので，本研究でも数学的モデル化過程の段階に評価をして行くこととする．ただし本研究で定めた数学的モデル化過程に沿うこととする．さらに評価の観点として「仮定の意識化」の役割が果たされているかに関しても見ていくこととする．定式化において定めた仮定が単純化された場面から具体的な場面へと進展することで変わっていく様子がわかる形で表記（各場面を通じて仮定がどのように変わっていったかを明記）することで本研究の特徴が現れるようにする．

清野(2006)と西村(2012)の数学的モデル化教材の授業実践に際して整理された，学習理論並びに授業展開例や評価をここまで見てきた．授業実践もなされていることから，本研究における実践においても参考にすることで，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の実践を行うことができると考える．

3．本研究における授業実践の構成と評価

前項では，清野(2006)と西村(2012)の数学的モデル化教材の授業実践の学習理論並びに授業展開例や評価について整理してきた．本項の目的は，整理してきた前項の内容を参考にし，本研究における授業実践の学習の展開の構想，並びに評価の観点について明らかにすることである．

(1) 数学的モデル化教材を用いた学習展開の構想

まず授業の意図として，本授業では，交通事故対策のために丁字路における道路反射鏡（以下ミラー）の設置という，現実事象の問題解決を数学を用いて結論を出すことを目指すものである．活用する既習内容は「基本の作図」の垂線，垂直二等分線，角の二等分線を主に使い，その他にも円の作図や必要に応じて分度器を使って解決させたい教材である．基本の作図を活用した日常場面の問題解決は教科書等でもあまり扱われていないのは先述した通りである．ゆえに，生徒らが基本の作図を活用した問題解決がはかれることを目指す．具体的な問題場面として丁字路を上から見た状況を想定し，「入射と反射の法則」から入射角＝反射角となるようにミラーを設置することとするが，最初の問題場面の設定時に暗黙裡にミラーを点でおいて解決するが，よりよい数学的モデルを求め，より広い範囲を確認するために，ミラー（平面鏡）を見ることで「仮定を見直す」と，幅を持って確認できることからミラーを幅を持た

せたもの（図形的には線分（直線の一部））と見ることで解決できるのではと「仮定をおき直す」ことで解決を進める．また次の解決でも，作図からもっと広く見たいとの思いから，実際のミラー（曲面鏡）を確認して仮定を見直し，ミラーを曲面（図形的には弧（円の一部））と仮定をおき直すことで問題解決へと進めている．本授業ではミラーについての仮定を主に考えたものにしているが，ミラーをおく場所についても変数と捉え，仮定を見直し，おき直すことも可能となっている．

この問題解決の過程は本研究で同定している数学的モデル化過程に沿って進めていく．本研究では問題解決後に「問を生成し，仮定を見直し，おき直す」ことで「仮定の意識化」をし，問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得ができるような問題解決を目指している．以下が本研究において同定された数学的モデル化過程であった．

(1)数学的な問題場面の作成：現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで，数学の問題場面としておきなおすこと
(2)数学的モデルの作成：数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで数学的モデルを導くこと
(3)数学的作業：数学的手法を用いて数学的結論を得ること
(4)解釈：数学的結論が現実的文脈に照らしてどのような意味を持つのかを理解すること
(5)評価：現実的文脈を考慮した結論を現実場面に照らして評価し，妥当であれば最終的な結論とする．妥当でなければ仮定を見直すとともに，おき直す仮定を考え，問題解決の進展を図る．

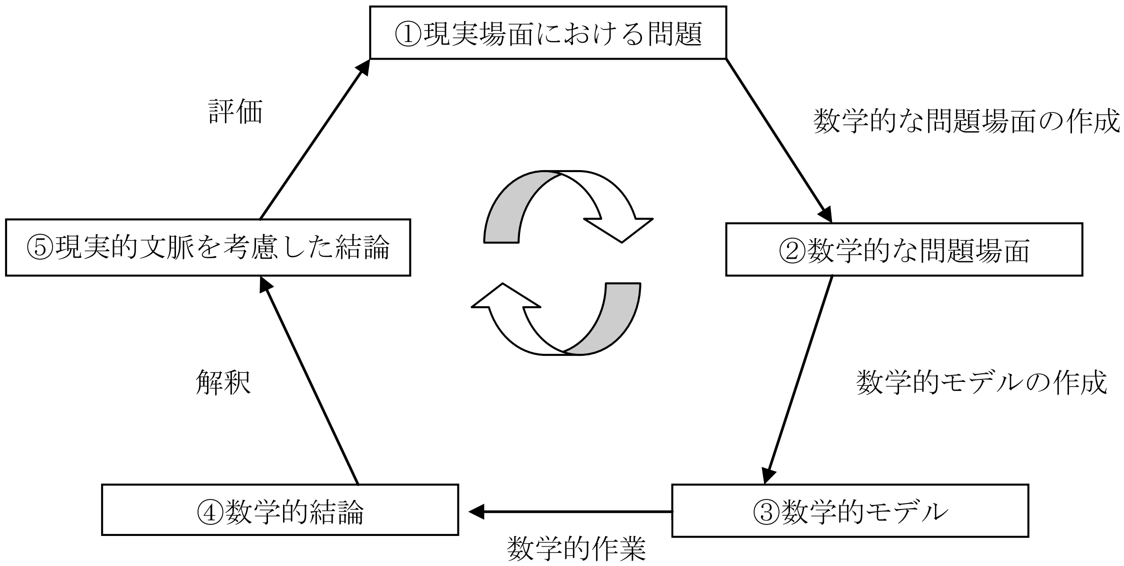


図 3-36：本研究において同定された数学的モデル化過程

授業としては，まず問題解決を生徒の自力解決を求めるものとし，「入射と反射の法則」や基本の作図のように既習の内容を活用しながら思考し，解決することを求めるものとする．自力解決後に導き出した数学的結論を現実場面と照らし合わせることで，現実的文脈を考慮した結論を出す．その後評価の段階で仮定について意識化させる．まず解決に用いた数学的な問題場面や数学的モデルを現実場面と解決した作図で設定した仮定が妥当でないことに気付かせ，よりよい数学的モデルを志向させ，問を生成す

る．そして，妥当でない仮定を見直させる．そこで新たな仮定をおき直すことで「仮定を意識化」させ，問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得ができるようにしたい．

また本授業の対象として，現実事象の問題解決があまり経験のない生徒であることを想定し，「数学は現実と関係ない」，「数学は役に立たない」と捉えている生徒の実態の改善も意図している．実際に作図を通して解決させ，「仮定の意識化」を重視した問題解決を行うことで，生徒らの実態改善につながると考える．実際，清野(2006)は「仮定の意識化」の役割を以下の 3 点について挙げていた．

1) 解決過程や結果の妥当性を確認する役割
2) 数学的モデルを洗練する役割
3) 問を生成し，数学的モデル化を進展させる役割

この「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の学習指導の原理に基づいて展開するものとする．ここで「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導の原理として以下のように清野(2006)や西村(2012)を参考にし，本研究の数学的モデル化過程との対応も踏まえながら展開していくこととする．よって，本研究における数学的モデル化過程に対応する，数学的モデル化教材の学習の展開を，表 3-12 のように定める．

表 3-12：本研究における数学的モデル化教材を用いた学習展開の構想

①現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで数学的な問題場面としておき直す．
②数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで数学的モデルを導く．
③作成した数学的モデルを数学的処理し，数学的結論を出す．
④現実場面に照らして解釈をし，現実的文脈を考慮した結論を出す．
⑤現実場面に照らしてよりよい数学的モデルを志向し，問題解決の前提となっている仮定を見直すことで，問題解決の方法と結論の妥当性を評価し，新たにおき直す仮定を考えることで，問題解決を進展させる．

これは本研究における数学的モデル化過程にも対応させたものであり，授業展開をこの構想に沿って行うことで，先述してきた「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決ができる授業が可能となると考える．

(2) 本研究における数学的モデル化教材の学習の評価

評価については西村(2012)の内容を参考にする．評価の観点は表 3-9 のように段階ごとに分割する．評価のタイミングは，本研究における数学的モデル化過程において，例えば「①現実場面における問題」から「②数学的な問題場面」に到達するために，段階として定式化をする必要がある．つまり，①から②へと到達できれば，定式化について目標が達成されたと判断することとする．定式化以外の段階についても同様に評価する．よって，本実践での問題解決の評価の観点について，表 3-13 のように整理しておく．

表 3-13：本実践における数学的モデル化教材の問題解決の評価観点の例

	A	B	C
数学的な問題場面の作成(①)	3 次元での見える範囲に関わる X と Y とミラーの関係（X と Y の目線の高さや位置とミラーの高さ）に関する仮定が予め置かれていることを認識し，2 次元で考える上での道路の設定や X と Y の位置やミラーの大きさや形状に関する仮定を現実場面との妥当性の評価から，仮定を変更する必要性を認識している．	3 次元での見える範囲に関わる X と Y とミラーの関係（X と Y の目線の高さや位置とミラーの高さ）に関する仮定が予め置かれていることを認識し，2 次元で考える上での道路の設定や X と Y の位置やミラーの大きさや形状に関する仮定をおく．	問題に示された X と Y とミラーとの関係や，道路等の仮定だけを用いる． ※問題解決のためには仮定をおくことで定式化しなければならないことを認識させ，どのような仮定を置かなければならないかを考えさせる．
数学的モデルの作成(②)	視線や視界を表す，見えない線を含め，問題場面を平面図で作図する．	視線や視界を表す，見えない線を含め，問題場面を平面図に表す．	X と Y の位置やミラーを平面図に表す． ※定式化した場面を整理して図に表し，どのような作図をすればよいか考えさせる．
数学的作業(③)	ミラーで見える視点や範囲を読み取り，道路となす角度や死角の大きさ等で数値化するとともに，ミラーの大きさや形状，位置に関して，いくつかの場合を考える．	図から，ミラーで見える視点や範囲を求め，道路となす角度や死角の大きさ等で等で数値化する．	図から，ミラーで見える視点や範囲を求める． ※X とミラーと Y を結ぶ直線がどのような意味を示すのか考えさせる．
解釈(④)	ミラーで見える視点や範囲を読み取るとともに，ミラー自体が作る死角も含めて，ミラーの位置を変えたりしたことの効果について検討する．	ミラーで見える視点や範囲を読み取るとともに，ミラーの位置を変えたりした効果について検討する．	ミラーで見える視点や範囲を読み取る． ※作図した結果がどのような意味を現実場面で持つのかを考えさせる．

評価(⑤)	ミラーで見える様子の写真やこれまでの経験からミラーの見える範囲が，作図して求められる範囲と一致するかどうかを考え，修正の必要があるかどうかを判断する．	ミラーで見える様子の写真やこれまでの経験からミラーの見える範囲が，作図して求められる範囲と一致するかどうかを調べる．	ミラーで見える様子の写真やこれまでの経験からミラーの見える範囲が，見る位置，向き，大きさによって変化することを確かめる． ※作図した結果から，より現実場面を想定するならばどのようなことを考えなければならないかを考えさせる．

今回定めた数学的モデル化教材の学習の展開では，先に定めた数学的モデル化過程の流れに沿って，問題解決が進められている．さらに清野(2006)の「仮定の意識化」の役割を果たすために，設定した仮定を見直し，おき直すことで，数学的モデルを洗練し，問題解決自体を進展させることを目指している．この学習展開のもとで授業実践を行うことで，生徒らの実態を改善することを目指しことができると思う．また，評価の観点を網羅できるように，先に定めた数学的モデル化教材の学習展開の流れに沿って本教材の授業実践に取り組むこととする．これにより，ここまで挙げてきた「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の教育的価値を発揮し，生徒らの実態改善につなげることができると考える．よって，本研究における授業実践をこの構想と評価観点のもと行うこととする．

第 4 節　本章の総括

本章の意図は，数学的モデル化教材の開発に取り組むことである．このとき，第 1 章，第 2 章で明らかになった,「仮定の意識化」を重視する．まず，筆者にとって身近な現実事象となる場面から必要観に迫られ，問題意識を持った状態で課題を実際に解決していく．次にこれを教材化すること及び，授業化を目指し，教材を吟味することである．

本章の構成は以下の通りである．

第 1 節では，筆者の身近な場面での解決したい問題を実際に数学を活用して問題解決を行った．筆者が家の近所で車を運転していると，交差点で事故に遭いそうになることが多い交差点があることに気がついた．この問題を主に基本の作図を使って解決し，PC ソフトの GeoGebra も併用しながら思考を進めていった．その問題解決によって解決された教材が「ミラーを設置しよう」である．この教材は 4 つの問題場面を経て解決へと至っている．問題場面を以下のように整理していた．

(1)道幅を 0 とし，図形的には直線として表し，さらにミラーを図形的に点としてみて表し，道路の交点（この点を O_1 とする）におく．

(2)道路の道幅を 6m とし，ミラーを点としてみて道路の上端におく．

(3)ミラーを直径 60cm の平面鏡としてみて（平面図において図形的にみると線分)，道路の上端より直径の半分の 30cm 分外側にミラーをおく．

(4)ミラーを直径 60cm の曲面鏡としてみて（平面図において図形的にみると弧)，道路の上端より直径の半分の 30cm 分外側にミラーをおく．

この整理した視点として，まず砂場(2003)の「B．仮設に基づく単純化の過程」の主張をもとに，まず問題場面を単純化し，問題の難易度を下げた状態からスタートした．そして，第 1 章で述べたように，仮定を見直し，おき直すことで徐々に現実場面に即した結論を導き出していくことにした．そこから基本的に一つずつ仮定をおき直して場面を進展させていく．この時，おき直した仮定に伴っておき直す必要のある仮定に関してはおき直していく．そして，現実場面に即した数学的モデルでの問題解決を行い，結論を出すことを目指している．また，この教材は仮定を見直し，おき直していくことで，第 1 章と第 2 章で明らかにした数学的モデル化過程や「仮定の意識化」との関連も踏まえられている．

第 2 節では，開発した教材を授業化に向けて，数値等の吟味を行うことで洗練した．まず問題場面として図 3-37 のようにした．

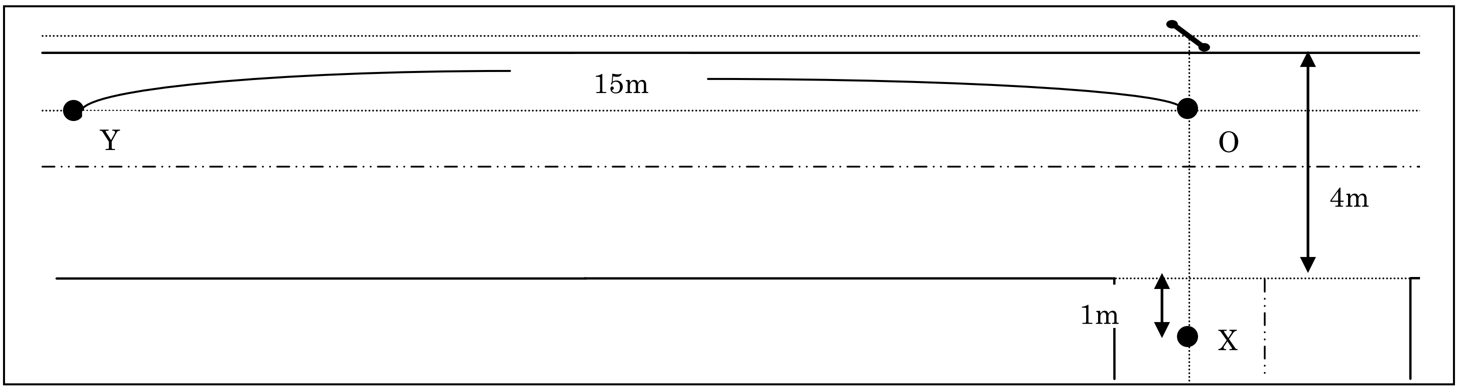


図 3-37：授業で用いる問題場面（※数値は実際の大きさ）

この問題場面を踏まえ，授業で用いる教材が以下の通りである．

○今日の課題　『ミラーを設置しよう！』

交通安全面での危険性を少なくするために，ミラーを設置したいと思う．どのような位置，角度で設置すればよいか考えてみよう．また，見える範囲を大きく確保するためにはどうしたよいか考えよう．

(1)ミラーを道路端におくことにする．このとき，ミラーを道路に対してどのような角度で設置すればよいだろうか．※ワークシートの縮尺は1／50とする．

(2)ミラーが幅をもつことにする(※このワークシートではミラーの中心から 0.6cm)．車を表す点 Y が右に 2m(※このワークシートでは4cm)動いたとする．このとき，ミラーでこの車を確認できるかどうか，作図をして調べよう．(D'は道路の端 D より 30cm(※このワークシートでは 0.6cm)外側の線とする)
①どの点における反射の線を作図したらよいか考えよう．
②点 Y から 4cm 右に動いた点 Y'を取り，ミラーで Y'を確認できるか考えよう．

(3)ミラーを円の一部と考え，このミラーを含む円の半径を 220cm(※このワークシートでは4．4cm)とする．車を表す点 Y が右に9m(※このワークシートでは18cm)動いたとする．このとき，ミラーでこの車を確認できるかどうか，作図をして調べよう．
①円の中心を作図して見つけよう．
②ミラーの両端の点における反射の線をかくには，何が必要だったかを考えて作図しよう．
③Y から18cm 右に動いた点 Y"を取り，ミラーで Y"を確認できるか考えよう．

第 3 節では，この教材の実践に向け，数学的モデル化教材の実践を行った清野(2006)や西村(2012)を参考にし，教材の精錬や授業の展開の構想や評価についての整理を行った．まず授業の展開の構想としては表 3-14 のようにした．

表 3-14：本研究における数学的モデル化教材を用いた学習展開の構想

①現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで数学的な問題場面としておき直す．
②数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで数学的モデルを導く．
③作成した数学的モデルを数学的処理し，数学的結論を出す．
④現実場面に照らして解釈をし，現実的文脈を考慮した結論を出す．
⑤現実場面に照らしてよりよい数学的モデルを志向し，問題解決の前提となっている仮定を見直すことで，問題解決の方法と結論の妥当性を評価し，新たにおき直す仮定を考えることで，問題解決を進展させる．

これは本研究における数学的モデル化過程にも対応させたものであり，授業展開をこの構想に沿って行うことで，先述してきた「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決ができる授業が可能となると考えた．そして評価についても本研究における数学的モデル化過程の各段階ごとに問題解決の評価の観点を設けた．

以上の内容を踏まえた実践を行い，第 4 章においてその実際を整理し，分析・考察を行う．

第 4 章

「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材を用いた授業の実践と評価

本章の意図と構成

本章の意図は，開発した教材の授業実践を通して，生徒の現実事象の問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果の有効性を明らかにすることである．

本章の構成は以下の通りである．

第 1 節では，開発した教材の授業実践の構成と実際を整理する．

第 2 節では，本教材の授業実践で明らかになった，生徒の現実事象の問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果の有効性についての成果並びに課題を，生徒の問題解決のワークシートや授業感想のデータから分析・考察を，本研究の目的を踏まえ 2 つの分析の視点を挙げ，本実践で達成されたか明らかにすることである．

第 3 節では本章の総括を行う．

第 1 節　本教材の授業の構成と実際

1. 本実践における教材の実際

(1)　授業の対象

まず研究の対象とする実践授業の実施日並びに場所・対象は以下の通りである.

・実践日：12 月 8 日（月）3，4 時間目（10：50～11：35，11：45～12：30）　計 90 分
・対　象：国立大学附属中学校　2 年 A 組 39 名（※欠席 1 名）

また授業の方針として，①題材名，②ねらい，③評価規準，④評価方法を以下のように設定した.

①題材名「ミラーを設置しよう」

②ねらい

丁字路におけるミラーの設置という具体的な事象の問題解決において，基本の作図（垂線・垂直二等分線・角の二等分線）を用いた数学的解決の方法や結論に現れる仮定が現実場面において妥当であるか評価を経て，仮定を見直し，おき直して抽象的な場面から具体的な場面にしていく．これにより仮定を見直し，おき直すことで数学的モデルを洗練し，問題解決を進展させるという仮定を意識化することの意義を見出すことができる.

③評価規準

・[関心・意欲・態度]

現実事象の問題解決に数学を活用して解決しようとしている.

・[数学的な見方考え方]

ミラーの設置という現実事象の問題解決において，設定した問題場面の数学的解決を現実場面と照らし合わせ，妥当性を評価し，新たな仮定を置くことで，より現実に即した問題解決をしようとしている.

④評価方法

授業中の作業に使うワークシートにおいて，「仮定の意識化」の視点で問題解決が進展していたかを振り返ることができていたかを評価する.

以上の内容を踏まえ，授業における教材の構成を設定する.

(2)　教材の構成

本授業で扱う教材として「ミラーを設置しよう」という，交通事故対策のために丁字路における道路反射鏡（以下ミラー）の設置という日常場面の問題解決に関する問題である．具体的な問題を以下に示す.

○今日の課題　『ミラーを設置しよう！』

交通安全面での危険性を少なくするために，ミラーを設置したいと思う．どのような位置，角度で設置すればよいか考えてみよう．また，見える範囲を大きく確保するためにはどうしたよいか考えよう．

(1)ミラーを道路端におくことにする．このとき，ミラーを道路に対してどのような角度で設置すればよいだろうか．※ワークシートの縮尺は1／50とする．

(2)ミラーが幅をもつことにする（※このワークシートではミラーの中心から 0.6cm）．車を表す点 Y が右に2m（※このワークシートでは4cm）動いたとする．このとき，ミラーでこの車を確認できるかどうか，作図をして調べよう．（D’は道路の端 D より 30cm（※このワークシートでは 0.6cm）外側の線とする）
①どの点における反射の線を作図したらよいか考えよう．
②点 Y から 4cm 右に動いた点 Y’を取り，ミラーで Y’を確認できるか考えよう．

(3)ミラーを円の一部と考え，このミラーを含む円の半径を 220cm（※このワークシートでは4．4cm）とする．車を表す点 Y が右に9m（※このワークシートでは18cm）動いたとする．このとき，ミラーでこの車を確認できるかどうか，作図をして調べよう．
①円の中心を作図して見つけよう．
②ミラーの両端の点における反射の線をかくには，何が必要だったかを考えて作図しよう．
③Y から18cm 右に動いた点 Y”を取り，ミラーで Y”を確認できるか考えよう．

本授業では図 4-1 の場面を想定する．

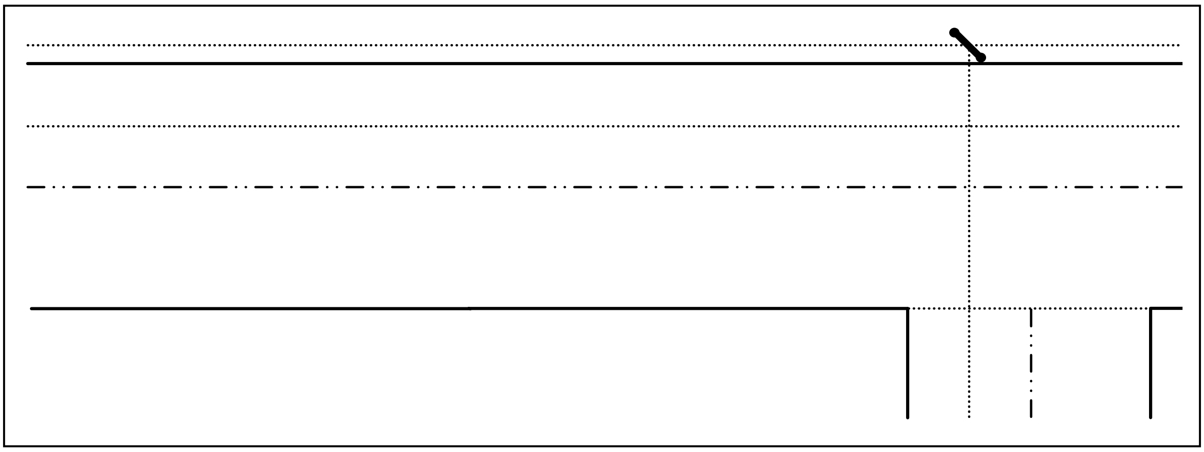


図 4-1：場面設定の図(上から見た図)

この場面でミラーをどの位置におくか，どのような角度でおくか，そしてミラーとしてどのようなものを使うと広い視界を確保できるのかを作図から求めていくものとする．具体的に各問いにおける問題場面を以下のように設定する．

(1)ミラーを点としておき，X の真正面の道路の端におく

(2)ミラーを 60cm の幅のあるもの(図形的には線分(直線の一部))とし，X の真正面の道路の端か

ら 30cm 外側に道路と 43°の角度でおく

(3)ミラーを 60cm の幅を持つ曲面（図形的には弧（円の一部））とし，X の真正面の道路の端から 30cm 外側に道路と 43°の角度でおく

自力解決で(1)でミラーを設置する角度を作図から求めさせ，以後その角度 43°を維持していく．位置も(1)ではミラーを点でおいたため道路の端におくが，(2)以降では 60cm の幅を持つため，30cm 分外側の位置におくこととしている．

2. 本実践の実際

ここから授業の実際についてプロトコルに沿ってみていく．プロトコル中の網かけの部分は教師と生徒の仮定の設定，並びに「仮定の意識化」に関わるやり取りとして特に見ていくところである．

なお，プロトコルの左側の数字は，教師，生徒の発話の番号（1 時間目：教師の発話総数 80，生徒の発話総数 72，2 時間目：教師の発話総数 43，生徒の発話総数 37）を示す．なお，この授業における授業全体のプロトコル並びに学習指導案は資料として掲載してある．

・問題場面の設定，(1)の場面

①現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで数学的な問題場面としておき直す．

まず交通安全の対策としてどのような対策が取られているかを尋ねるとともに，図 4-2 を提示し，実際の身近な問題場面を提示し，生徒らに問題意識を持たせることから授業を始めた．

T3：（中略）まず，先生の最近の悩みがあって，先生運転するんですね，車を．ですけど，やたらと車にぶつかられそうになる．すごい危険なんですね．怖いんですよ．なので，今日はその悩みをみんなで解決していきたいなと思ってるんですけど，いいですか？みんなもどうですか？事故に，自転車で，もう雪降っちゃったからないかもしれないけど，自転車乗ったときに，事故に遭いそうになった人いますか？あった？じゃあそれを改善しようね．ということで，今日はそういうことをやっていきたいと思います．その中で，皆さん道路とか歩いているときに，思い出してほしいんですけども，なんか交通安全のために何かあるものがありませんか？事故防止のための対策というか．思いつくものありますか？

S3：標識．

S4：鏡．

T4：おお．色々あると思います．例えば附属の近くで最近？もう一ヶ月くらい前かな．ちょっと新しくできたものがあるんですけど，何か知っている人はいますか？わかんない？10 月 30 日のことなんですけど．ちょっと写真の見せたいと思います．（図 4-2 提示）さあどうでしょう．ここどこかわかりますか？（中略）実はこんなところに交通安全のための対策が取られているということがあります．いいですか？今日はこのミラー，いろんなところにあるけど，どのように設置されているのかな？ということを考えてみて，実際に効率のいいミラーの設置の仕方をみんなで考えていきたいと思いますので，よろしくお願いします．

図 4-2：交通安全対策の問題場面の実際

その後，課題を提示し，「では，実際に考えていきたいんですけども，まずミラーどういうところにありますか？思い浮かべて.」と発問し，数学的な問題場面の作成に入って行った.

T4：（中略）では，実際に考えていきたいんですけど，まずミラーどういうところにありますか？思い浮かべて.
S5：曲がり角.
T5：いいですね．ちょっと書けないからごめんね，ここに書けないからホワイトボードに書くね．曲がり角．他にありますか？
S6：視界の悪い場所.
T6：例えば？視界の悪い場所.
S7：横に建物がある.
T7：ん？
S8：こういう曲がり角があって，ここにでっかい建物がある.
T8：でっかい建物がある．障害物とか．いいですね．曲がり角なので，今回はちょっとこの場面をちょっと使ってみましょうか？交差点．なおかつ，T 字路というところを考えてみたいと思います.

交差点で障害物となる建物が左右にあることも生徒から発言され，より問題場面が立体的な視点で考えられている．ここまでで授業で行う問題解決の基本となる問題場面の設定を行った.

この後，図 4-3 を提示し，数値に関する仮定を設定していく．まず道幅を 4m と設定し，道路の中央線並びにそれぞれの車が通る線を決める．また，X の地点を交差点手前 1m とした．これらを生徒らとのやり取りで設定していった.

T8：（中略）まず道幅書いておこうか，条件として．まずここ，一応 4m ということにしておきたいと思います．4m 大丈夫？イメージつく？大丈夫かな，はい，一応この黒い線というのは中央線，いいよね？道路なので中央線があるとします．そして車に乗っているという状況を想定して，この赤線は車が通るところ．いいよね．車は道の真ん中通るよね．ということを一応考えておきたいと思います．ここまでいいですか？いい？大丈夫？場面としてまず，自分が交差点に入ります．そして，右折しようかなというときに，左から来る車を確認したい．という場面を考えてください．ここまで大丈夫？想像できる？大丈夫？なので，それで考えていくんですが，じゃあとりあえず X の場所．自分，自分が車に乗っているとして，X と名乗りましょう．自分のことを．そうすると，X はどこに置けますか？どの辺？

S9：下側の．

S10：左．

T9：この辺？はい，この辺にしようか？一時停止するからね．この辺にしようか？はい，じゃここを X．はい，じゃ Y は？あっあの Y ってこっちから来る車．来る車．ふっ．

S11：（笑い）

S12：左側．

T11：左側から来るから，この辺でいい？はい，この辺に Y という車がいますよということを考えましょうか？いいですか？あと，距離考えておきたいんですけど，X，一時停止線を少し考えたときに，どのくらい離れていたらいいかな？イメージしてみて．

S13：1m.

T12：おっ 1m.

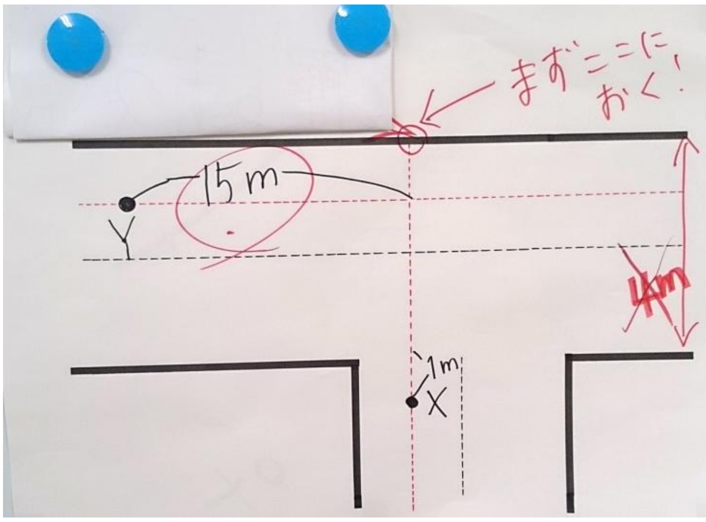


図 4-3：問題場面の設定の図

また，Y の地点を決めていたが，Y までの距離は Y が動いてくるため変数としての要素が大きい．ゆえに Y は X を見て止まれる距離に設定することとした．ここでは表 4-1 の制動距離のデータを活用した．

表 4-1：制動距離について（JAF　HP より）

速度 (km/h)	制動距離 (m)
40	6
60	14
80	25
100	39
120	56

このデータから一般道では 40km/h から 60km/h の速さに対応できるよう，15m の位置に Y が最初いることとする．14m ではちょうど接触してしまう可能性があることも触れ，生徒も理解していた．

T12：（中略）じゃあ，Y，Y のこの距離どのくらいにしようか？
（中略）
S17：10m.
T16：おー．いいとこきましたね．ちょっとその，少し距離を考えたときに，まあ，Y がここ，X ここ通るんだよね．って考えたときに，ここにいたときに，ぎりぎり止まれればいいかな？急ブレーキ，キキ―って，という場面を想定したときに，こういうデータがあります．制動距離．制動距離誰か聞いたことありますか？わかんないかな．制動距離っていうのはこう運転してて，キキ―って止まって，皆車すぐ急に止まれる？車．
S18：止まれない．
T17：止まれないよね．ちょっと動いちゃう．この動いた距離を制動距離と言います．いいですか？車ってだいたいどのくらいの何キロで走ってるかわかる？
S18：普通 40km/h.
T18：普通のところだと 40km/h，ちょっと大きい道路だと？
S19：60km/h.
T19：60 くらいで走る車もいるよね．ということを考えると，応一応 80 とか 100 出す車ちょっとね，危なすぎるから，考えないとして，60 までにしましょう．そうすると Y はどのくらい離れていればいいと考えられますか？
S20：普通のところだと 6m.
T20：普通のところだと 6m，でも一応 60 キロも考えておきたいから．
S21：14m.
S22：15m.
T21：15m．まあ 14m だとあとちょうど止まっちゃうんだよね．ということはぶつかっちゃうんだよね．
S23：へへ．
T22：ということなので，ここは 15m ということにしておきたいと思います．

以上より，数学的な問題場面として図 4-3 を学級全体で設定した．

②数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで数学的モデルを導く．

続いて(1)のミラーの位置を設定する．

T23：(中略) じゃあ，ここまでわかったけど，なにをおくんだっけ？
S26：ミラー．
T24：ミラーだよね，そうそう，ミラーをどこにおこうか？これだと．
S27：真ん中にでっかいやつ置く．
T25：真ん中．真ん中ってどこ？赤い線？のこれ？あーなるほど．ここもありますね．他にもありますか？いっぱい置くとこあると思うんだけど，どう他にもありそう？
S28：ないと思う．
T26：ん？ないと思う？大丈夫？みんなここで大丈夫？いい？じゃとりあえずここにおいてみようか？まず．まずここにおくということにしてみたいと思います．いいですか？では，最後．ミラーをおくんだけど，位置はいいよね？じゃ角度．どのように置けばよさそうでしょうか？
S29：X も Y も見える．
T27：X も Y も見える．なるほどね．じゃ例えば，先生の手，ミラーだとしましょう．はい，こうおきました（ホワイトボードの図に手を添えながら）．どうですか？
S30：自分の車が見える．
T28：Y は？
S31：見えない．
T29：見えない．なんで？なんで？っていうかじゃ何が見える？
S32：自分．
T30：自分，そうだよね．自分が見える．ということですね．じゃこれどうすればいい？
S33：傾ける．
S34：(手で表現)
T31：傾ける．じゃ傾けてみるからストップって言って．(手を傾ける．)
S35：ストップ．
T32：このくらい？なるほどね．(中略)
T33：いい予想かもしれないね．じゃあこれを実際に解決してみよう．

ここまで展開で数学的モデルが作成されたことになる．生徒に意識化させる中心となる仮定はミラーの形でこの場面では点となっているが，教師側が暗黙裡におくことで，後に生徒に意識化させることとした．その他問題場面を構成する様々な仮定が生徒とのやり取りの中でおかれている．設定した仮定を整理すると以下の通りである．

[道路について]
・道路が直角に交わるものとする(丁字路とする)
・上から見た平面図とする
・道幅を 4m とする

[ミラーについて]
・ミラーを点とする
・ミラーを道路の端におく
[その他]
・ミラーで見えてほしい車 Y の位置をおく(15m)

続いてワークシートを配布し，その後自力解決が行われた．自力解決後，どのように作図したかを生徒とのやり取りを通して，板書しながら作図を確認した．

T42 : じゃあちょっと，このぐらいにしておこうか，一回．どう？ちょっとむずかしかった？いつもの何かテストとかとは違う感じだから難しいなとは思うかもしれないんだけど，どんな作図したのか確認してみましょう．まず，三上さん，ちょっとどのような作図をしたかちょっと教えてください．いいですか？まず？大丈夫だよ，先生やるから．まずどうしました．
S38 : X と O と D の角の二等分線を引く．
T43 : なるほど．X と O と Y，あっ D，こっちね？なるほど，これの二等分線をひいた．皆さんどうですか？ここで引いた人手挙げて？おっ結構いるんじゃない？ちなみに他のとこに引いた人？西村さんどこに引きましたか？
S39 : X と O と Y の角の二等分線.
T44 : X と O と Y の角の二等分線を引いたと，ちなみにこっちでやった人？さあどっちで引いたらいいでしょう？ちょっとここ難しいとこだよね．D のところで引いても多分いいんだよ．でも Y のところで引いてもいいと思うんだけど，どっちがいい？どっちでやればいいだろう．いい，じゃ今みんな何を見たいんだっけ？X のところにいて，何が見たいんだっけ？
S40 : Y.
T45 : Y を見たいんだよね？OK？ということなので，ちょっと Y と結んでみようか？はい，結びました．いい？で，ここで何をするんだっけ？みんなここで何をした？
S41 : 角の二等分線.
T46 : 角の二等分線を引いたんだよね．はい，二等分線を引きました．じゃあつぎ，この次何をしたらいいですか？何をしましたか.
S42 : 垂線引いた.
T47 : いいよ.
S43 : 点 O に垂線，いや点 O を通るように垂線を引いた.

作図は図 4-4 のようになった.

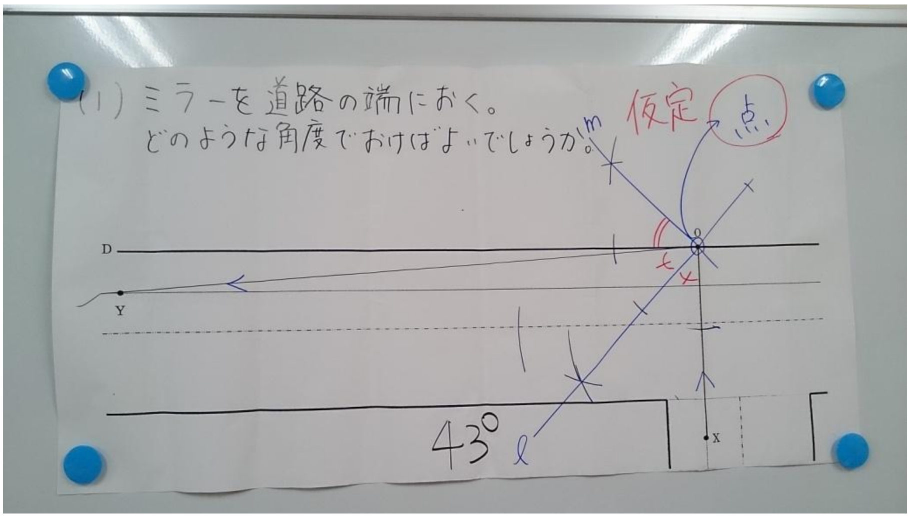


図 4-4：ミラーを点としておいた場面の作図

③作成した数学的モデルを数学的処理し，数学的結論を出す.

続いて，作図をもとに数学的結論を出した．この場面も生徒とのやり取りを通して展開している.

T48：（中略）最後，どのような角度でおけばいいか．角度でおくって言ったけど，さっきどうするって言ったっけ．こうおくって言ったよね．ここからどのくらい上がったか．傾いたか．ということだったので，ちょっと直線の名前書いておこうか．直線 m にしてみようか？この垂線．そうすると角なになにの角度を求めればよさそうですか？

S44：∠ mOD

T49：∠mOD．そうですね．ここですね．ちょっと赤にしてみようか？道路からどのぶんき（註 1），傾いたかってことなので，ここの角度を求めましょう．最後求めるところわからなかった人もいるかもしれないけど，ここじゃあ求めてみてください．どうですか？答え出ましたか？（註 1　「ぶんき」とは量を示す言葉として使っている.）

S45：43°

T50：43°．はい，一つ目の意見 43°．まだいってない．ちょっと頑張ってみて．他は？

S46：44°

T51：44°．他にある？

S47：約 40°

T52：約 40°．この辺り？ちょっとじゃあ，43° の人？結構いる．44° の人？ちらほら．いいんだよ？40° くらいの人？41° ？42° ？いない，なるほど．どうしようか？ばらついたね．でも誤差出るのは仕方ないんだよ．実測で調べてるから．真ん中くらいにしておこうか？とりあえず．これでいい？43° くらいでいいか？じゃあ結論として 43° でおきましょうということにしておきたいと思います．多少ずれててもいいですよ？44° とか 42° でも大丈夫です.

ここまでで数学的に導き出した結論として 43°とした.

④現実場面に照らして解釈をし，現実的文脈を考慮した結論を出す．

作図の確認後，まだ作図ができていない生徒が見受けられたため，作図する時間を再度とった．作図が終わったら，作図（図 4-4）と入射と反射の法則（図 4-5）との関連を確認した．

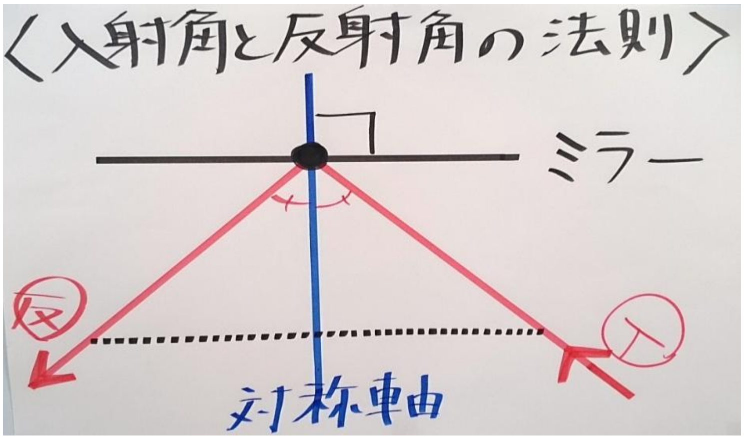


図 4-5：入射と反射の法則

T54：よし，じゃあここで確認しておきたいことがあるのですが，この作図，皆さんここまで習ってきたことを使ったからこういう作図したと思うんですが，何の法則？性質？を使ったか言える人いますか？
S48：理科でありました．
T55：おっ理科であった？いいよ，全然．何使った？
S49：入射角＝反射角．
T56：なるほどね．入射角＝反射角ね．ちなみに入射角はどこだ，これ？ちょっと直線の名前書いておくか？これ m だから，ℓにしようか？入射角どこ？
S50：どっちから見ればいい？
T57：じゃあ X から見ようか？X からみようか．X から入って Y に出ていく感じにしようか.
S51：∠XOℓ
T58：なるほど，ここね？ここが入射角．で，反射角は？
S52：YOℓ.
T59：YOℓ．ここですね．これがどういう性質なの？
S53：同じ
T60：同じ．ちょんちょんと，そういう性質ですね．はい，というのは実は自分書いてきました．見覚えある？大丈夫？じゃここに張っておきたいと思います．今の話だと，入射角，ここと反射角が同じですよ，ということを使ったということですね．皆さんいいですね．既習，習ったきたことをどんどん使ってやれるということはすごいいいことだと思います．

作図の方法と使った知識の確認をした後，作図を振り返り，実際の場面ではどのように見えているのかを確認し，現実的文脈を考慮した結論を出した．直線 OY 上は確認できるということが確認された．

T60：では，この作図振り返ってみましょうか？いいですか？まずこの作図で見えているところはどこですか？もう一回確認するよ？どこでしょう？わかる？N さんわかる？どこ見えてる．ミラーで．
S54：Y が見えてる．
T61：ということはこの直線上は見えてるってことが言える．で，なおかつここが見たいから Y が見えてる．

続いて「仮定の意識化」する上で重要な場面に入っていく．現実的文脈を考慮した結論が妥当であるか確認する．ミラー（平面鏡）を見せ，見る対象が多少移動しても確認できることを踏まえ，Y が右に動いたらどうかを確認した．すると，直線 OY 上からずれることで確認できなくなってしまうことが分かった．ここで，作図ではミラーをどうのように表記していたか問うことで，点で表していたことに目を向けることができた．具体的には T67 の発問の場面が挙げられる．ここで仮定を見直している．

T61：（中略）じゃ一つ質問．Y が例えば，ここから移動しました．ここ見えますか？見えてると思いますか？見えてると思う人？見えてないと思う人？よしじゃあ少し確認してみましょう．ここにこんなミラーがあります．鏡だよね？皆見えてるよね？これをちょっと置いてみようかな？大丈夫かな？じゃあ例えば，富田君誰か見える？
（中略）
S57：ももこさん．
T64：手挙げてもらえる？おっなるほどね？じゃあごめんね，ちょっと立ってもらっていい？（中略）ちょっと動いてじゃあ左に動いてみようか？見えるところでストップっていって．見える？あっじゃあもう一回最初から行こうか．よーいスタート．
S58：見えない．ストップ．
T65：あっじゃもう少し戻って．ちょいちょい．
S59：(笑い)
T66：もう一回，ストップっていってね．ゆっくりゆっくり．
S60：ストップ．
T67：いい？このぶんき（註 1）動きました．このぶんき（註 1）動いても見えました．いい？このミラーだと．ここまで OK？じゃあ作図に戻ります．この作図だと Y のところしか見えない．点だからここしか見えないんだよ．ちょっとずれれば見えない．いい？ということはちょっとこの作図だとあれっ？っていうところがあるんだよ．作図の方法自体はあってるんだよ．いいよね？間違ってないよね．なんだけど，作図にある前提にしているものが違う．ということになります．この作図でミラーは O ですが，図形でいうと何ですか？（註 1　「ぶんき」とは量を示す言葉として使っている．）
S61：直線，違った．
T68：O のところ．
S62：交点
T69：こう．．．点．点ね．点で見てるんです．いい？点だよね？点で見てます．

ここで提示したミラーは図 4-6 の左の平面鏡である．これを用いて動いても確認できるということは，Y も動いても見えるはずであると認識できた．

図 4-6：平面鏡（左）と曲面鏡（右）

しかし，作図ではミラーを点と見ていた．作図の方法自体は間違ってはいなかったが，結論としては妥当でないものが出たのである．ゆえに，確認に用いた平面鏡のように動いても見えるような状況を作図でもできないかという問を持たせ，そのためにはどうすればよいか考えさせた．

⑤現実場面に照らしてよりよい数学的モデルを志向し，問題解決の前提となっている仮定を見直すことで，問題解決の方法と結論の妥当性を評価し，新たにおき直す仮定を考えることで，問題解決を進展させる．

ここまでで，仮定を見直した．このことにより，ミラーは点ではなく，幅をもったものであることから，ミラーについて，点から，幅をもったものとして仮定をおき直すことで，問題解決を進めることができている．

T69：(中略）だけどミラーは見て，これは？点ですか？
S63：円？
T70：点じゃない．円というよりは，ここ．横に？
S64：広がっている．
T71：横に広がっている，幅があるんだよね．いい？幅がある．だからこの作図で置いてる前提とホントのミラーの前提がちょっと違うんですね．いい？なので，ちょっとそれを踏まえて次の場面に行きたいと思うのですが，ちょっと今の流れよくわからないよね？確認してみたいと思います．いいですか？作図の結果から．はい，まずどこが見えるんだっけ？この直線上．OY 上は見えるんだよね．ここまで OK？いいよね．じゃあここから，Y を少しずらしました．はい，そうするとどうなったんだっけ？
S65：見えなくなった．
T72：Y は見えなくなりました．じゃあ皆さんどうしたいですか？
S66：ちょっとぐらい動いても見える

ここまでで数学的モデル化過程の 1 サイクルを経たことになるが，仮定という言葉にはまだ触れず，仮定を見直し，おき直していることも触れないでいる．最終的にこの授業で行ってきたことが問題解決

の進展に関わり，現実事象と数学の関連をより強く感得させるためである．そこで以下の(2)の場面を用いてもう 1 サイクル解決を進め，その後に振り返りの活動をすることで仮定を意識化させて実感させたいと考えている．

・(2)の場面

①現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで数学的な問題場面としておき直す.

まずミラーを幅を持った状態としたため，まず大きさを決めなければならない．どのくらいの大きさか予想させた後，種類として 60cm，80cm，100cm と 3 種類あることを踏まえ，一般的な 60cm を採用することとする．

T74：（中略）いいですか，じゃあみなさんもう一度実際のミラー見てみましょうか？（図 4-7 提示）このミラーどのくらい大きいと思いますか？手でちょっと表現してみて？

S68：1m

T75：1m，直径 1m．結構大きさ色々ありそうですね．はい，実際これ売ってます．ホームセンターとかで，見たことある？

S69：ないです．

T76：ないと思うけどね．あんまりそんなミラー買いたいって言う人はいないと思うけど．売ってます．例えば，一般的には 60 センチ，80 センチ，100 センチ．だいたいこの 3 種類売ってます．ちょっとまあ，道路とか歩いてるときにこれそんくらいの大きさかなって見てみてください．たまにすごいでかいのあるから，それは 1m，100 センチだと思う．でも一般的には 60 センチ，いい？一般的には 60 センチなので今回はその 60 センチということで考えてみたいと思います．

ここで図 4-7 を提示した．パソコンで拡大の操作を行い，ミラーの大きさを実感させてある．

図 4-7：図 4-2 でミラーをより大きく見えるようにしたもの

ミラーについて設定したことで数学的な問題場面ができた．

②数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで数学的モデルを導く.

また, ミラーをおく場所についても再考しなければならない. (1)では道路の端上におけばよかったが，今回はそれだと道路にはみ出してしまい，余計に事故が増えてしまう要因になってしまう．ゆえに 60cm の幅を持ったことから半分の 30cm 分外側におくことにする．これも位置に関して仮定をおき直したとも考えられる．

T76 :（中略）一応ワークシートに書いてるよね．はい，じゃあひとつ，ミラーが幅を持ちました．60 センチ．まあ，最初ここにおいてましたよね？だけどここに置いちゃ？おけそう？まず．おいたらどうなりそう？こういうことだよね.（作図にペン合わせる.）てことは？ん？何て言った？

S69 : 通る時に邪魔.

T77 : 通るときに邪魔だよね？そう，通る時に邪魔なんだよ．なのでどうすればいい？

S70 : 少し寄せればいい.

T78 : そうだね，少し外側にすればいいよね．OK？あげる分としては直径が 60 センチだから，半径 30 センチ分あげれば，まあぶつからないかな．ということです．なので，一応，図見てみると，さっきよりも 30 センチ分あがったところにあります．先生の出しましょうか？こんな感じになるかと思います．こういう状況になりました.

このやりとりで，数学的モデルができ，新たな解決へと進んでいくことになる．ゆえに自力解決に入っていく．しかし，授業のチャイムが鳴ったため，ここで 1 時間目を終えることとした.

③作成した数学的モデルを数学的処理し，数学的結論を出す.

(2)の問いとしては Y が右に 2m 動いたとき，このミラーで確認できるかを作図により求めることとしていた．しかし，点 O から 30cm 外側に O′をおいてはいたが，(1)で求めた道路 B に対して 43°結論を生かせなかった．これにより生徒の解決はミラーの線をとり，O′を中心に 30cm ずつの幅をとる作業を生徒にさせたが，予想以上にミラーの両端の点を取るのに手間取り，とれない生徒も多数出るような状況となってしまった．かろうじてミラーの両端の点のうち，片方の点は取れた生徒も出てきていて，反射の線を描くように，入射と反射の法則を参考にして作図してみようと指示したが，あまり解決は進まなかった．結局自力解決も途中で切り上げ，全体で確認する方針へ変更して授業を展開することとした.

T9 : 1 つヒント．(1)はどこで作図したかっていうと O だよね．O で作図をしました．では次，ここだとどこで作図したらいいか．どこだと思う？さっきはここだよね？でも今はミラーに幅ができたから，どこの点で作図すればいいかな？わかる？ミラーがここからこうなった．ということは幅ができたということははじっこ？この 2 点で入射と反射の作図ができればいいから. 例えば，一つやってみようか. X から右端に入射しました. そしたら反射どうやって描けばいいかな？反射の線．わかる？反射の線を描くには，これだよね？入射あります．反射描くには？入射角と反射角は？

S7 : 等しい.

T10 : 等しいんだから，そのためのこれ，対称軸だよ，対称軸描けばいい，対称軸が描けるようにすればいい，ってことは対称軸はこれの？入射角と反射角を合わせたやつの？二等分線だよね．だからまず，この対称軸を描いてみよう．いい？対称軸描ければきっと反射の線も描けるはず．ちょっとやってみようか？

T11：よし，ちょっと皆でやってみようか？難しかったかな？いいかな．ちょっと皆でやってみよう．まずちょっと見て？この下の線，下の点，あるよね？ここにじゃまず入射したということを考えたいと思います．ここにも結局入射と反射の性質，法則を使えれば，行けるから，ここで核の二等分線，対称軸をまず引くんだよね？そしたら対称軸っていうのは？ミラーの線に対してどうなんだっけ？わかる？対称軸とミラーの線の関係ってわかる？これとこれ．

S8：垂直．

T12：垂直だね，そう，垂直ってことはこの点から垂線を引いてみよう．ちょっと一回やってみるよ？垂線を引きましょう．はい，引きました．でこの垂線っていうのが今の？これね．対称軸だよね？じゃあ対称軸からもう一つ性質があるんだけど，例えば，ここの点とここの点ってどういう関係？ここと ここ．どういう関係？覚えてる？対称軸，点と点．

S9：長さが等しい．

T13：長さが等しい．あっそうですね．長さが等しいんです．いい？んで，なおかつ，この点線と青い線の関係は？

S10：垂直

T14：そう垂直，ここも垂直なの．ここも垂直だね．ということを使うと，ここの点出したいよね？ここの点出すために，ここからどういう線引けばいい？ここの点出したい．ここと対称軸に対して？

S11：垂直．

T15：垂直だから，垂線を引けば，まずこの緑の線は引けるよね？ではまず引いてみます．X から垂線を引きます．じゃあ後どうすればいいんだっけ？この点出せばいいんだよね？どうする？この点出すために．わかる？ここと ここの長さが？同じってことはコンパスでこうとればいい．ここ交点だから，コンパスで範囲とります．これを同じ距離だけ，はいとります．そうすると，ごめんね，ずれた．こんな感じかな．ちょっとずれたな．ちょっと皆もこうやって引いてみて．同じように．対称軸まず引くと，対称軸引いてそれに対して垂線に引くと，後と等距離の点取ればいい．ということですね．ちょっとやってみてください．

ここでの解決は図 4-8 のようになっている．

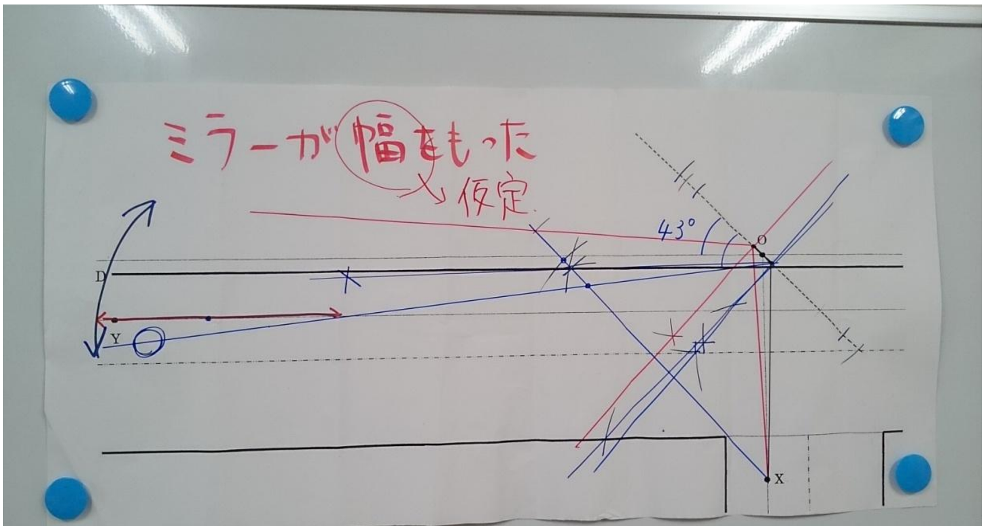


図 4-8：(2)の問題解決の作図

④現実場面に照らして解釈をし，現実的文脈を考慮した結論を出す.

ここで作図としての結論を板書したもの（図 4-8）から，Y'を確認できるかの確認を行った．作図としてはミラーの両端の 2 点 P，Q における反射の線を作図し，この 2 つの反射の線の間が見える範囲だということが分かった．そして，この範囲内に Y から 2m 移動した Y'があることから，Y'をミラーで確認することができるということを全体で共有した.

T21 :（中略）ちょっとこの図見てみて．みんな，ごめんね．ここに Y がいますね．このミラーだと見えますか？どう？
（中略）
S16 : 見える.
T24 : Y はこの範囲に入っているので，見えるということになります.

この結論により，(1)よりも具体的に範囲を持って Y を確認できるようになったことを実感することができた.

⑤現実場面に照らしてよりよい数学的モデルを志向し，問題解決の前提となっている仮定を見直すことで，問題解決の方法と結論の妥当性を評価し，新たにおき直す仮定を考えることで，問題解決を進展させる.

ここで導き出した結論をもとに，この場面における問題解決を振り返った．(1)の場面では反射の直線上しか，見える場所として確認できなかった．しかし，(2)ではミラーの両端の 2 点 P，Q における反射の線を作図し，この 2 つの反射の線の間が見える範囲だということが分かったことから，Y'をミラーで確認することができた．ミラーについて(1)から(2)へと考え直したことで，結論が変わり，より問題場面に即したものとなり，問題解決を進展させている.

T24 :（中略）よし，じゃあみんなもう一回この場面振り返ってみたいと思います．いいですか？まず作図の結果から，いきます．はい，作図の結果からどういうことが分かったでしょうか．さっきはこの直線上しか見えなかったんだよね．なんだけど，今回は？どうなったんだっけ？
S17 : 面になった.
（中略）
S19 : 面になったから Y がちょっとくらい動いても大丈夫になった.
T27 : そうそうそうそう．結局平面になったから幅を持ったんだよね．見える範囲が，ね，範囲ができました．だから見える範囲ができて，Y もこの内に入ってるから見える．ということですね．ちょっと書いておきます．ミラーが幅をもったので，見える範囲ができた.

続いて，場面を振り返り，(1)から(2)へと場面が進み，結果が変わったことが生徒にも理解できた．ここから設定した仮定を意識化させる場面に入っていく．2 つの場面の問題解決をした作図をもとに，ミラーがどのような図形であるのかを見直させている．そしてこの見直させた前提を「仮定」と定めている．そして，改めて(1)から(2)に場面が進展する際に，ミラーの仮定を点として見ていたものを線分としておき直していることを確認している．ゆえに授業においてこの場面は問題の解決が進んだことを，実感を伴って経験でき，仮定を意識化させる重要な場面であった.

ここでの作図を現実場面との比較を通して振り返る場面に入る．ここが 2 つ目の「仮定の意識化」させる場面で，本授業での 1 番重要な場面となる．

T27：(中略) Y は今ここ何だよね？いい？なんだけど，例えば，このへんだったらどう？みえる？見えない？二択．はい，見えると思う人，見えないと思う人？見えないと思う人の理由は？ここにあると見えません，なぜでしょう？
S20：見える範囲の外にあるから．
T28：そうだね．この範囲から外にいるから，見えないんだよね．いい，じゃあみなさんどうしたいですか？これ？少しずらすと，Y は見えない．さあ，というのを実はこっちもやってたんですね，どう？同じことやってるよね．いい？でもさっきよりも見てね，これよくなってるよね？場所としてはこっからここまで見えるようになった．ね，みえる，いい？さっき点でみてました．ここではどう見てたんだっけ？(2)ではミラーを？
S21：面．
T29：面？面，面，面，面の前に，ほら．ミラーは幅を持たせたんだよね．OK？ということで，この作図 2 つでは，前提としているものが変わりました．前提，最初点で考えてたんだよね．でも今度は，幅持たせました．いいかな．この前提のことを皆さん一応覚えておいてください，仮定と言います．いい？問題，現実場面の問題を解いてます，今．で，仮に定めたものですね．いい，この仮定をおくということは，この問題解決で一応やってきてましたね．で，その仮定についてどう扱っているか．見てみたいと思います．(1)で Y が見えなくなりました．はい，ここにあったのが，移動すると，Y は見えなくなりました．じゃあその理由は何だったか？ミラーを，ああ，こっちではミラーをなんて見てたんだっけ？
S22：点．
T30：そう，点で見てたんだよね？ミラーを点で見ていた．これを仮定について見直してるんですね．いいですか？では，次，どうしたい？見えるようにしたい．って言いましたね．じゃあどうするか．ミラーを幅を持たせると言いました．ここでやってるのが，仮定についてね，おき直してるんです．はい，なのでみなさん，(1)から(2)に来るとき，仮定についておき直し，仮定について見直し，おき直したりしてるということで，現実場面の問題解決で，非常に大事なことをしているんです．いい？大事なことやったから，最初直線だったよね．見える範囲がなかった．けどもやったら，次やったら幅を持って，広い範囲見えるようになりました．いいよね．ここまで OK？なので，今時間なくなっちゃったから，あれなんだけど，えーと，仮定について，見ていくことは非常に大事なんだってことを，えーと，覚えておいてください．

このあと，さらに Y がさらに移動して 9m の地点にいる場面について考えると，平面鏡では見えないことから，さらに広い範囲を見るためにはどうしたらよいか考えさせた．ここで実際のミラーの縮小した曲面鏡を提示し，表面が曲がっていることに気付かせ，ミラーを円の一部と仮定をおき直して解決を進めた．ここで提示した曲面鏡は以下の図 4-7 の右側のものである． ここまでで(2)の場面が終えた．ここから(3)の場面に入っていくところであったが，授業時間との関係からワークシートでの問題解決はせず，PC ソフトの GeoGebra による全体の様子の把握へと授業の方針を変更した．曲面鏡を用いた事による見え方の様子を確認するために，まず曲面に対する入射と反射の様子を確認し，これまで活用してきた入射と反射の法則がここでも使えるのかを実験を通して確認した．実験としてはアルミホイルを巻いた曲面にレーザーを入射し，それがどのように反射しているかを方眼紙に書いて確認するという方法を

とった．ここでの実験の様子として図 4-9 のように行った．

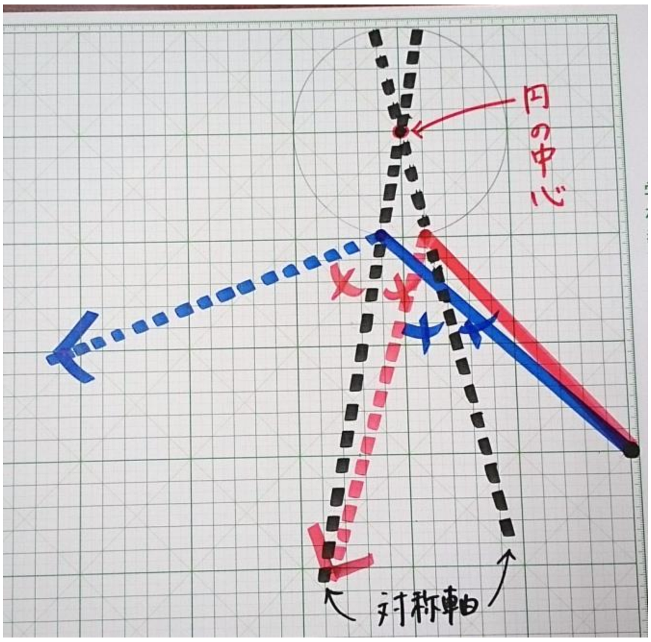


図 4-9：実験の様子

T37：そうそう，さっきは点だった，幅を持った状態．あっじゃ今度は円の一部としてみよう．ということで，仮定をおき直してるんですね．はい，実際どうですか？この平面と曲面だと．見え方どうですか？わかる？どっちの方が広く見える？こっちだと思う人？こっちだと思う人？そうなんだよ．こっちの方が広く見える．なので，ミラーは実は円の一部かもしれない．っていう仮定が置けるんですね．で，ちょっと時間がないので，えーと曲面でも入射と反射が起こってるんですね．ね，というのを一瞬実験で見せたいと思います．（中略（実験場面））パソコンで見て見たいと思います。はい，GeoGebra ってソフトなんだけど，青い線が，さっきの平面幅を持たせた状態の鏡，さっきのこれ平面鏡って言います．これを曲面鏡と言います．で赤い方，映ってない，青いほうが平面鏡，赤いほうが曲面鏡の反射になります．いい？平面鏡と曲面鏡比べてみると，見える範囲は？

S32：広い．

S33：違う．

T38：違う．どっちが広い？

S34：赤．

T39：そう，赤の方が広いんだよね．だから曲面鏡っていうのは，平面鏡よりもはるかに広い範囲が見えるんですね．いい？で，最後．Y が進みました．で，平面．曲面鏡でもこの辺まで見えるよね．ここまで，赤が．わかる？じゃあ残りのここ？もうちょっと角度変えようか？ここまでは曲面鏡で見える範囲だよね？わかる？じゃあここはどう？

S35：自分の目で見える．

T40：そうそう，自分で見えるよね．X から．実はこの緑の線が X から見える範囲．X がここから角までは見えるという線を引いたものです．なので，曲面鏡になると，ここからここまで全部見えるという形になるかと思います．なので，やっぱりミラー，曲面鏡はすごいんだな．ということが分かってもらえたらな．

反射の線に関しては結果として GeoGebra で確認することとした．これにより，移動した Y”は曲面鏡での見える範囲に入っていることから，X から自分の目で確認できる範囲と合わせて，結論として曲面鏡を用いることで広い範囲を見るという課題の結論にたどりついたこととした. GeoGebra による提示は図 4-10 のような図をスクリーンで提示した.

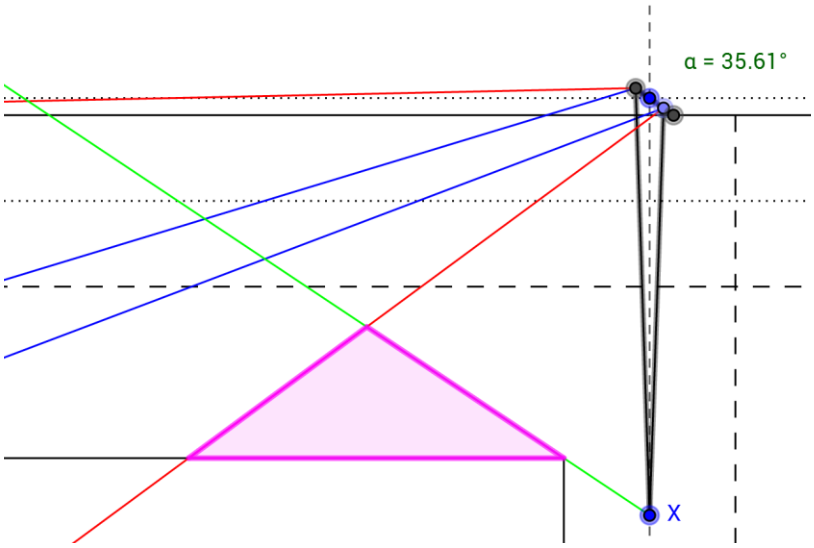


図 4-10：GeoGebra による図の提示

この後まとめとして，「仮定の意識化」について触れ，「仮定を見直」し，「仮定をおき直す」ことのように「仮定」について考えることは重要であることを最後に触れて授業を終えた.

T40：（中略）はい，ということで，ちょっと今日のまとめに入りたいと思います．（中略）はい，まとめのプロント配ります．はい，まず(3)まで行けなかったので，(3)ないんですけど，(1)ではミラーをどのように見てましたか？（チャイム）ミラーを？点で見てたんですね．で，(2)では？平面，平面で見ていた．一応書いておこっか？(3)ではこれだよね，円の一部としてみたんだよね．ごめんね，そこまで行けなくて．はい，それを踏まえて，最後のまとめのところ，今日の問題解決で作図と結論，作図の結論と，実際の場面を振り返ってみてどういうことがわかりましたかっていうところを少し書いてみたいと思います．まず出た答えとはい，例えば，平面で見たときは平面鏡見せました．いい？実際のものを見せました．現実場面のものを見ました．比べると，まず何をしましたか皆さん，あっ Y が見えないな，ミラーを平面で見ていたな，これ何をしたんですか？はい，仮定を見直したんですね，で，最後どうしましたか？ミラーに幅を持たせようということで，仮定をおき直したんですね．おきなおした．はい，これによって，問題の解決がどうなったでしょうか？みなさん．

S35：つながった．

T41：つながった．ですね，ちょっと不十分かもしれませんが，なので，仮定について考えることは？どうだったんですか？

S36：大事．

T42：大事なんです．ほんとは．ちょっと今日一日で，伝わらなかったかもしれないんですけど．大事なんです．ということを心にとめて，これからの問題，日常場面での問題を解決する機会があったら数学をちょっと使ってみてほしいなと思います．

最終的な作図の結論としては図 4-11 のようになった．

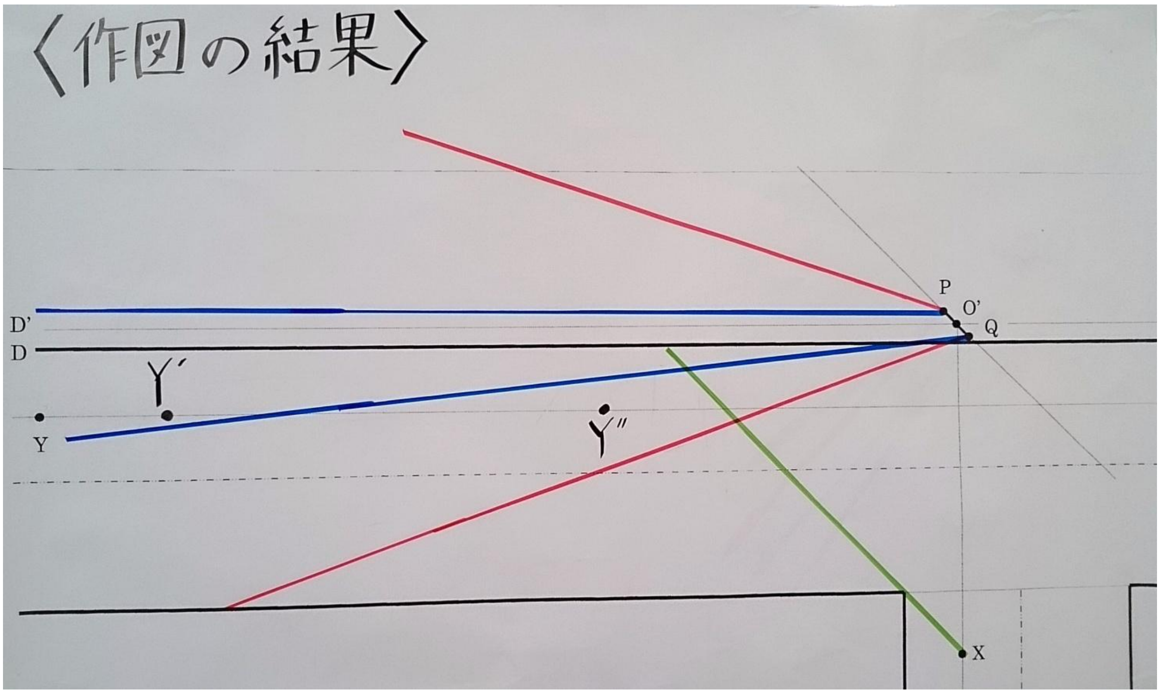


図 4-11：作図の結論

ここまで授業の実際について整理してきた．この授業の板書としては次のようになっていた．また，ホワイトボードの右側にスクリーンを設置していた．

図 4-12：板書（全体の様子）

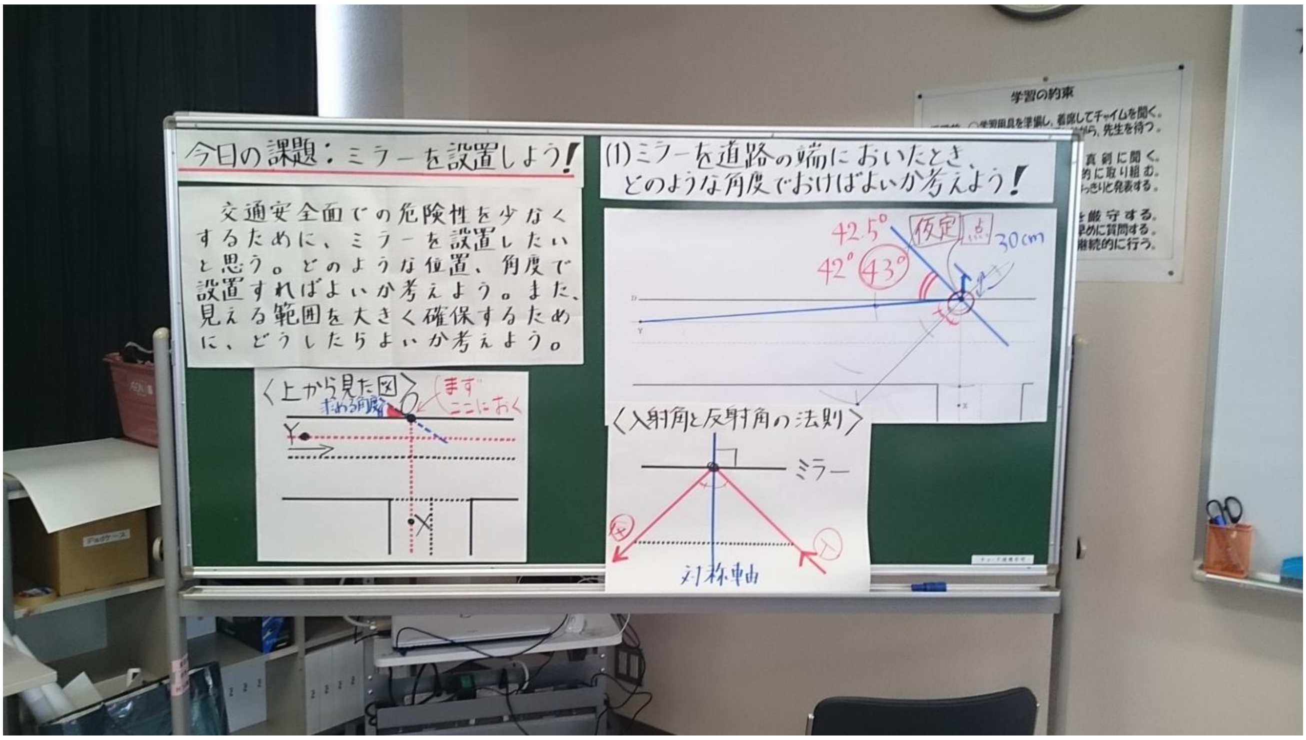


図 4-13：板書（小黒板の様子）

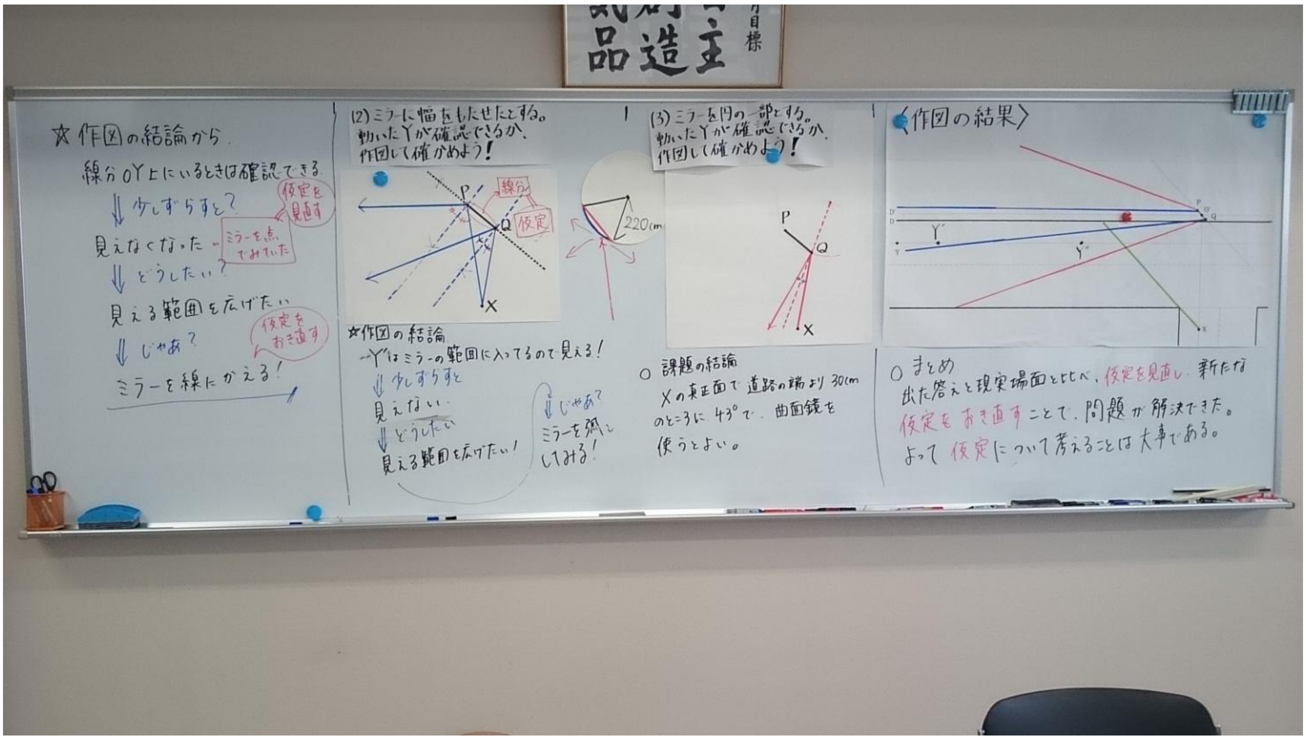


図 4-14：板書（ホワイトボードの様子）

以上で授業の実際について整理し，この内容を次項の実践の分析につなげる．

第 2 節　授業実践の結果の分析

本項の目的は，本教材の授業実践で明らかになった，生徒の現実事象の問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果の有効性についての成果並びに課題を，生徒の問題解決のワークシートや授業感想のデータから分析・考察を，本研究の目的を踏まえ 2 つの分析の視点を挙げ，本実践で達成されたか明らかにすることである．分析の視点は以下の 2 点とする．

1. 「仮定の意識化」により，問題解決が進展していたことを感得できたか
2. 「仮定の意識化」により，現実事象と数学の関連が感得できたか

以上の 2 点について生徒のワークシートやまとめのプリント，そして授業での教師と生徒の会話を整理したプロトコルから質的に分析し，成果と課題を明らかにしていく．

1. 「仮定の意識化」による問題解決の進展に関する分析

まず 1 の視点の成果についての分析をする．本実践は本研究で同定した数学的モデル化過程に沿って整理された学習展開で進められている．ゆえにこの学習展開に沿って学習が進められていれば，同定した数学的モデル化過程の評価の場面で「問を生成し，仮定を見直し，おき直す」ことで「仮定の意識化」がなされれば，自然と問題解決が進展するようになっている．ここで同定した数学的モデル化過程と学習展開の構想を以下に挙げておく．

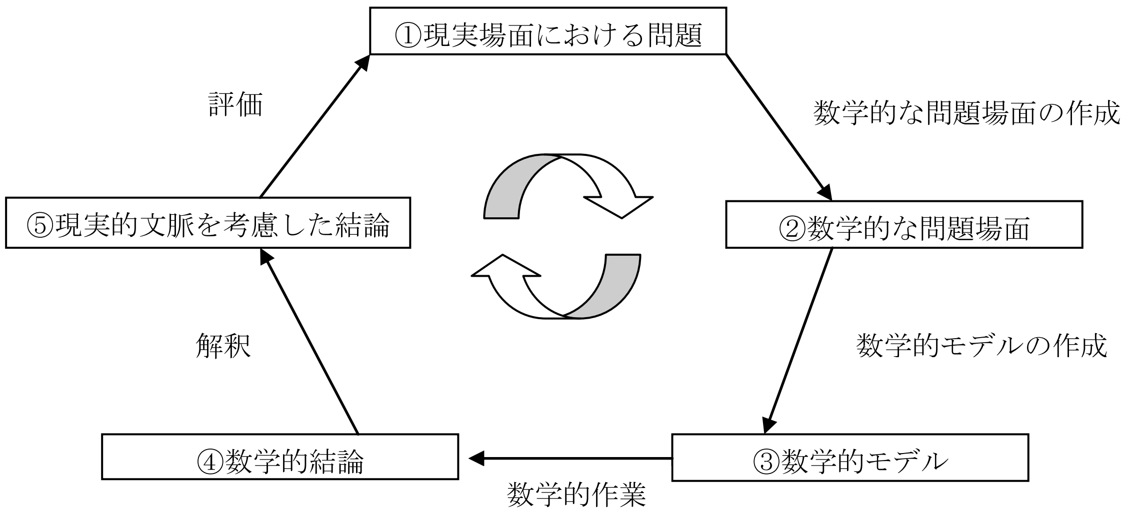


図 4-15：本研究における数学的モデル化過程

この数学的モデル化過程に沿って構想された学習展開が表 4-2 であった．

表 4-2：本研究における数学的モデル化教材を用いた学習展開の構想

①現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで数学的な問題場面としておき直す.
②数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで数学的モデルを導く.
③作成した数学的モデルを数学的処理し，数学的結論を出す.
④現実場面に照らして解釈をし，現実的文脈を考慮した結論を出す.
⑤現実場面に照らしてよりよい数学的モデルを志向し，問題解決の前提となっている仮定を見直すことで，問題解決の方法と結論の妥当性を評価し，新たにおき直す仮定を考えることで，問題解決を進展させる.

これをもとに，実際に問題解決が進展していたかどうかを見ていく．生徒の問題解決の様子が現れるワークシートの例を挙げる．まず(1)については以下の通りである．

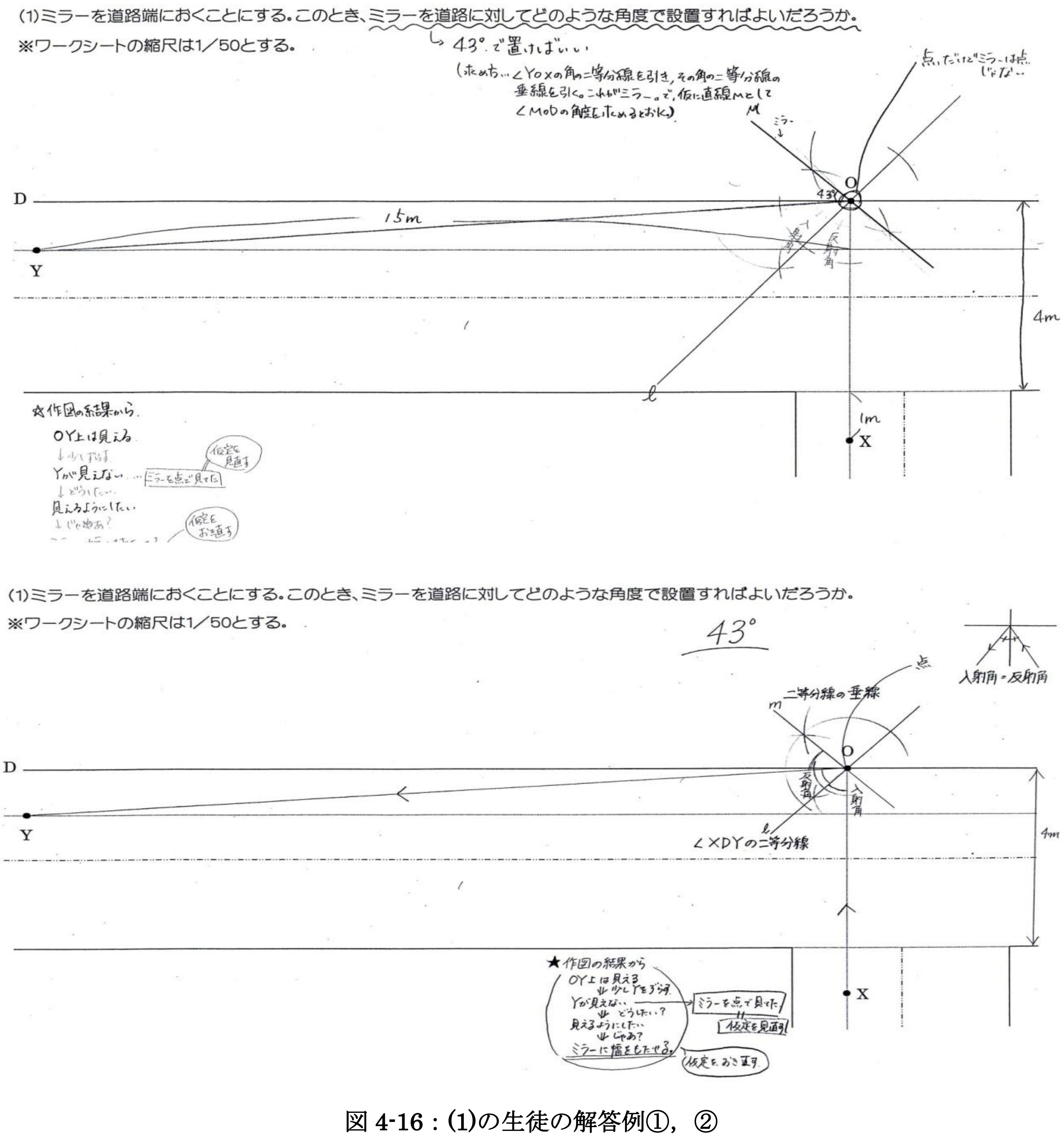
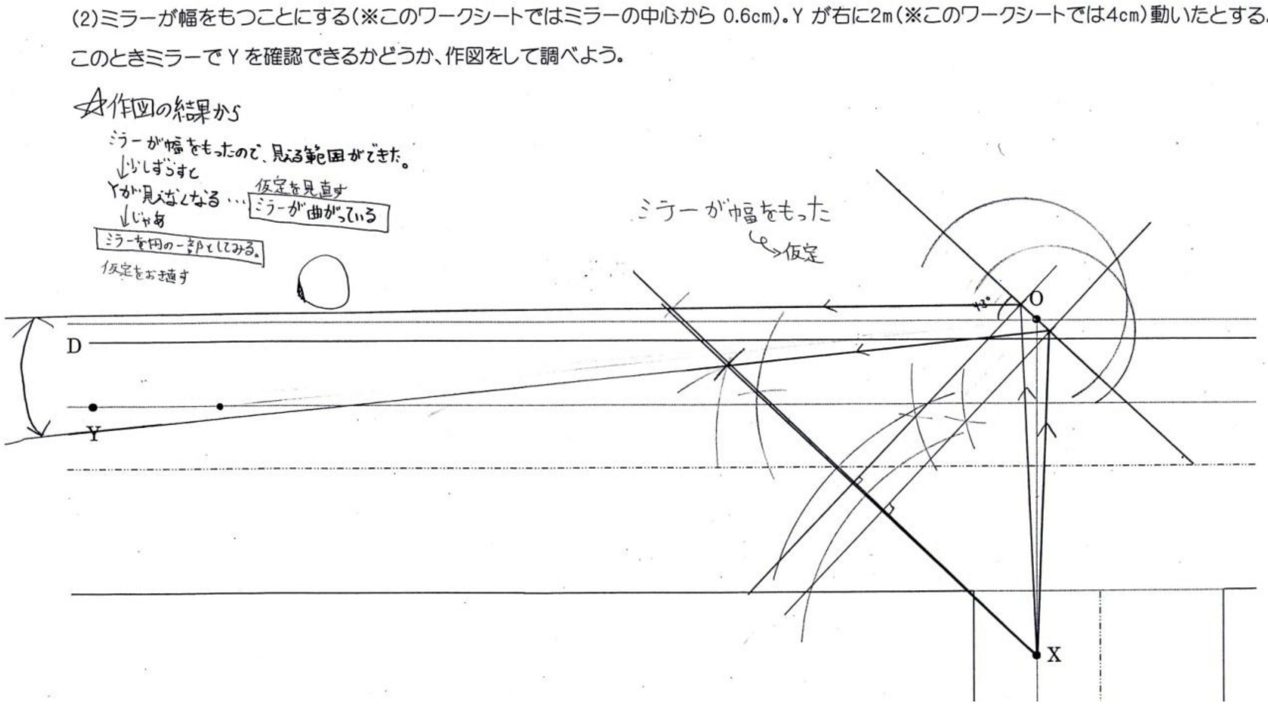


図 4-16：(1)の生徒の解答例①，②

(2)の解答に関しては以下の通りである．



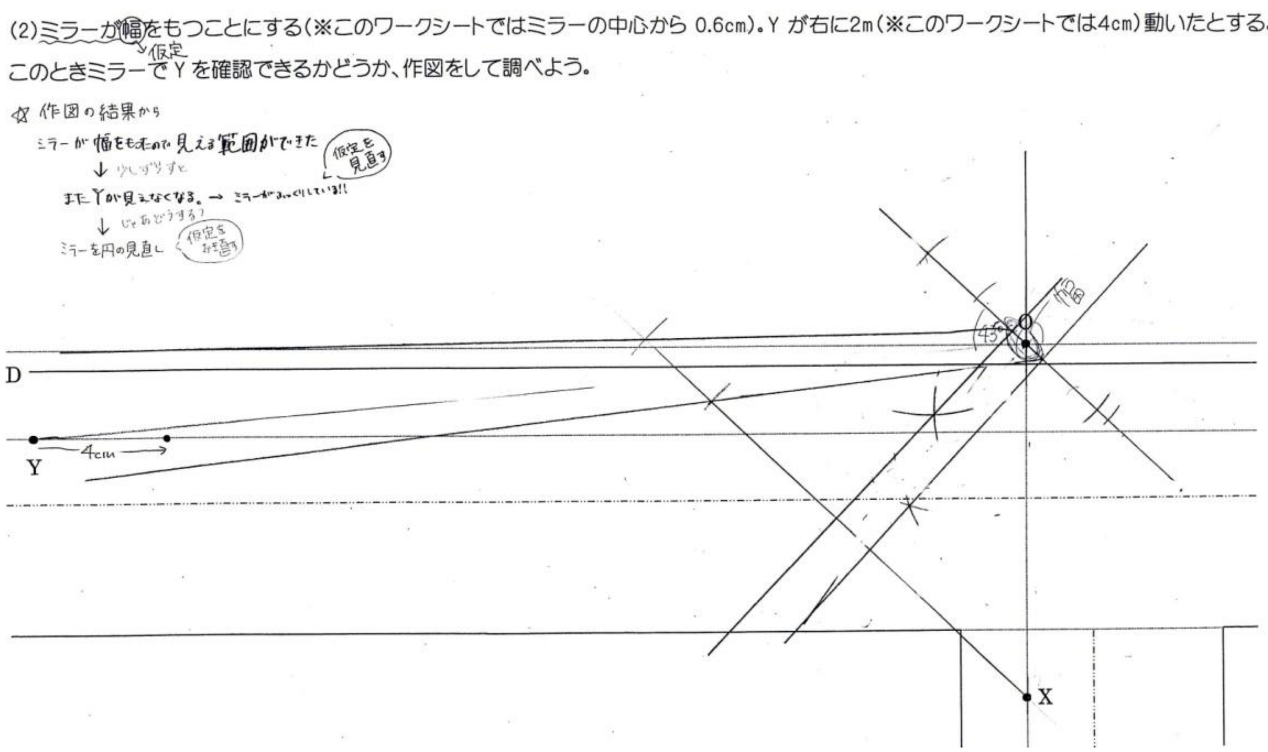


図 4-17：(2)の生徒の解答例①，②

上記のような問題解決ができれば本実践では理想的であると考える．まず数学的な問題場面の作成と数学的モデルの作成を学級全体で行い，その後自力解決をし，その結論と現実的文脈を考慮した結論を出す．そしてよりよい数学的モデルを志向して「問を生成し，仮定を見直し，おき直す」ことで「仮定

の意識化」をする場面がそれぞれなされている．これは授業の実際にも明らかである．よって数学的モデル化過程に沿って問題解決はできていたと考える．筆者としてはこの教材の実践は現実事象の問題を直接解決する機会があまりない生徒が多いことを想定し，定式化と数学的モデルを作成するのは学級全体で行い，理解を深め，その上で問題解決を自己解決で行うこととした．本実践で数学的モデル化過程において生徒が思考してほしいのは，解釈の場面で数学的結論と現実事象を照らし合わせて，結論が妥当か確認することと，評価の場面でよりよい数学的モデルを志向して，現実事象を見据えて仮定を見直し，おき直すことである．これらが本実践の中心となる学習である．ゆえに，生徒がこの一連の流れで問題解決することの経験を積むことができれば，今後の現実事象の問題解決をしていくためのきっかけになればいいのではないかと考える．ゆえに以上のような問題解決ができた事は本教材の有効性が示せた一つの要因であると考える．

また授業プロトコルの分析から，生徒が問題解決の進展を感得するきっかけとなる場面があった．まず(1)の問題解決後の振り返りの場面でのやり取りが以下の通りである．

T71：横に広がっている，幅があるんだよね．いい？幅がある．だからこの作図で置いてる前提とホントのミラーの前提がちょっと違うんですね．いい？なので，ちょっとそれを踏まえて次の場面に行きたいと思うのですが，ちょっと今の流れよくわからないよね？確認してみたいと思います．いいですか？作図の結果から．はい，まずどこが見えるんだっけ？この直線上．OY 上は見えるんだよね．ここまで OK？いいよね．じゃあここから，Y を少しずらしました．はい，そうするとどうなったんだっけ？

S65：見えなくなった．

T72：Y は見えなくなりました．じゃあ皆さんどうしたいですか？

S66：ちょっとぐらい動いても見える

T73：見えるようにしたいんだよね？いいよね？はい．みえるようにしたい．じゃあ，どうするの？今やったよね．ミラーに，ミラーを点でなくて？

S67：幅を持たせる．

T74：ミラーに幅を持たせる．ということですね．はい，こういう風に次考えてみたいと思います．

(1)の場面では仮定を見直す，そしておき直すといった言葉は使わず，現実事象との照らし合わせから問題解決を進展させようとしている．(1)で導き出した結論で満足せず，よりよい結論を求めていこうという姿勢を引き出している．この場面でのやりとりは(2)以降の仮定を意識化させる場面の基礎となっている．生徒は仮定を意識化することで問題解決が進展するという経験をしたことがないという前提であるので，教師から生徒に思考させるようなやり取りをすることで，困難を伴う思考に対峙させ，どのように考えるべきかを促している．

続いて(2)の場面について見ていく．(2)の問題解決後に再び仮定を意識化させている．(1)では点と見ていたものを，(2)ではミラーに幅を持たせたことで見える範囲ができたことで，仮定を見直し，おき直すことで，仮定が意識化され，設定した仮定が結論に影響を与えていることを実感させている．ここではまだ教師の発問から仮定を意識化する経験を実際にしている段階であると言える．具体的な場面のプロトコルを挙げる．

T28：（中略）いい，じゃあみなさんどうしたいですか？これ？少しずらすと，Y は見えない．さあ，というのを実はこっちもやってたんですね，どう？同じことやってるよね．いい？でもさっきよりも見てね，これよくなってるよね？場所としてはこっからここまで見えるようになった．ね，みえる，いい？さっき点でみてました．ここではどう見てたんだっけ？(2)ではミラーを？
S21：面．
T29：面？面，面，面，面の前に，ほら．ミラーは幅を持たせたんだよね．OK？ということで，この作図 2 つでは，前提としているものが変わりました．前提，最初点で考えてたんだよね．でも今度は，幅持たせました．いいかな．この前提のことを皆さん一応覚えておいてください，仮定と言います．いい？問題，現実場面の問題を解いてます，今．で，仮に定めたものですね．いい，この仮定をおくということは，この問題解決で一応やってきてましたね．で，その仮定についてどう扱っているか．見てみたいと思います．(1)で Y が見えなくなりました．はい，ここにあったのが，移動すると，Y は見えなくなりました．じゃあその理由は何だったか？ミラーを，ああ，こっちではミラーをなんて見てたんだっけ？
S22：点．
T30：そう，点で見てたんだよね？ミラーを点で見ていた．これを仮定について見直してるんですね．いいですか？では，次，どうしたい？見えるようにしたい．って言いましたね．じゃあどうするか．ミラーを幅を持たせると言いました．ここでやってるのが，仮定についてね，おき直してるんです．はい，なのでみなさん，(1)から(2)に来るとき，仮定についておき直し，仮定について見直し，おき直したりしてるということで，現実場面の問題解決で，非常に大事なことをしているんです．いい？大事なことやったから，最初直線だったよね．見える範囲がなかった．けどもやったら，次やったら幅を持って，広い範囲見えるようになりました．

この場面の教師と生徒のやりとりで，特に T30 の発言が問題解決の進展していることを表している．つまりここまでに至るやりとりは仮定を意識化させる上で，非常に重要な過程となっていることが分かる．例えば，T28 で(1)で点としていたミラーを，T29 で(2)ではどのようにみているかを生徒に考えさせている．このような場面を問題解決において設けることで，生徒が仮定を意識化し，問題解決の進展を感得するきっかけになったと言える．

(2)の問題解決後は，当初の予定では(3)の場面に進む予定であった．しかし，時間の都合で，問題解決をする時間を生徒に与えることができなかった．しかし，(2)でミラーを平面鏡として仮定をおいていたことから，(3)では曲面鏡を提示し，表面の形状を生徒に観察させることによって，生徒がミラーを円の一部，つまり円の弧であると仮定をおき直すことができている．この場面が次のプロトコルになる．

T30：（中略）もうひとつミラーを見せたいと思います．何かわかりますか？
（中略）
S28：円．
T34：円だよね．これ．そうそう，これは，円の中で，ここがミラーってことは，ミラーは円の？
S29：一部．
T35：一部って考えられるかもしれない．いい？えーと，ミラーは曲がってる．そうすると，どうしようか，今ミラーを円の一部っていったけど，そういう風にまた仮定をおき直してみようか？ミラーを円の一部としてみることにしたいと思います．いい？もう一回見てみると，はい，Y が見えない．そしたらミラーがまがってるな．ここで何した？みんな．仮定を？
S30：見直す．
T36：そうそう，仮定を見直したんだよ．だって，ミラー平面だと思ってたのが曲がってるっていったんだよね，仮定を見直してるんです．ではい，ミラーを円の一部としてみよう．この時仮定を？どうしてる？
S31：おき直してる．
T37：そうそう，さっきは点だった，幅を持った状態．あっじゃ今度は円の一部としてみよう．ということで，仮定をおき直してるんですね．はい，実際どうですか？この平面と曲面だと．見え方どうですか？わかる？どっちの方が広く見える？こっちだと思う人？こっちだと思う人？そうなんだよ．こっちの方が広く見える．なので，ミラーは実は円の一部かもしれない．っていう仮定が置けるんですね．

以上のプロトコルの場面より，問題解決の序盤では仮定について意識することの意味の理解があまりなかったかもしれないが，各場面において問を生成し，仮定を見直し，おき直すことで，仮定を意識化させ，問題場面が進展していくにつれ，生徒自ら仮定をおき直して問題解決を進展させようという姿勢をこの授業中で得られたと考える．実際時間がないにもかかわらず，生徒はミラーの形状に着目することができ，曲面鏡にすると仮定をおき直すことができている．さらに，仮定を意識化することで，定式化の充実につながり，数学的モデル化での現実場面の解決の質を高めている．本研究では先に同定した数学的モデル化過程で，数学的結論が出た後，これが現実的文脈に照らしてどのような意味を持つのかを解釈し，「⑤現実的文脈を考慮した結論」を出す．これが最終的に現実場面に対して適切か評価することで，問題解決がなされたとする．もし結論が妥当でなければ問を生成し，仮定を見直すとともに，おき直す仮定を考えることで問題解決を進展させる．これにより生徒が現実事象と数学の関連を意識したものになると考えられるということを重視していた．また，先に示した生徒の解答のワークシートにもあるが，(1)では仮定を見直し，おき直す仮定に関する板書を書いていない生徒が，18 名だったのが，(2)では 26 名に増えていた．特に書くようにと教師から指示がなくても板書をメモする人数が増加したということは，多少なりとも仮定を見直したり，おき直したりすることで仮定について考えることが大事なことであるとの意識は持たせられたのではないかと考える．ここからも一定の効果は見いだせるのではと考えた．　実際にワークシートに仮定を意識化した場面の思考過程の記載している例として，図 4-18 のようなものが見られた．

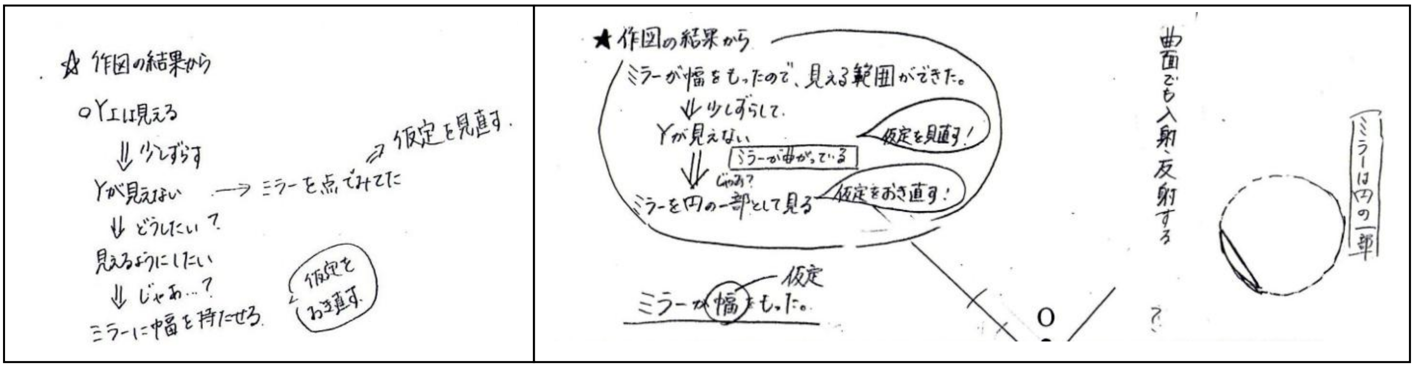


図 4-18：仮定を意識化させた場面の板書（左が(1)，右が(2)）

このようにも本実践における問題解決を経て，仮定を意識化することができたことで，実際に以下の図 4-19 のような感想を持つ生徒もいた．

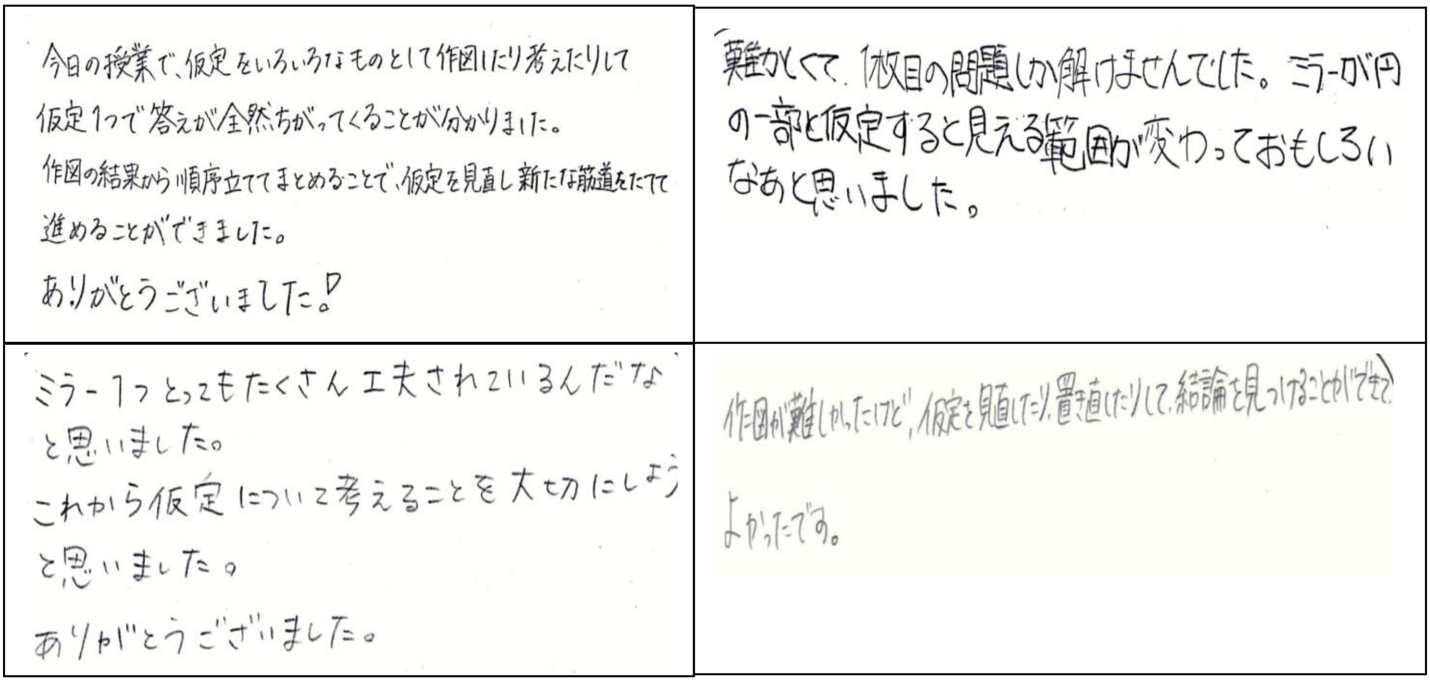


図 4-19：生徒の感想①

以上のように，仮定に意識化することで，問題解決の結論が変わったことを理解することができた生徒がいた．また，ミラーについても最初点としておいたのは教師の意図的なものではあるが，そこから線分，さらに円の弧であると見直すことで実際に見える範囲が変わっていったことは実感できた生徒が多かったのではないかと考える．さらに，現実場面を考えると，ミラーも最初から曲面鏡であると分かっている生徒は多くないと考えると，単純化された場面から徐々に数学的モデルを洗練し，問題解決を進展させていったことは生徒にとっても理解を深めていく上で，非常に有効な思考過程であったのではないかと考える．生徒にとって実際のミラーが曲面鏡でそれにより日常生活がどれだけ大きな恩恵を受けて生活しているかも，数学を活用して解決することで理解できたと考えられる．ゆえに，設定した仮定を意識化させることは有効な視点であったと言える．

一方で課題も挙げられる．各問の解決を通して問題解決の進展を感得してほしいのだが，生徒全員が問題解決をできたというわけではない．特に(2)の問いとしてはＹが右に 2m 動いたとき，このミラーで確認できるかを作図により求めることとしていた. しかし, 点Ｏから 30cm 外側にＯ′をおいてはいたが, (1)で求めた道路Ｂに対して 43°結論を生かせなかった．これにより生徒の解決はミラーの線をとり，Ｏ′を中心に 30cm ずつの幅をとる作業を生徒にさせたが，予想以上にミラーの両端の点を取るのに手間取り，とれない生徒も多数出るような状況となってしまった．かろうじてミラーの両端の点のうち，片方の点は取れた生徒も出てきていて，反射の線を描くように，入射と反射の法則を参考にして作図してみようと指示したが，あまり解決は進まなかった．結局自力解決も途中で切り上げ、全体で確認する方針へ変更して授業を展開することとした。しかし，作図ができない生徒が多数出た．作図ができない理由として, 点Ｏ’を中心にミラーの幅 60cm をとれないもの, 点Ｏ’と移動後の点Ｙ’をむすんでしまったもの, 幅をとってもその両端の点で入射と反射の線の作図ができないもの，そして両端の点における対称軸がかけないものなどが挙げられる．図 4-20～4-24 が誤答の例と生徒の感想例である．

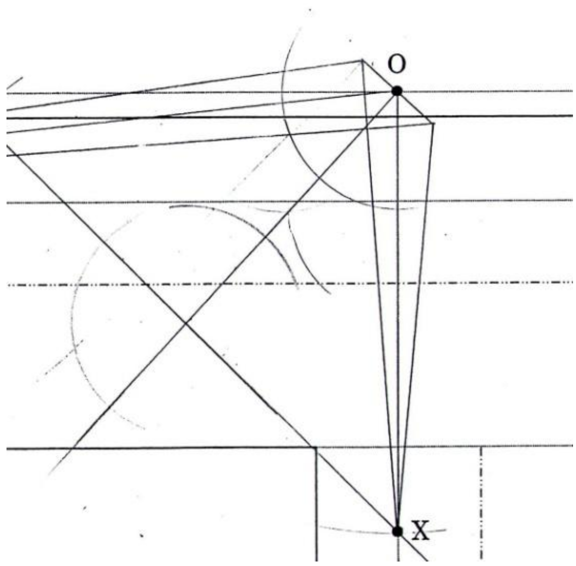


図 4-20：点Ｏを中心にミラーの幅 60cm をとれないもの

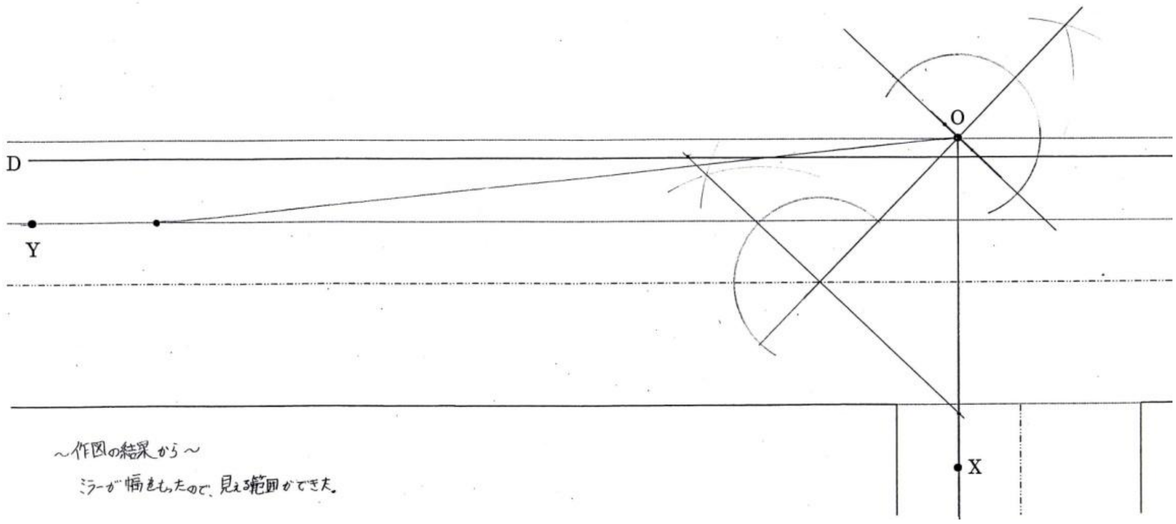


図 4-21：点ＯとＹ’を結んでしまったもの

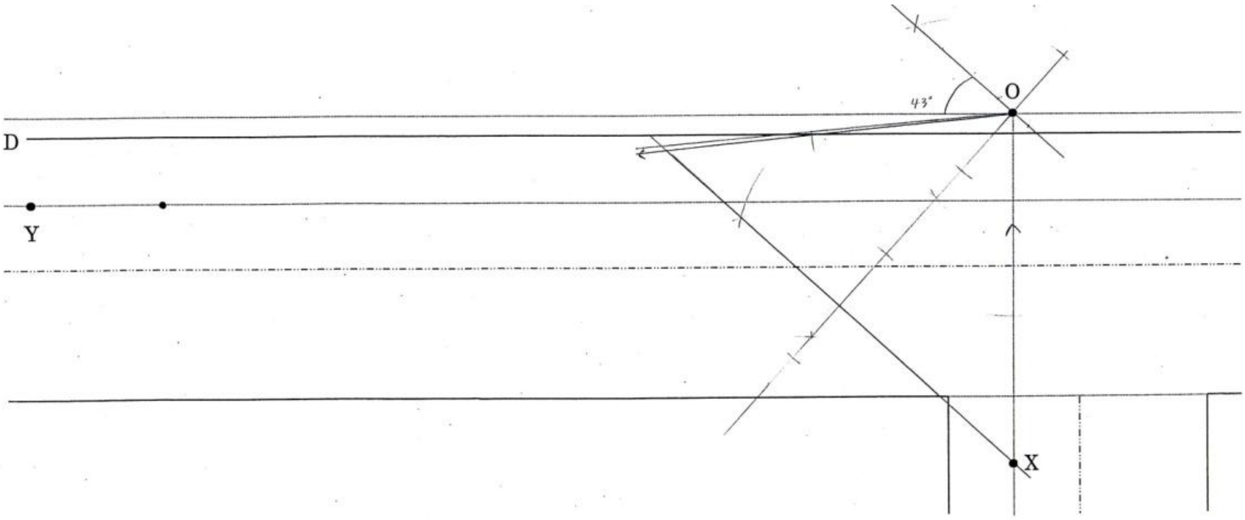


図 4-22：両端の点で入射と反射の線の作図ができないもの

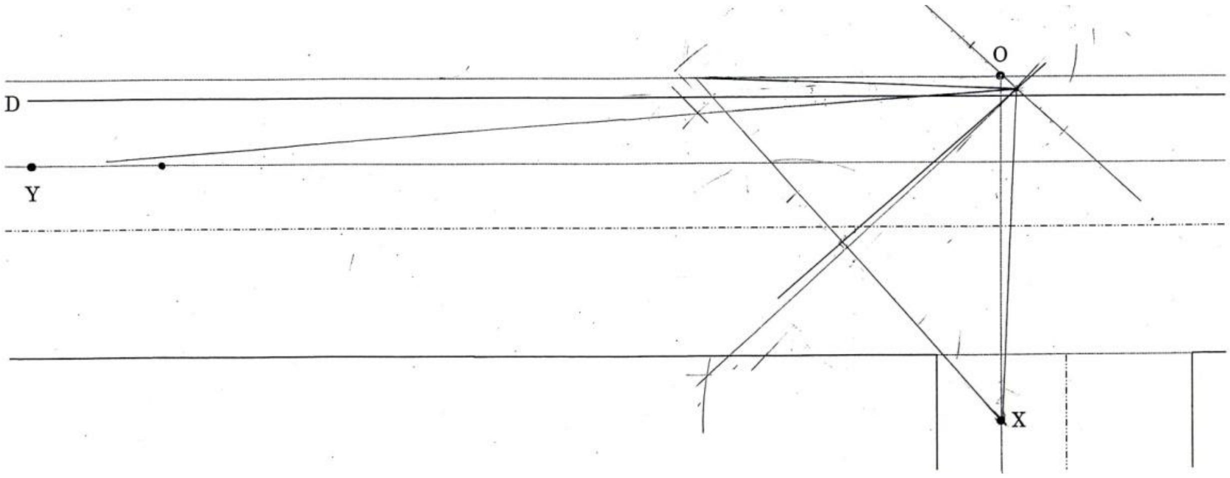
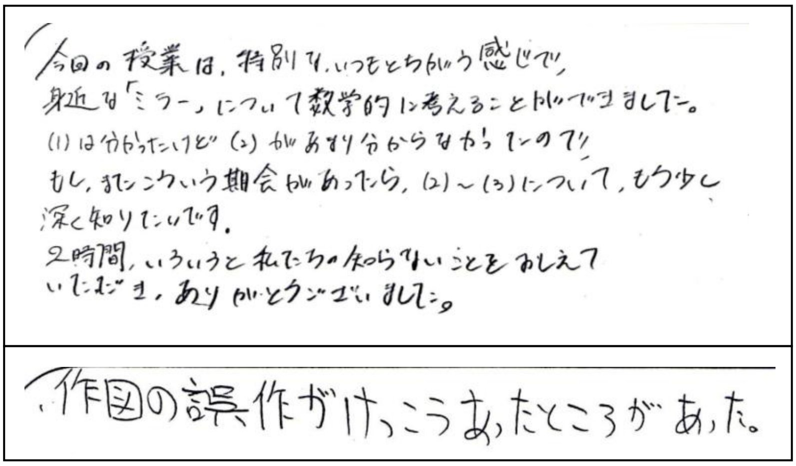


図 4-23：両端の点における対称軸がかけないもの


今回の授業は、特別な、いつもとちがう感じで、
身近な「ミラー」について数学的に考えることができました。
(1)は分かったけど(2)があまり分からなかったので、
もし、またこういう機会があったら、(2)～(3)について、もう少し
深く知りたいです。
2時間、いろいろと私たちの知らないことをおしえて
いただき、ありがとうございました。

・作図の誤作がけっこうあったところがあった。

図 4-24：生徒の感想②

(1)に関しては最終的に 37 名が作図できていた．一方で，これらの誤答が挙げられたように，(2)については，5 人しか完全にできていなかった．これは教師側として，まず生徒が解決できるだろうと考えていたレベルを達成できなかったのは，(1)から(2)への数学的な問題場面の作成や数学的モデルの作成の定式化が飛躍しすぎた事が一つの原因であると考える．具体的には，(1)ではミラーを点としておいていたため，幅を考慮しなくてよかったが，(2)では 60cm の幅を持ったため，ミラーの位置もその半分の 30cm 分上げることとした．しかし生徒の実態を考えると，定式化が困難であったのに，一度にミラーの形状を変えるだけでなくミラーの位置も変えてしまうと，問題解決のためにすべきことが多すぎるため，すべてを考慮するのは難しかったのではないかと考えられる．今回の場面では，ミラーに幅を持たせても，道路 B の端におくということでも対応できたと考えられる．ゆえに，できるだけ現実事象を生かした数学的な問題場面や数学的モデルを使いたいが，一方で生徒の思考に混乱をきたさない程度に設定すべき内容の整理と提示する手順も考えるべきであると考えた．このことが実践することで見えてきた生徒の解決における定式化の過程の困難性であった．

2.「仮定の意識化」による現実事象と数学の関連に関する分析

続いて 2 の視点の分析に入る．まず成果について見ていく．生徒の実態として，数学という教科に対し，勉強して将来役立つといったポジティブな考えをあまり抱いておらず，また，生徒が数学に対して積極的に勉強したいといった意欲・関心・態度の観点からみると，結果が PISA 調査から明らかになっていた．これを改善するために,「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決ができれば，現実事象と数学の関連の感得ができると考える．

その見解のもとで，本実践を行い，生徒の反応を見てみる．先程と同様に，授業後に生徒が書いた感想について図 4-25 のようなものがあった．

今回の授業でカーブミラーは平面ではなくて曲面であり、より広い範囲を見ることができることが分かりました。身近なところに数学があることを知り、いろいろ発見してみたらおもろいかなぁと感じました。
ふだんよくみかけるロードミラーのことについていいことを学べました。よくみかけるミラーはてきとうに設置していると思いましたが、今日の授業でその思いも変わることができました。数学は身のまわりによく使われていることが分かりました。とても興味深い授業で楽しかったです

図 4-25：生徒の感想③

これを見ると，身近な場面で数学が使われていることを実感できている生徒がいた．ミラーの設置という，一見すると数学と関係ないような事柄でも数学の知識を中心に活用することで解決でき，その性質について理解できるということは生徒のこれまでの経験としてあまりないものではないだろうか．生徒の実態として現実事象と数学の関連を意識できない生徒が多いという現状の中で，このような感想を持てた生徒がいることは現実事象と数学の関連の感得がなされたと言える一つの例として挙げられる．つまり，本実践を通して身近なものを数学的に見たり考えたりすることで問題解決ができたことで，生徒の数学観がよりよく変容したとも言える．ゆえに，数学的モデル化の教育的価値の 3 つの価値も果たせたと言える．

一方課題については，身近な場面で数学が使われていることを実感できている生徒がいた一方で，内容が理解できなければ数学観がより良い方向へ変容することはあり得ない．例えば，図 4-26 のような生徒からの感想があった．

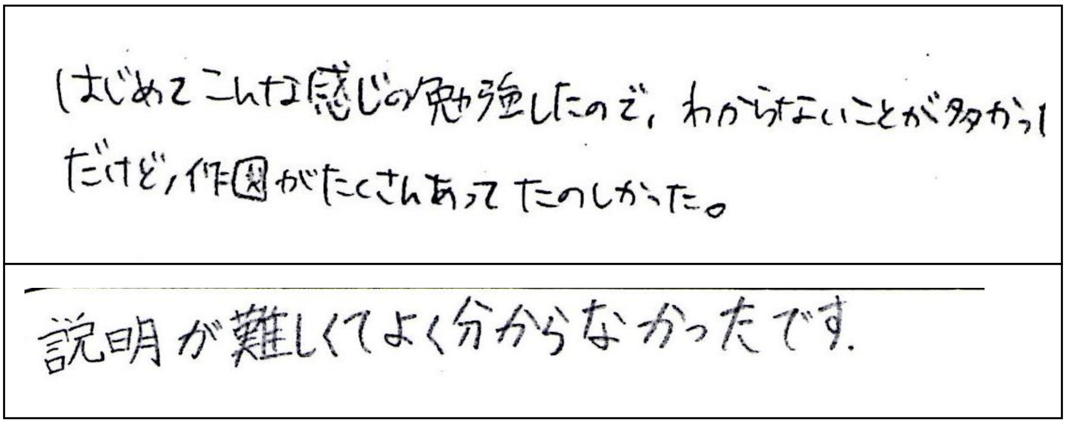


図 4-26：生徒の感想④

本実践の内容は生徒にとってあまり経験のない，現実事象について数学を用いて問題解決するものである．よって，問題解決の段階で仮定を意識化する意味の理解ができなかったり，授業や教材についてネガティブな感情を抱いてしまえば，生徒の実態改善を果たすどころか逆に数学に対しての姿勢を悪化させてしまうことにつながってしまう．現実事象の問題を「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決をするならば，より生徒の実態に配慮し，適度な困難性を持ちつつも，生徒の思考に混乱をきたさない程度に設定された教材を，生徒の実態が改善されるのと合わせて教材の難易度も挙げ，最終的には生徒一人一人が現実事象の問題解決に取り組めるような配慮が求められることが明らかになった．このことが実践することで見えてきた生徒のより良い数学観の変容を促すための困難性であった．

第 3 節　本章の総括

本章の意図は第 1 章，第 2 章で明らかにした主張のもと，第 3 章で開発した「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の授業実践の実際を整理し，授業実践で明らかになった教材の成果と課題の量的・質的な分析を行い，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材としての価値について明らかにすることである．

第 1 節では，12 月 8 日（月）3，4 時間目の計 90 分で国立大学附属中学校の 2 年 A 組 39 名を対象に授業を行った授業実践の実際を，授業のプロトコルや使用した教具などを取り入れながら整理した．

本実践で扱った教材は以下の「ミラーを設置しよう」という，交通事故対策のために丁字路における道路反射鏡（以下ミラー）の設置という日常場面の問題解決に関する問題であった．

〇今日の課題　『ミラーを設置しよう！』

> 交通安全面での危険性を少なくするために，ミラーを設置したいと思う．どのような位置，角度で設置すればよいか考えてみよう．また，見える範囲を大きく確保するためにはどうしたよいか考えよう．

(1)ミラーを道路端におくことにする．このとき，ミラーを道路に対してどのような角度で設置すればよいだろうか．※ワークシートの縮尺は1／50とする．

(2)ミラーが幅をもつことにする（※このワークシートではミラーの中心から 0.6cm）．車を表す点 Y が右に2m（※このワークシートでは4cm）動いたとする．このとき，ミラーでこの車を確認できるかどうか，作図をして調べよう．（D’は道路の端 D より 30cm（※このワークシートでは 0.6cm）外側の線とする）
①どの点における反射の線を作図したらよいか考えよう．
②点 Y から 4cm 右に動いた点 Y’を取り，ミラーで Y’を確認できるか考えよう．

(3)ミラーを円の一部と考え，このミラーを含む円の半径を 220cm（※このワークシートでは4.4cm）とする．車を表す点 Y が右に9m（※このワークシートでは18cm）動いたとする．このとき，ミラーでこの車を確認できるかどうか，作図をして調べよう．
①円の中心を作図して見つけよう．
②ミラーの両端の点における反射の線をかくには，何が必要だったかを考えて作図しよう．
③Y から18cm 右に動いた点 Y”を取り，ミラーで Y”を確認できるか考えよう．

本授業では図 4-27 の場面を想定した．

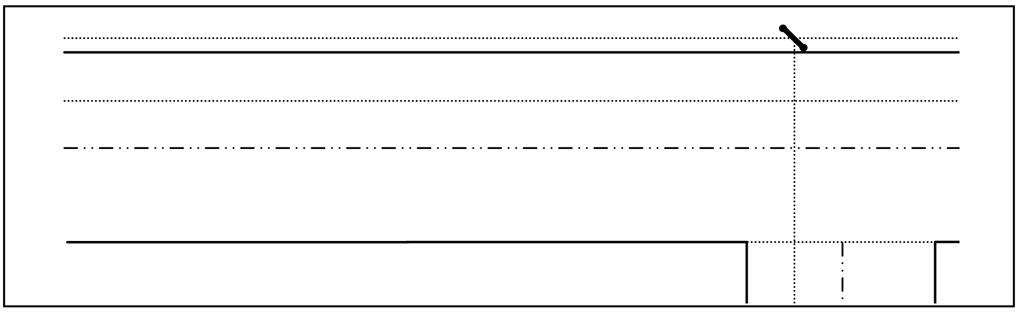


図 4-27：場面設定の図(上から見た図)

この授業実践の実際をプロトコルと使用した教具から整理した．

第 2 節では，本教材の授業実践で明らかになった，生徒の現実事象の問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果の有効性についての成果並びに課題を，生徒の問題解決のワークシートや授業感想のデータから分析・考察を，本研究の目的を踏まえ 2 つの分析の視点を挙げ，本実践で達成されたか明らかにすることである．分析の視点は以下の 2 点とした．

1.「仮定の意識化」により，問題解決が進展していたことを感得できたか
2.「仮定の意識化」により，現実事象と数学の関連が感得できたか

以上の 2 点について生徒のワークシートやまとめのプリント，そして授業での教師と生徒の会話を整理したプロトコルから質的に分析し，成果と課題を明らかにした．

1 については，まず成果として，問題解決のワークシートやプロトコル分析から「問を生成し，仮定を見直し，おき直す」ことで「仮定の意識化」の効果が発揮されたことで問題解決が進展することが明らかにできた場面があった．実際問題解決自体もできている生徒がいたり，プロトコルから問題場面が進展すると，徐々に「問を生成し，仮定を見直し，おき直す」発言をできるようになっている生徒もいた．ゆえに，生徒がこの一連の流れで問題解決することの経験を積むことができれば，今後の現実事象の問題解決をしていくためのきっかけになればいいのではないかと考える．ゆえに以上のような問題解決ができたことは本教材の有効性が示せた一つの要因であると考える．

また授業プロトコルの分析から，生徒が問題解決の進展を感得するきっかけとなる場面があった．そこでは，仮定を意識化することで，定式化の充実につながり，数学的モデル化での現実場面の解決の質を高められていた．また，仮定に意識化することで，問題解決の結論が変わったことを理解することができたと学習感想を書いた生徒がいた．ミラーについても最初点としておいたのは教師の意図的なものではあるが，そこから線分，さらに円の弧であると見直すことで実際に見える範囲が変わっていったことは実感できた生徒が多かったのではないかと考える．さらに，現実場面を考えると，ミラーも最初から曲面鏡であると分かっている生徒は多くないと考えると，単純化された場面から徐々に数学的モデルを洗練し，問題解決を進展させていったことは生徒にとっても理解を深めていく上で，非常に有効な思考過程であったのではないかと考える．生徒にとって実際のミラーが曲面鏡でそれにより日常生活がどれだけ大きな恩恵を受けて生活しているかも，数学を活用して解決することで理解できたと考えられる．ゆえに，設定した仮定を意識化させることは有効な視点であったと言える．

一方で課題として，(1)に関しては最終的に 37 名が作図ができていたが，(2)については，5 人しか完全にできていなかった．これは (1)から(2)への数学的な問題場面の作成や数学的モデルの作成の定式化が飛躍しすぎた事が一つの原因であると考える．具体的には，(1)ではミラーを点としておいていたため，幅を考慮しなくてよかったが，(2)では 60cm の幅を持ったため，ミラーの位置もその半分の 30cm 分上げることとした．しかし生徒の実態を考えると，定式化が困難であったのに，一度に X や Y の位置を変えるだけでなく，ミラーの位置も変えてしまうと，問題解決のためにすべきことが多すぎるため，すべてを考慮するのは難しかったのではないかと考えられる．ゆえに，できるだけ現実事象を生かした数学的な問題場面や数学的モデルを使いたいが，一方で生徒の思考に混乱をきたさない程度に設定すべき内容の整理と，学習展開において提示する手順も考えるべきであると考えた．このことが実践することで

見えてきた生徒の解決における定式化の過程の困難性であった．

続いて 2 については，生徒の学習感想の分析から，身近な場面で数学が使われていることを実感できている生徒がいたことがわかった．ミラーの設置という一見すると数学と関係ないような事柄でも，数学の知識を中心に活用することで解決でき，その性質について理解できるということは生徒のこれまでの経験としてあまりないもので，生徒の実態として現実事象と数学の関連を意識できない生徒が多いという現状の中で，このような感想を持てた生徒がいることは，生徒が現実事象と数学の関連の感得ができた事が明らかになった．

一方で課題として， 本実践の内容は生徒にとってあまり経験のない，現実事象について数学を用いて問題解決するものである．よって，問題解決の段階で仮定を意識化する意味の理解ができなかったり，授業や教材についてネガティブな感情を抱いてしまえば，生徒の実態改善を果たすどころか逆に数学に対しての姿勢を悪化させてしまうことにつながってしまう．現実事象の問題を「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決をするならば，より生徒の実態に配慮し，適度な困難性を持ちつつも，生徒の思考に混乱をきたさない程度に設定された教材を，生徒の実態が改善されるのと合わせて教材の難易度も挙げ，最終的には生徒一人一人が現実事象の問題解決に取り組めるような配慮が求められることが明らかになった．このことが実践することで見えてきた生徒のより良い数学観の変容を促すための困難性であった．

終章

本研究の総括と今後の課題

第 1 節　本研究の総括

本研究の目的は，数学的モデル化による現実事象の問題解決において，「仮定の意識化」を重視した教材を開発し，現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果を，開発した教材の授業実践を通して明らかにすることである．このことを通して生徒のより良い数学観の獲得を目指していくことであった．そして，この目的を達成すべく以下の 4 つの課題を設定した．なお，第一，第二の課題は第三，第四の課題を達成するための基礎的な作業となる．

第一の課題は，先行研究を参考にしながら，数学的モデル化による問題解決の教育的価値を明らかにし，現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得を目指すことのできる数学的モデル化過程の同定を行うことであった（第 1 章）．第二の課題は，問題解決の定式化の段階を充実させ，現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得するために，定式化での仮定の設定を重視するための視点と行為について明らかにすることであった（第 2 章）．第三の課題は，第一，第二の課題で明らかになった，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の開発に取り組むことであった．次にこれを教材化することを目指し，授業化を目指し，さらに授業化できるように教材を吟味した（第 3 章）．最後に，第四の課題として開発した教材の授業実践を通して，現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果の有効性を考察した（第 4 章）．

第一の課題に対する成果は，数学的モデル化の問題解決において本研究において数学的モデル化過程において重視すべき視点を明らかにしたことである．

第 1 章第 1 節では，これまでの先行研究を踏まえ，本研究における数学的モデル化の概念規定を行った．まず，モデルとは A.Pinker(1981)の見解を基にし，「もし（体系）M が（体系）O をその目的のために代用となることができるならば，そしてもし，この文脈において M の学習が O にとって意味のある結果を引き起こすことができたのならば，その体系 M はある目的において体系 O（原物）のモデルである．」と定めた．次に，数学的モデルとは，清野(2006)を基に，「数学的モデルとは，数値的表現，グラフ表現，代数的表現，幾何学的表現によって表わされたモデルである」と定めた．そして，数学的モデル化過程に関する先行研究を取り上げ，その特徴を考察した．ここで重要な視点としては数学的モデル化過程は一般的にサイクリックな形態をとり，定式化の場面が重視されているものが多いという点であった．これを生かし，数学的モデル化による問題解決がなされるようにされるべきだと考えた．ここまでの内容を踏まえ，本研究において重視する数学的モデル化過程の場面・段階を整理し，本研究における数学的モデル化過程の同定を行った．本研究ではより問題解決に関わる仮定に生徒が着目することで，生徒が現実事象の問題解決の進展と，現実事象と数学の関連を感得できるようにするため，定式化を数学的な問題場面の作成と数学的モデルの作成の 2 つに明確に分け，生徒がより仮定に着目しながら問題解決できる形を目指した．定式化を充実させるために，定式化において仮定を設定することが，いかに問題解決で重要な要素であるかを生徒に実感させる機会を設けるとした．三輪(1983)や西村(2001)を見てみると，解釈・評価が 1 つにまとめられていた．しかしよりよい数学的モデルを志向する具体的な方法が明らかにされていなかった．そこで OECD の数学的プロセスのように解釈と評価を 2 つに分けることで個別化した．まずは導き出した数学的結論が現実事象に対して妥当であるか判断させることを評価で行い，より良い数学的モデルを志向するために，生徒に仮定を着目させ，設定した仮定が現実事象の問題解決において重要な要素であることを実感させる場面を評価の場面で行うこととしたのであった．こ

れにより，よりよい数学的モデルを志向する必要性があれば仮定を再設定することで問題解決を進展させ，最終的な結論を出すことを目指すことができたと考えた．

以上の主張のもと，本研究で用いる数学的モデル化過程の同定を行った．以下に設定する段階を経て，数学的モデル化による問題解決を行うこととした．

(1)数学的な問題場面の作成：現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで，数学の問題場面としておきなおす．
(2)数学的モデルの作成：数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで数学的モデルを導く．
(3)数学的作業：数学的手法を用いて数学的結論を得る．
(4)解釈：数学的結論が現実的文脈に照らしてどのような意味を持つのかを理解する．
(5)評価：現実的文脈を考慮した結論を現実場面に照らして評価し，妥当であれば最終的な結論とする．妥当でなければ仮定を見直すとともに，おき直す仮定を考え，問題解決の進展を図る．

まず「①現実場面における問題」があり，それを単純化・理想化し，さらに条件を整理することで，「②数学的な問題場面」ができる．さらにこの場面で近似・仮定の設定をすることで，「③数学的モデル」が完成する．三輪(1983)の述べる定式化がここまでの過程である．これを数学的作業により解決することで，「④数学的結論」を得る．この数学的結論が現実的文脈に照らしてどのような意味を持つのかを解釈し，「⑤現実的文脈を考慮した結論」を出す．これが最終的に現実場面に対して適切か評価することで，問題解決がなされたとする．もし結論が妥当でなければ仮定を見直すとともに，おき直す仮定を考えることで問題解決を進展させる．以上の問題解決の過程を整理し，本研究の数学的モデル化過程を以下の図 5-1 のように同定した．

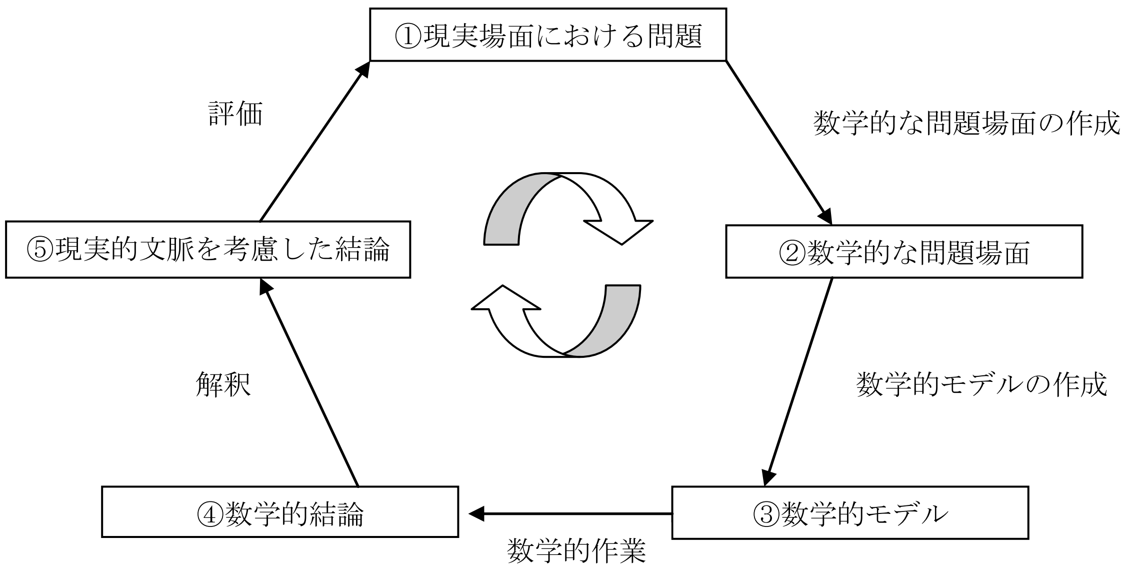


図 5-1：本研究における数学的モデル化過程

第 1 章第 2 節では，まず，学校数学における数学的モデル化において，どのような教育的価値が指摘されてきたのかを整理した．ここでは，W.Blum，M.Niss(1989)が述べている 5 つの教育的価値が国内外において述べられている数学的モデル化の教育的価値をほぼ網羅していると考えられていたことを踏まえ，本研究でもこれを参考にすることとした．

そして，本研究で重視する数学的モデル化の教育的価値を位置づけ，考察を行った．本研究での特に重視する視点を(1)数学観の変容の可能性，(2)現実事象と数学の関連を意識した問題解決の有効な手段，(3)数学的な見方考え方の育成，の 3 点を挙げ，それぞれの観点を踏まえ，生徒の実態の改善には数学的モデル化による現実事象の問題解決が有効であり，特に定式化の段階を重視することは，生徒らが数学に対する姿勢が現在の実態よりも良いものになり，質的にも向上させていくきっかけとすることができると結論付けた．

第二の課題に対する成果は，第 1 章で数学的モデル化過程の中で定式化をいかに充実させるか，その重視すべき観点として，「仮定の意識化」を重視するということを明らかにできたことである．

第 2 章第 1 節では，第 1 章で数学的モデル化過程において特に重視する定式化について，これまでの先行研究を踏まえ，数学教育における仮定について整理し，どのような仮定を重視すべきか考察を行った．問題解決において現実事象と数学を関連付けるために，西村，長崎(2008)の「算数・数学と社会をつなげる力」の B1 の力や清野(2006)が行った仮定の特徴の整理のように，問題解決で意識化させるべき仮定の特徴が整理された．仮定を設定すると言っても問題場面の数値的な仮定だけではなく，理想化・単純化することで，変数・定数とみなす必要がある仮定も出てくる．これらの扱いによって問題解決で導き出される結論には違いが出てくるはずである．ゆえに，問題解決の特に定式化についての仮定を意識化させることは生徒の実態改善のためには，特に重要であると結論付けた．

第 2 章第 2 節では，「仮定の意識化」を重視することで果たされる役割の実現のためにすべき行為と，それをどの場面で行うことで問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得により生徒の実態を改善できるかを吟味し，整理した．清野(2006)は「仮定の意識化」の役割として次の 3 点を挙げていたが，それぞれを吟味することで，「仮定の意識化」の実現のための行為を「問を生成し，仮定を見直し，おき直す」の 3 段階による行為と定めることとした．また，以上の行為を本研究での数学的モデル化過程の評価においてすることで，「仮定の意識化」がなされ，問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得ができる．ゆえに現実事象の問題解決において設定した仮定の重要性の理解につながり，定式化を充実させることにつながると考える．これが最終的には生徒の実態改善につながると考えた．

第三の課題に対する成果は，実際に問題解決をし，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材を開発できたことである．

第 3 章第 1 節では，筆者の身近にあった解決したい問題場面について，数学的モデル化による問題解決を行った．さらに，この問題解決の過程を整理し，考察を行った．まず身近な交通事故が起こりかねない危険な場面において，事故の危険性を少なくするための対策を数学を活用して問題解決を行った．問題場面の設定において仮定をおいて解決したが，砂場(2003)の見解のように，最初は単純化された場面から解決し，徐々に仮定をおき直していくことで，現実の場面に近づけていくこととした．ここから道幅の設定，ミラーを点ではなく平面鏡と見る，さらに曲面鏡として見るように仮定をおき直していった．すると，それぞれの場面で結論を導き出したが，仮定の影響を受け，それぞれで結論が異なった．しかし，場面が進むごとにより現実に即した結論に近づいていき，仮定の設定がいかに重要であり，意識化

することがいかに重要であるかを筆者自身感じることができた．この解決をまとめ，教材「ミラーを設置しよう」を開発した．

第 3 章第 2 節では，第 1 章，第 2 章で整理してきた,「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化と先に行った問題解決を関連付け,「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の開発を行った．教材「ミラーを設置しよう」を教材化する上で，本研究における数学的モデル化過程並びに「仮定の意識化」との関連を整理した．

第 3 章第 3 節では, 開発した数学的モデル化教材の授業実践に向け, 開発した教材の授業化に向けた, 生徒の問題解決が可能となるような数値設定等の問題場面の再設定を行った．そして，先行研究をもとに，学習指導の展開を考察し，本教材の授業実践での実際の学習指導の流れを整理した．問題場面の再設定については，教材開発の段階ではまだ妥当ではなかった数値などに関わる仮定を再設定し，生徒が問題解決をしても納得できるような問題場面の設定に成功した．この段階でも．やはり仮定の重要性を意識化することができたと感じている．そして，授業実践に向け，授業の展開を本研究における数学的モデル化過程並びに「仮定の意識化」との関連を意識しながら整理した．

第四の課題に対する成果としては，開発した教材の授業実践を通して，生徒の現実事象の問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果の有効性を明らかにできたことである．

第 4 章第 1 節では，本教材の授業実践の構成並びに実際について整理した．

第 4 章第 2 節では, 本教材の授業実践で明らかになった成果と課題について,「仮定の意識化」により, 問題解決が進展していたことを感得できたか，そして現実事象と数学の関連が感得できたかという 2 つの視点で整理し，得られた成果と課題について分析・考察を行った．

まず成果については，生徒にとって現実事象の問題解決において，「問を生成し，仮定を見直し，おき直す」ことで「仮定を意識化」したことは，問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得につながった生徒も多く,「仮定の意識化」を重視した効果があったことが確認できた．また，身近な場面で数学が使われていることを実感できている生徒がいたことが明らかになった．ゆえに現実事象の問題解決において，設定した仮定を意識化させることは有効な視点であったと言える．

課題としては，生徒の実態を考慮し，できるだけ現実事象を生かした数学的な問題場面や数学的モデルを使いたいが，一方で生徒の思考に混乱をきたさない程度に設定すべき内容の整理と，学習展開において提示する手順も考えるべきであるといった課題も挙げられた．しかし, これらの課題を克服すれば, 生徒の実態改善に対して大いに効果が挙げられるのではないかという考えも同時に得られた．

以上を総括すると，本実践で得られた本研究の成果は，研究目的を達成させるために設定した第一, 第二の課題により，現実事象の問題解決において，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決を行う具体的な方法として，第一に，問題解決で導き出した結論の妥当性を判断する段階を数学的モデル化過程で設定すること，第二に清野辰彦(2006)が述べる「仮定の意識化」を重視することとし, これらが有効であることが明らかになったことである．そして，この方法を踏まえ，第三の課題として, 「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材の開発した．これを教材化，さらに授業化できるように教材を吟味することで，第四の課題として，開発した教材の授業実践を通して，生徒の現実事象の問題解決の進展や，現実事象と数学の関連の感得に対する「仮定の意識化」の効果の有効性を明らかにできたことである．よって，生徒の実態として現実事象の問題解決に数学を用いて取り組めないのは，数

学的モデル化過程での定式化の段階が困難であるためで，この段階で数学的な問題場面や数学的モデルを作成できれば，問題解決には取り組めるのである．これまでの先行研究ではこの定式化を重視されていた研究があるものの，定式化が困難な生徒の実態を考慮すると，より充実させるための方法としては限界があったと考えた．ゆえに，本研究では定式化の充実につながるよう，問題解決の結論を現実事象と照らし合わせ,「問を生成し，仮定を見直し，おき直す」ことで「仮定を意識化」させる段階を数学的モデル化過程において設定した．これにより，問題解決の進展や現実事象と数学の関連の感得につながり，生徒の実態改善につなげようとした．この考えのもとで現実事象の問題解決を筆者自ら取り組み，教材を開発し，これを授業化して授業実践したことで,「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化による問題解決の有効性を明らかにした．

第 2 節　今後の課題

今後の研究課題は以下の 2 点である．

(1)　開発した教材の改善

本研究において数学的モデル化教材を開発したが，本教材の発展をさらにさせていくことができればよいと考える．本教材の特徴としてはミラーの形状について仮定をおき直したりするのに加え，ミラーの位置に関しても変数と捉え，仮定をおき直すことができる点である．それを生かし，現実場面の状況からその必要性を訴える場面を提示することで，生徒により仮定を意識させることが可能となると考える．例えば図 5-2 のような場面を挙げる．

図 5-2：丁字路の新たな問題場面

この丁字路に設置されているミラーにはある問題が存在する．ミラーをさらに拡大して見てみる．

図 5-3：ミラーを拡大した様子

図 5-3 を見ると，右側のミラーに電柱が映ってしまっている．そのためミラーで右側の様子を確認することがほとんど不可能な状況になってしまっている．ゆえにミラーの設置位置が妥当でないと言える．このことからミラーを設置する位置について再考する必要がある場面であるとも言える．また，地域性も考え，冬季になると雪の影響で道幅がさらに狭くなっているという状況もある．これを踏まえると，道幅も変数と捉えることも可能になる．このように実際の問題場面を身の回りから探してみると，今回開発した教材の問題解決で出た結論をさらに見直すことも可能となる．このような活動を生徒にさせることも生徒の実態改善に大きな役目を果たすことができると考えられる．ゆえに，このような発展性のある授業展開も実際に考えられるとよいと考える．

また，本研究では中学生を対象とした教材を開発したが，この教材を小学生や高校生を対象としたもの開発できる可能性があると考える．例えば高校生では三角比を用いての解決や，丁字路を Y 字路に変え，角度を変数として見て解決することができる可能性がある．ゆえに本研究では中学生を対象としたが，「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習を小学生や高校生を対象とした教材の開発もしていく必要がある．

⑵　生徒がより問題意識の持てる教材の開発

今回開発した教材もミラーの設置に関する内容ということで，比較的生徒にとっても想定しやすい内容の教材であったと考える．また，実際手にとって見ることのできないものを数学を活用することで，ミラーの性質を理解するということもできた．ゆえに，生徒が興味を持て，さらに思いがけない性質を発見できたりする教材が開発できればよいと考える．例えば，本研究では幾何教材の開発を行ったが，関数に関する教材などは，ある傾向がグラフから確認できれば，問題解決できたりと，数学を活用でき

る機会がより増えていくのではないだろうか. 筆者の経験では清野(2005)の「ブレーキ痕は語る」という教材は興味深い経験であった．まるで自分が警察になり，捜査しているような感覚で問題解決を行ったという記憶がある．このように生徒が将来就くかもしれない職業に関わるような教材を開発していくことも生徒の数学観の変容に役立つのではないかと考えられる．西村(2012)のように，数学的モデル教材の開発は身近な場面を観察することから様々な教材が生まれる．そのような問題意識を持ちながら日々生活し，教材の開発に取り組んでいくことが求められると考える．

以上のような課題を今後の教育現場において，日々意識しながら取り組んでいきたいと考える．

資料

①「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材を用いた授業実践の学習指導案

②授業プロトコル

③授業用ワークシート（A3 用紙を A4 用紙に縮小したもの，最終訂正版）

資料

①「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化教材を用いた授業実践の学習指導案

(1)題材名「ミラーを設置しよう」

(2)ねらい

丁字路におけるミラーの設置という具体的な事象の問題解決において，基本の作図（垂線・垂直二等分線・角の二等分線）を用いた数学的解決の方法や結論に現れる仮定が現実場面において妥当かの評価を経て，仮定を見直し，おき直して抽象的な場面から具体的な場面にしていく．これにより仮定を見直し，おき直すことで数学的モデルを洗練し，問題解決を進展させるという仮定を意識化することの意義を見出すことができる．

(3)評価規準

・[関心・意欲・態度]

現実事象の問題解決に数学を活用して解決しようとしている．

・[数学的な見方考え方]

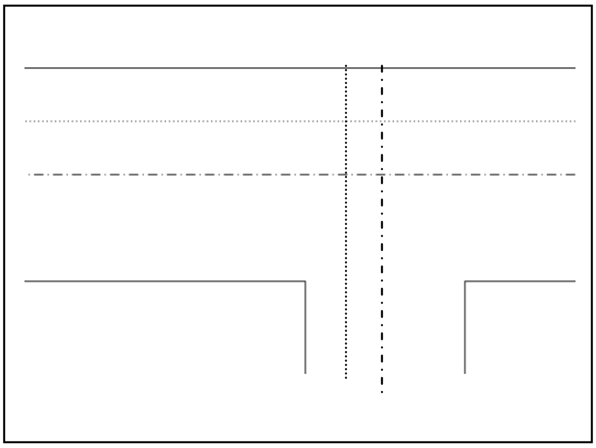
ミラーの設置という現実事象の問題解決において，設定した問題場面の数学的解決を現実場面と照らし合わせ，妥当性を評価し，新たな仮定を置くことで，より現実に即した問題解決をしようとしている．

(4)評価方法

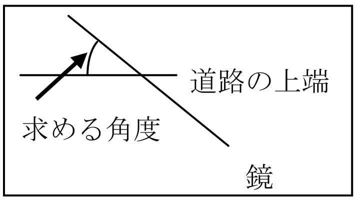
授業中の作業に使うワークシート（以下 WS）において，「仮定の意識化」の視点で問題解決が進展していたかを振り返れることができていたかを評価する．

(5)展開(※2 年生に行う授業を想定，2 時間構成：90 分[45 分×2])

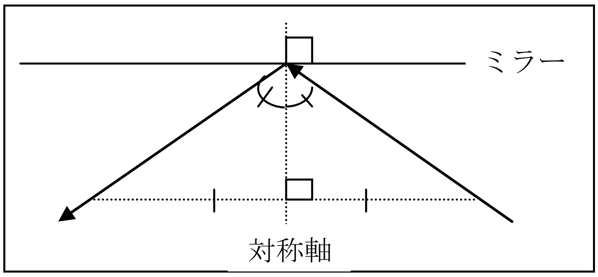
	数学的モデル化過程の段階 ([　]) /学習指導の段階(〈　〉) /主な学習活動(・)	教師からの発問(T)/ 教師の仮定を意識化させる発問[　]/ 予想される生徒の反応(S)	留意点(・)/各評価(◎)/ 設定した仮定([　])/
導 入 10 分	1．現実場面の問題の確認 ・問題場面を提示する．   ・全場面に共通する仮定の設定をする．	T：先生は車を運転していますが，事故に遭いそうになった場面が結構あります．皆さんはどうですか？自転車とかでありませんか． S：ある． T：ですよね．実はこの附属の近くで事故防止のためにある対策が取られていました．10 月 30 日のことです．何か覚えている人はいますか． S：附属幼稚園の外側にミラーが設置されてた． T：そうなんです．これですね（左写真提示）．よく見ていましたね．事故の防止の対策として実際に使われているものです．今日は皆さんがミラーを設置する立場の人になったとしてミラーをおくという状況を考えてほしいと思います．そこで今日の課題です(黒板板書，掲示)．	・最初に自己紹介を行う． ・生徒に写真を見せて，問題意識を持たせられるようにする． ・本教材では 3 次元の要素(ミラーの高さ，目線等)は考慮しないものとし，平面の要素での問題解決を行う．
	交通安全面での危険性を少なくするために，ミラーを設置したいと思う．どのような位置，角度で設置すればよいか考えてみよう．また，見える範囲を大きく確保するために，どうしたらよいか考えよう．		

		T：さて今日解決したいことを踏まえ，状況を整理していきましょう．まずミラーを置くことにしたいのですが，どういうところに置けばいいでしょうか？ S：交差点とかカーブです． T：そうですね．ではさっきの話もふまえ今回は交差点に置くことにしましょう．ところで交差点にも色んな形があるけど，どんなのがある？ S：丁字路，十字路，Y 字路とか色々ある． T：そうですね．では，今回は附属幼稚園の外側をイメージしてほしいので丁字路にしましょう．ここまで状況はわかりましたか？ではこの状況を整理して図に表してみましょう（板書）． ○上から見た場面の図  T：いいですね．まずそれぞれの道路の道幅を 4m とし，道路の真ん中が中央線で，さらにその真ん中を車が走るようにしようか．場面として自分の車が丁字路の下から来て，一時停止して，そこから右折したい．しかし左から車が来るかもしれないのでそれを確認したい，という場面を考えるとします．ここで自分が乗っている車を X，左から来る車を Y とします．では，X，Y をおいてみましょう．位置はどこでしょうか？ S：この辺かな？ T：では具体的に距離も決めましょう．X は一時停止線でとまるから，今回この線を 1m としましょうか，Y は動いてくるから条件を考えてみようか．Y は最悪ぶつからないで止まれればい	・この場面は教師主導で進め，仮定をおくことや作った数学的モデルでの問題解決の流れを経験させる． ・現実場面を想定しながら，解決すべき問題場面の設定をしていく． ・発問はして，生徒とともに問題場面の整理を行っていくが，基本的に発問に答えられなくてもこの場面では事例を教師が話し，進めていく． [道路が直角に交わるものとする(丁字路とする)] [道幅を 4m とする] [ミラーで見えてほしい車 Y の位置をおく(15m)] ・道路について，下から上への道路を A, 左から右への道路を B としておく．自分(以下 X)は車で A から B へ右折する一方で, B の道を左からやってくる車(以下 Y)と考える． ･X の位置については交差点からどのくらい離れていても関係無く，道路 A の左からどのくらい離れているかが，解決に影響を与える． ・右側から来るものも見たいという意見が出るかもしれないが，本時では左から来る場面を考えることとする．

<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td></td><td>いと考えてみましょう．するとこういう資料があります（制動距離の資料）．制動距離というのはブレーキをかけてから止まるまでに動いてしまう距離のことです．Y の速さは基本的には 40km/h で，多少スピードを出していても 60km/h くらいとしましょう．ではどのくらい離れていたらいいでしょうか．
S：15m 位離れていたら大丈夫そう．
T：では，15m ということにしておきましょう．ここまでの状況を踏まえて，今日解決したいことを確認してまとめておきましょう．</td><td>・JAF の HP より制動距離について(WB に掲示)<table><tr><th>速度
(km/h)</th><th>制動距離
(m)</th></tr><tr><td>40</td><td>6</td></tr><tr><td>60</td><td>14</td></tr><tr><td>80</td><td>25</td></tr><tr><td>100</td><td>39</td></tr><tr><td>120</td><td>56</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>2. (1)の場面：ミラーを点で表示した場面</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2-1. 現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで数学的な問題場面としておき直す．
[A-①現実場面における問題]</td><td>T：では問題のミラーですが，どこにおいたら見やすそうですか？おいてもいい場所の候補を挙げてみてください．
S：X がいるところの真上かな．
S：違うところもあるよ．
T：それはどこですか？
S：この辺りとか？
T：なるほど．確かに置けそうなところはたくさんありそうですね．位置も重要かもしれませんね．ではその中でもわかりやすいようにまずはここ（X の真上）にミラーをおくことにしましょう．ここを点 O とします．ではそれを踏まえて問題です．</td><td>[ミラーを道路の端におく]
[ミラーを点としておく]
・他の場所についての考えが出てきたら，最後に変数として扱うことができることとして触れる．</td></tr>
<tr><td colspan="3">(1)ミラーを道路端におくことにする．このときミラーを道路に対してどのような角度で設置すればよいだろうか．</td></tr>
<tr><td>[A-②数学的な問題場面]</td><td></td><td>◎A-①定式化</td></tr>
<tr><td>自力解決①</td><td>2-2. 数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで，数学的モデルを導く．
[A-③数学的モデル]</td><td>T：では作図用の WS 配ります．この WS は縮尺が 1／50 になっています．例えば X と交差点の距離は 1m としたので，この WS では 2cm としています．</td><td>◎A-②数学的モデルの作成</td></tr>
</table>

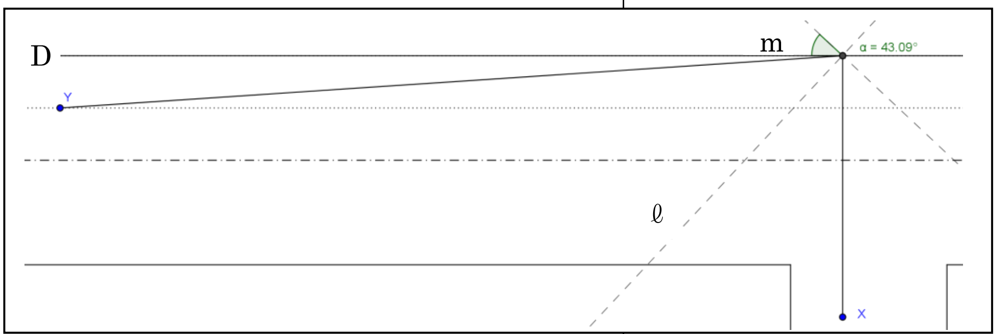
10 分	2-3．作成した数学的モデルを数学的処理し，数学的結論を出す．	T：では作図したいと思いますが，最終的に何を作図すればいいのか考えてみましょう．今回考えたいのはミラーをどこに，そしてどのようにおくかということでした．場所はここ(指示)としましたが，まだどのように置くのかが分かりません．ミラーのおき方のイメージとして，手で再現してみようと思うのですが，まずこのように置いてみましょう(道路 D 上にかぶるように置く)．何が見えますか？ S：自分が見える． T：それだと意味がないですね．ではこの手をどうしたらよいでしょうか？ S：傾けていく． T：そうですね．つまりはこの手のようにミラーが道路に対してどのくらいの角度になるかが分かればよさそうですね．つまりここに Y が見えるようにして，それが X に見えるようにうまく反射させるために，ミラーをどのような角度でおけばいいのかを求められればよさそうですね．ここで道路の上の線を D としておきましょうか．では実際に作図に入っていきたいと思いますが，作図のために使う法則・性質についてはこれまでに色々な教科で習ったものがあると思います．使えそうなものを思い出してみましょう．そして今手元にあるコンパス，30cm 定規，分度器を使って考えてみましょう．ではははじめてください． S：(問題解決) ※解決が進まない場合の手立て（全体） T：今回はミラーを使うということですが，あるものがミラーに映ってそれを自分の目で見ることができるということですね．鏡で見えるということはある法則があるからなのですが……わかりますか？ヒントは中１の理科です． S：光の入射角と反射角について． T：そうです（図示）．今回は光というよりは見え方についてですね．	・生徒による数学的解決を求める． ・縮尺 1／50 で作図する． ・導き出す数学的結論で，ミラーをどのようにおくかについては，図に対して手でミラーを表現し，道路に対する傾きが変われば見え方も変わるという実感を伴いながら考えさせる． ・求める角度の場所を板書で強調して確認する． ・角度に関して求めること  ・解決の道具として，コンパス，定規，分度器を擁しておく． ・生徒の解決が進まない場合，入射と反射の法則について振り返りを行う(模造紙に書いておく)．解決が進んでいる場合は解決後の発表で確認をする． ・早く終わった生徒には解決の過程を言葉にして表現させておく．

資料



T:入射角と反射角の間にはどのような関係があるのでしょうか？
S:ミラーとそれに垂直な対称軸があって，これに対し，ミラーに入射する角度と反射する角度が等しい角度.
T:そうです．この鏡の面や対称軸が非常に重要になってきますので，これも前提として考えていきましょう.

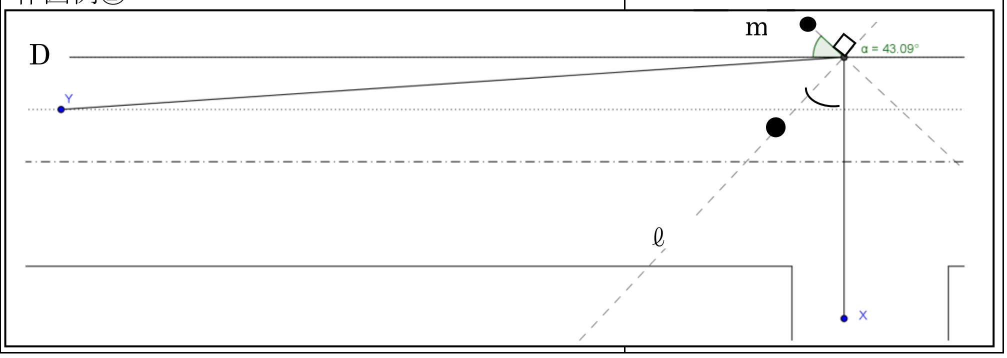
・作図例について
道路の上の線をDとする.
作図例①



作図方法
①入射角＝反射角となる対称軸を引くために，∠XOYの二等分線を引き，これをℓとする.
②鏡の面を引くために，このℓに対し，点Oを通る垂線mを引く.

・コンパスと定規を主に使った解決の作図である.

作図例②



		作図方法 ①入射角を調べるために，∠XOY を分度器で実測し，その半分の角度となる点と点 O を通る直線 ℓ を引く． ②鏡の面を引くために点 O からこの ℓ に対し 90°となる点を取り， 点 O と結ぶ.	・分度器で角度を求めていくことで解決した作図である．
発表① 5 分		T : 解決できましたか．皆さん色々な考え方をしていていいですね．どのように考えましたか？ S : (角度を求めることで作図した) (作図だけで解決した) T : なるほど．では，これらの作図はどのような法則を使って描いたのですか？ S : 入射角と反射角の法則. T : そうですね．どちらも入射角と反射角の法則を使って解決していますね．少しこの法則を確認しておきましょう．今入射の線，反射の線がありますね．そして入射角と反射角が等しいと言いました．では，この青い線はなんというでしょうか？この線で折ると，入射の線と反射の線が交わるのですが. S : 対称軸. T : そうですね．なので，この右側と左側の三角形はどんな図形であると言えそうですか？ S : 合同．線対称. T : そうですね．なので，長さが？ S : 等しい. T : といえます．ではこれはミラーの線ですが，これと対称軸はどういう関係ですか？ S : 垂直に交わる. T : そうですね．対称軸とこの対称な点を結んだ線分も？ S : 垂直に交わる. T : という法則がここで使われていたのですね．図形的に見たらよくわかったのではないでしょうか．では結論ですが，求めるのはミラーをどこに，そしてどのように置くかということでし	・入射角と反射角の法則と作図の関連性を持たせながら確認を進める． ・入射角と反射角，対称軸，ミラーの線の関係を確認する．

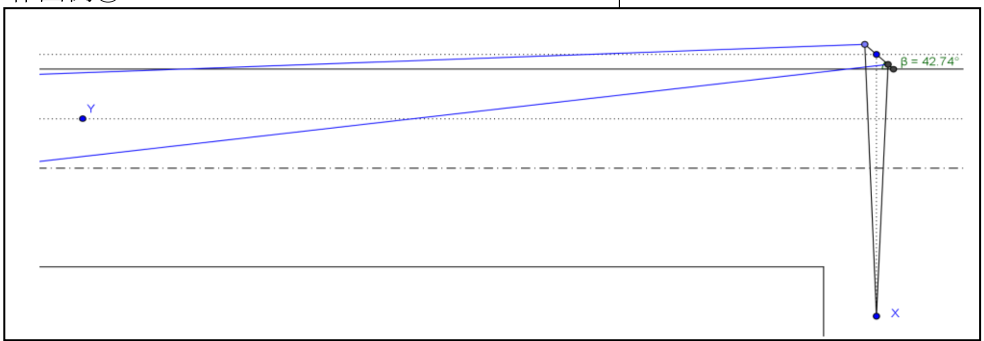
	[A-④数学的結論]	た．まずミラーの置く場所はどこですか？ S：X の真正面の道路の端です． T：いいですね．ではどのようにおけばいいですか？数学なので数値で表現しましょうか？ S：角度ですか？ T：そうだね．ここではミラーがどう反射すればいいかだよね．つまり入射角と反射角が等しくなるようにミラーが道路 B となす角度を数学的な結論としましょう．どこの角度が分かればいいかわかりますか？ S：ここですか？ T：いいです．ではおよそ何度になりましたか？ S：だいたい 43°です． T：だいたいそうなるかと思います．しかし，多少の誤差は仕方ないです．現実場面の問題解決ですから．でもできるだけ正確に頑張ろう．	・1～2°程度の多少の誤差は認める． ◎A-③数学的解決
練り上げ①5分	2-4．現実場面に照らして解釈をし，現実的文脈を考慮した結論を出す． [A-⑤現実場面における結論] 2-5．現実場面に照らしてよりよい数学的モデルを志向し，問題解決の前提となっている仮定を見直すことで，問題解決の方法と結論の妥当性を評価し，新たにおき直す仮定を考えることで，問題解決を進展させる．	T：では出した結論は現実場面で考えると，どのように見えると表現できますか？ S：ミラーを道路に対して 43°の角度で X の真正面の道路端に置くと，Y がミラーで見えてそれが反射して X にいる自分が確認できるということです． T：では，この作図の結論から現実場面での状況がひとまず分かりましたが，実際に現実場面での見え方はどのように見えているのかな．今の作図をもう一度振り返ってみましょう．具体的に作図から，どのように見えてるかな？[1] S：この直線のところが見えていると思うけど． T：ではここでの見え方を確認してみましょう．ここにミラーがあります．黒板にかけてみましょう．○○さん(教室中央より少し右か左にいる生徒)，ミラーにだれが見えますか？[1] S：△△さんが見えます． T：では△△さん，ゆっくり右側に動いてみましょうか？○○さんは見えなくなる直前にストップと言ってください．では動いてください．	・わからなければ丁寧に理解を深める． ・誤差を考慮しても 45°を超えてしまうことはないので，答えに出たら議論する． ◎A-④解釈 ・内容を生徒から基本的には引き出す． ・線分で描いていることに気づかせる． ・意見が出なければ実際のミラー(平面鏡)と作図を使って見える範囲の確認をする．

		S(○○さん)：ストップ． T：はい，△△さんはこのくらい動いてもこのミラーでは見えるようです．ではもう一度作図を振り返ってみましょう．Y がここから少し動いたとしましょう(右側に)．ここにいる時，この作図では Y が見えるでしょうか？ S：見えないと思う． T：なぜですか？ S：この作図では見えるところはこの反射の直線上だけだから． T：この作図ではこの直線上，つまり Y が少しでも動いたら見えないということを言っている作図なんですね．しかし，作図の解決自体は間違っていないと思いますが．皆さんどうですか？ S：間違ってないと思う． T：それでも見えていないということは，作図で何か変，つまり前提としているものを考え直さなければならないものがあるかもしれないですね．なんでしょうか？この作図でのミラーとここにあるミラー，何が違うのでしょうか？[2] S：ミラーは幅があるはずなのに，作図ではミラーが点で描かれている． T：ということはどうしたいですか？ S：見える範囲を広げたい． T：見える範囲を広げるにはどうしたらよさそうですか？[3] S：ミラーに幅を持たせる． T：なるほど，今回はミラーが点であったということが前提にあるので，「もしもミラーが幅を持った状態ならば」という前提におき直して改めて考えてみましょう．	・実際の場面を考えると，視界には幅があるはずだが，この図では視界が直線で，車もこの直線と走行する直線と交点の 1 点のみでしか確認できない． ・作図で描いている図と実際のミラーでの見える範囲に違いがあることを意識づけ，仮定をおき直すきっかけを与える． ・作図で描いている図と実際のミラーでの見える範囲に違いがあることを意識づけ，仮定をおき直すことの意義を経験させる． ・仮定を見直し，おき直すということを意識させる最初の場面とし，板書で意識づける． ◎A-⑤評価
自力解決②	[B-①現実場面における問題] 3．(2)の場面：ミラーを，幅を持つ平面鏡で表示した場面	T：みなさんの実感としてミラーってどのくらい大きいでしょうか．ちょっと手を横にして示し	[ミラーを上からみたとき 60cm の直線であるとみる]

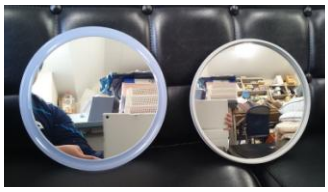
10 分	3-1．現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで数学的な問題場面としておき直す.	てみてください. S：(再現する) T：なるほど．実際ミラーって何種類かあって直径が 60cm，80cm，100cm あるんだよ．今回は（手で実演）一般的な直径 60cm にしようと思います．では，ミラーに幅を持たせるとしたら何か変えなければならないものあるかな．作図を見てください．これがさっきのミラーですね. S：ミラーの位置かな．さっきの場所だとはみ出てしまう. T：はみ出していると何でいけないでしょうか？ S：危ない. T：ではみ出さないためにはどうしたらよいですか？ S：道路より外側におけばいい. T：さっきは点で見ていましたから幅がなかったのですね．では外側におくことにしましょう．半径が 30cm だから，この分だけ外側におけば道路にはみ出さないですね．問題の状況はわかりましたか？では WS 配布します.	[ミラーが平面鏡である] [ミラーが道路にはみ出ないようにおく(道路端より 30cm 上にミラーの中心をおく)] ・わからなければ先ほどの作図を振り返り，ミラーの位置を確認する.

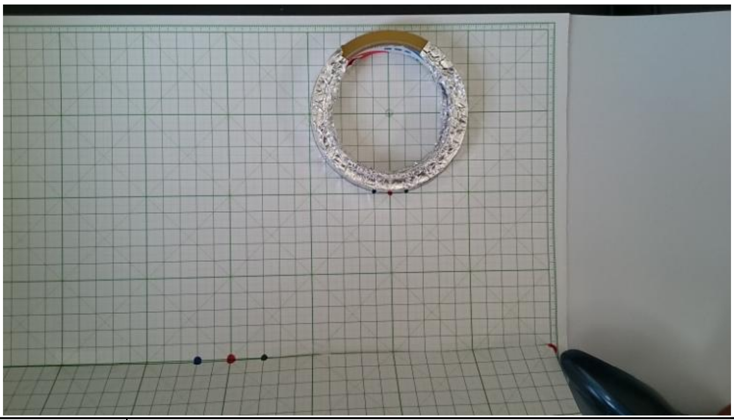
(2)ミラーが幅をもつことにする．車を表す点 Y が右に 2m 動いたとする．このとき，ミラーでこの車を確認できるかどうか，作図をして調べよう.

	[B-②数学的な問題場面] 3-2．数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで，数学的モデルを導く.	T：さて，この WS では最終的に動いた Y が作図したミラーで確認できるかを調べることが目指す解決のゴールです．(2)の作図はミラーの前提が変わったということで(1)とは少し作図方法が変わるかと思います．まず，どこでの入射と反射の作図をすればいいのか考えましょう．(1)は最初に入射の線と反射の線がありました．そこから対称軸を作図してミラーの線を作図しました．今回は最終的に何を作図しなければいけないですか？ S：反射の線. T：そうですね．では反射の線を引くためにはどうしたらよいでしょうか？というのを考えてみ	◎B-①定式化 ・平面鏡における作図の仕方を全体で確認する. ・線対称の性質を思い出させる. ・板書で確認しながら進める.

	[B-③数学的モデル] 3-3．作成した数学的モデルを数学的処理し，数学的結論を出す．	てください．(1)のようにうまく道具を使えれば作図できそうですね． T：では，また WS で作図したいと思います．今回も縮尺が 1／50 です．さっきの作図では道路の端にミラーを置きました．しかし，半径 30cm 分上げることにしましたね． WS にも道路からその分上げたところにミラーの直線を描いています．何をやればいいかわかりましたか？では始めてください． S：（問題解決） ・(2)②について(※①については(1)と同様) ミラーの両端の点について，O より左の点を P，右の点を Q とする． 作図例①	◎B-②数学的モデルの作成 ・もし反応がなければ図形の対称性に気づかせる． ・対称軸は垂線で，等距離の長さを取るのはコンパスで可能．また，分度器で入射角と反射角が等しくなるように角度をとって，反射の線を描くこともできる． ・縮尺 1／50 で作図する． ・机間支援で指名する生徒を考えておく．
			
		作図方法 ①点 X から点 Q へ入射線を引く． ②点 Q において m に対する垂線 ℓ'を引く． ③点 X から ℓ'へ垂線 m'を引き，交点を S とする． ④点 S から m'上で SX＝ST となる点 T をとる． ⑤点 Q と点 T を結ぶ．	・コンパスと定規を主に使った解決の作図である． ・入射と反射はミラー全体でされているが，見える範囲を作図するために，ミラーの両端での作図ができればよい．
発表②5分		T：作図できましたか？どのように作図をしたか説明してくれますか？ S：対称軸までの距離が同じようになるような点を取って，対称軸と左右の対称な点を結んだ線分が垂直に交わるように作図した． S：対称軸を作図して入射角＝反射角となる点を取って作図した．	・分度器で入射角＝反射角

	[B-④数学的結論] ※1 時間区切り	T：そうですね．このように作図してみて何か変わったことはありますか？ S：見える範囲が直線ではなく幅があって広くみることができました．	となる点をとって作図してもよい． ◎B-③数学的解決
練り上げ② 10分	3-4．現実場面に照らして解釈をし，現実場面における結論を出す． [B-⑤現実場面における結論] 3-5．現実場面に照らしてよりよい数学的モデルを志向し，問題解決の前提となっている仮定を見直すことで，問題解決の方法と結論の妥当性を評価し，新たにおき直す仮定を考えることで，問題解決を進展させる．	T：作図ができたら結論はどうですか？ Y はミラーで確認できましたか？ S：できました． T：ということミラーに幅をもたせたことは(1)よりよい結論が出せたということでしょうか？ S：そうだと思います． T：なるほど．さっきよりずっと現実味が増した感じがしていますね．さて，少し振り返ってみましょう．皆さんはここまでミラーについてまずどのような図形で表していましたか？[1] S：点です． T：では次は？ S：幅があるもの． T：そうですね．これらのことを前提のもとで解決してきましたね．前提が変わることで作図と結論はどうなりましたか？ S：変わっていった． T：ではそれで問題の解決は進みましたね？なので，問題解決ではこの前提を意識することがとても大事ですね．この前提のことを「仮定」といいます．この仮定をまず見直す(※板書の(1)で)，そしておき直す(※板書の(1)で)ことで問題解決を進めることができたのですね．ここまでいいですか？では，もう少し考えてみましょう．この作図ではここまで移動しても Y が見えるということが分かりました．では，この辺りにいたときはどうしましょう？見えますか？ S：見えません． T：でもこの辺りも見えないと？ S：危ないと思う． T：ではどうしたらよいでしょうか？ S：もっと見える範囲を広げたい．	・生徒らに解釈・結論を求める． ◎B-④解釈 ・仮定について意識させる場面とする．

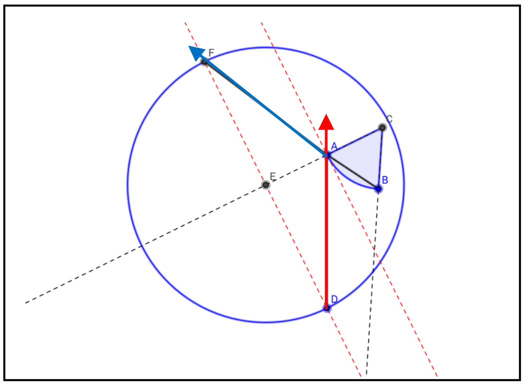
	[C-①現実場面における問題]	T：そうですね．では最初に見た写真をもう一度見てみましょうか？もしかしたらミラーについて仮定をおき直すヒントがあるかもしれません(写真提示)．どうですか？ S：歪んでいる．曲がっている． T：なるほど．実はこのミラーの縮小したものがあります．さっきのものは真っすぐだと言っていましたが，表面に違いはありますか？[2] S：新しい方は表面が曲がっている． T：なるほど．確かにそうですね．ということはこのミラーをこのようにおきますね(作図のミラーに合わせておく)．今は図形的にはどのようなものでミラーが描かれていましたか？ S：直線の一部です．線分です． T：そうですね．そして今のは曲がっているということでした．ということはこういう風にふくらみをもって描けると思います．このふくらみを延長していくと？[3] S：円になる． T：その中でミラーはこの円の？ S：一部．弧． T：そうですね．ここで(2)での作図で用いたミラーを平面鏡と言い，この新しいミラーを曲面鏡と言います．ではミラーを円の一部であると仮定をおき直して解決を進めてみましょう．	・実物の縮小版を用意する． ・実際のミラーを見てみると平面鏡だけでなく曲面鏡があることがわかる．ゆえにミラーが曲面鏡ではないかとの仮定を立てる．  平面鏡　曲面鏡 ・ここでの仮定をおき直す過程はなるべく生徒主導で進めたい．(自力解決) ・わからなければ滑らかな曲線であることを踏まえて考えさせる． ・作図と現実場面を比較し，仮定をおき直してここまでの問題解決がなされていることを意識づける． ◎B-⑤評価
集団での解決15分	4．(3)の場面：ミラーを曲面鏡で表示した場面 4-1．現実場面の問題を単純化・理想化し，さらに条件を整理することで数学的な問題場面としておき直す．	T:さて今ミラーを円の一部であると仮定をおき直しけど，円の大きさは何できまりますか？ S：半径．直径． T:：そうですね．今回ミラーを円の一部と考えると，半径220cm あります．どうですか？大きいですね．ではこれも使って解決していきましょう．さて作図をする上で，この曲面のときでも平面の時と同じように法則を使えるのと考えていいのでしょうか？皆さんどう思いますか？	[ミラーが円の一部とみる] [ミラーの半径 220cm とする]

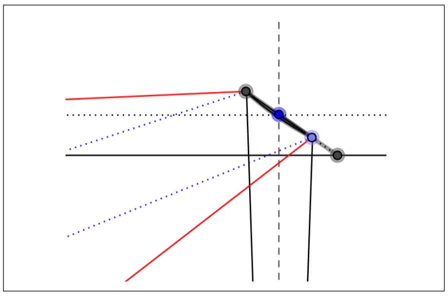
		S：使えると思う．使えないと思う． T：ちょっとわからないですね．ではここで曲面での入射と反射を再現した実験をしてみたいと思います．本当はみんなにやってもらいたいけど，一つしかないので先生がやって見せます．	
			
		T：まずこの円がミラーの曲面だとしてください．この下に赤・緑・青の 3 つの点があります．このそれぞれの点にレーザーを入射させたいと思います．まず赤に入射させてみます．レーザーが当たって赤いところが反射しているところなので，あとで反射線を描くために 1 つ点を取っておきましょう．では，続いて 1 マス分右の緑に入射してみます．これも反射の線を引くために点を打っておきます．最後に左側の青に入射させてみましょう．これも点を打っておきます．ではそれぞれの点で入射と反射の線を描いてみます．ここまでで曲面での入射線と反射線が描けました．では，それぞれの色の点で法則が成り立つか考えるために対称軸を引きたいのですが，どうですか？引けそうですか？ S：引けると思う． T：引けるとしたらなぜ引けるのでしょうか？ S：点で見ているから． T：点で見ているとはどういうことですか？ S：平面でも曲面でも入射と反射をする一点でみたら状況は同じと見えるから． T：前の場面と今の場面が同じとみれたのですね．素晴らしいですね．では引けるとしたらど	・銀紙で舗装した円形のものにレーザーを入射させる．気付かせる観点としてまず一つ目として対称軸が平面の時とはずれるということである．そしてこれが延長すると，円の中心と交点を持つことである．2 つ目が鏡の面が変わるということである．平面における鏡の面が曲面では円周ということになり，元々平面で鏡の面だった線が曲面では接線になっていることである． ・わからなければ図で確認する．(1)では一点での反射，(2)ではミラーの両端，つまり二点での反射を作図した．つまりどちらも反射について 1 つの点で作図している．このことから曲面でも一点での反射については

		う引けばいいですか？ S：入射角と反射角が等しくなるように引けばいいと思う． T：なるほど，ではやってみましょう．まず入射角と反射角の合わせた角度を測って，これの半分が対称軸ですね．では対称軸がこのように引けるかと思いますが，平面の時と比べてみてどうですか？ S：ずれたと思う．平面とは違うところにある． T：そうですね．ではこれは延長するとどこにぶつかるでしょうか？ S：円の中心． T：そうみたいですね．つまり，作図で反射の線を描くためには対称軸が引ければ作図できると思うのですが，対称軸はどうすれば引けるとわかりましたか？ S：円の中心とミラーの端の点を結んだ線を引けばいい．	同様に考え，入射角＝反射角になるような対称軸が引ける． ・円の中心が見つけられなければ，青の点でも対称軸の作図を先に行ってみる．
	[C-②数学的な問題場面]	T：そうですね．ここまでわかりましたか？	◎C-①定式化
	4-2．数学的な問題場面において，近似・仮定の設定をすることで，数学的モデルを導く．	T：では作図に入りたいのですが，ここで確認したい結論として，Y がさらに進んで 9m の地点で確認できるかどうかを作図して確認してほしいと思います．ここは先ほどの作図では確認できますか？ S：できません． T：そうですね．では，曲面鏡を使うことで確認できたらいいですね．では WS を配布します（WS 配布）．	

(3) ミラーを円の一部と考え，このミラーを含む円の半径を 220cm とする．車を表す点 Y が右に 9m 動いたとする．このとき，ミラーでこの車を確認できるかどうか，作図をして調べよう．

		T：ミラーを円と見たときの円の中心はミラーの両端から 220cm になっていましたね．WS での縮尺が 1／50 になっていますので，4.4cm になります．これをミラーの両端からコンパスでとって交点を出し，円の中心として作図してみましょう．そのあとは，今の実験で確認した法則	

	[C-③数学的モデル]	を使って作図してみましょう．でははじめてください． S：(作図)	◎C-②数学的モデルの作成
自力解決③ 10分	4-3．作成した数学的モデルを数学的処理し，数学的結論を出す．	作図例  ・作図の方法 ①円の中心をとるためにコンパスで 11cm をミラーの両端 2 点から取り交点をとる．これが円の中心となる． ②円の中心からミラーの両端へ半直線を引く．これが対称軸になる． ③点 X からこの 2 本の対称軸に垂線を引き，交点をとる． ④この交点を中心に点 X までと等距離の点をとり，この点とミラーの端の点とを結ぶ． T：作図できましたか？では作図の方法を説明してください． S：(説明) T：いいですね．ではこの曲面鏡で Y は確認できますか？ S：できます． T：それは良かったですね．曲面鏡でここまで確認できることが分かりました．では，あとここ(X の正面部分)が見えればいいけど，ここはどう？見える？ S：自分で直接確認できます． T：そうですね．X の視界がこのように(丁字路左角と X を結ぶ)考えられるので，見えますね．つまり Y がこの 15m の範囲で確認できるように	

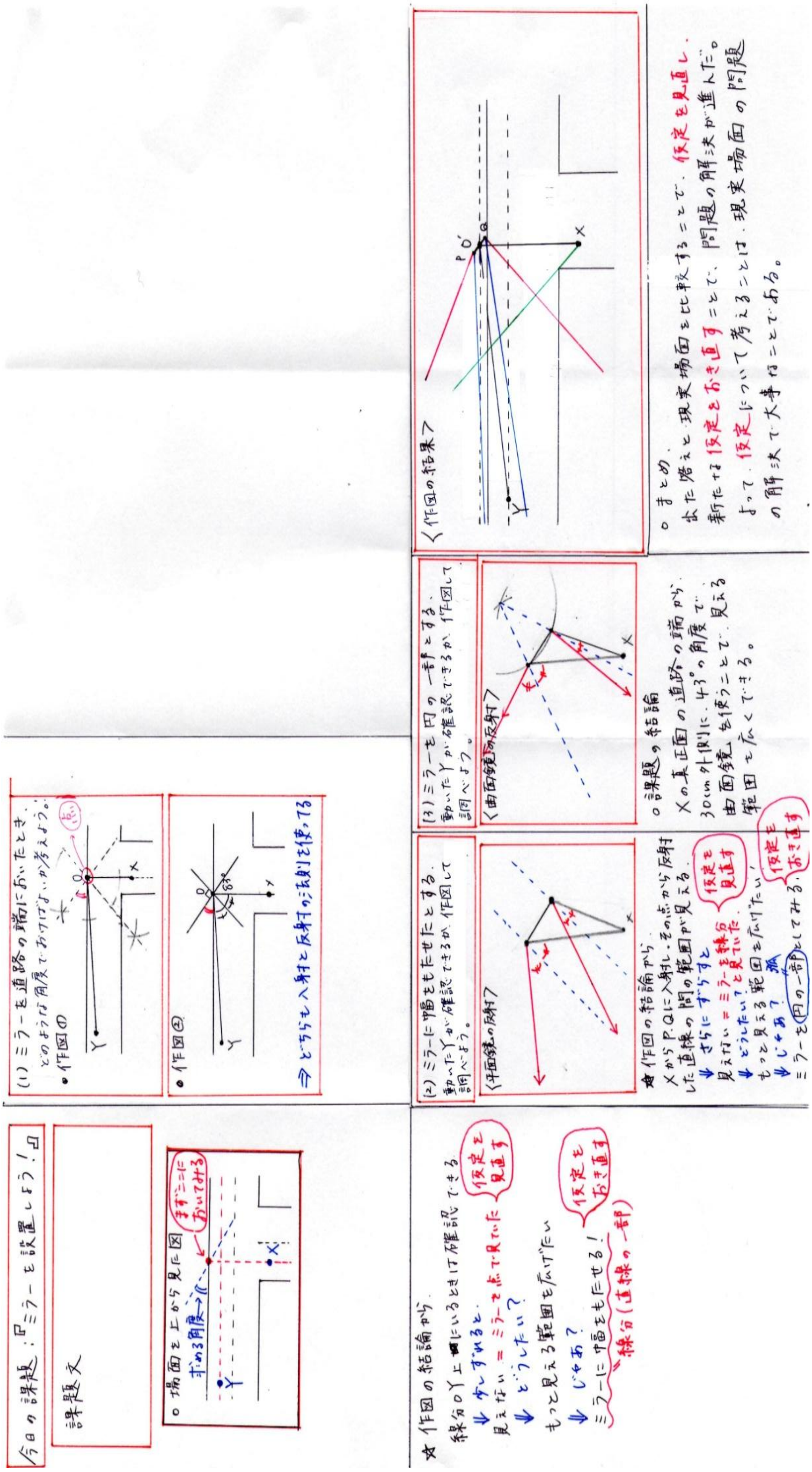
	[C-④数学的結論] 4-4．現実場面に照らして解釈をし，現実場面における結論を出す． ［C-⑤現実場面における結論］	なりました．素晴らしいですね．あと，(2)のプリントと(3)のプリントを重ねてみてください．どうですか？  S：見える範囲が大きくなった． T：そうですね．このように曲面鏡にすることで広い範囲が確認できるようになりました． T：では，結論はどのように言えそうですか． S：曲面鏡にすると，Y を 15m の範囲すべてで確認できるようになりました．	◎C-③数学的解決 ◎C-④解釈
まとめ 10分	5．「仮定の意識化」に着目した学習の振り返りとまとめ	T：では，まとめの WS を配ります．(まとめWS 配布)．今日の課題の結論をまとめておきましょう．この課題に対して 1 つずつ答えていきましょう．まず位置は？ S：X が進む方向の延長線上で道路端よりも 30cm 外側です． T：はい．では角度は？ S：道路に対して 43°の角度です． T：いいですね．では最後に見える範囲を大きくするためにどうしましたか？ S：曲面鏡を使いました． はい．ではこれを課題の結論とします．皆さんいいでしょうか？ S：はい． T：では，実際にミラーが置かれている場所を見ていってみましょう．どうですか？ S：真ん中か真ん中より左かな． T：そうですね．なので，皆さんの結論は現実場面でも考えられている．と言いたいところですが，附属幼稚園の外側の写真見てみよう．どう？	・各自の自由な方法でまとめさせる． ◎C-⑤評価 ・仮定をおくことで結論に違いが出たりすることから，現実事象の問題解決には仮定をおくことが重要な視点であることがわかる． ・仮定をおき直していくこ

	    	S：真ん中より右だ． T：右泡を見ているというのもあるけど，もしそうだとしてもずれすぎだね．何でだろう． S：看板がある． T：そう．でもこれが無いとしたら皆さんはどこに置きたいですか？ S：看板のところ． T：だと思います．現実ってうまくいかないときもあるんですね．でも理想を追い求めることはいいことです．数学で理想的な答えを出した上で実際に設置できればいいですね．ここまでいいですか？ S：はい． T：では，ここから数学的にどのように考えてきたかまとめに入っていきます．今日は「ミラーを設置しよう」という身近な問題について解決してきました．ここで全体を振り返ってみます．ここまで 3 つの場面について考えてきました．しかし，それぞれで結果が異なりました．なぜでしたか？ S：ミラーについてそれぞれの場面でおいた仮定が違っていたから． T：なるほど．つまり問題解決のためにおいたミラーについての仮定が異なれば，結論も変わってくるということです．それぞれの場面でミラーはどのような仮定で置いていたでしょうか？ S：(1)の場面ではミラーは点でした．(2)の場面では 60cm の線分の平面鏡，(3)では半径 220cm の円の一部の曲面鏡でした． T：そうです．つまり今回の問題解決においてミラーについておいた仮定はとても重要な前提だったのです．作図もミラーを点として見えていたからこのような作図になったし，平面鏡も曲面鏡も同じです．しかし，皆さんは問題を解いてる時，この仮定を意識していましたか？実は点だっただとか．どうですか？ S：全然気にしてなかった． T：最初は意識してなかったけど少しずつ意識で	とで数学的モデルが洗練され，より現実場面に即した結論が導き出せる． ・生徒に余裕があれば暗黙裡におかれた仮定があることも触れ，この仮定が結論に大きな影響を与えていたことを理解させる． ・生徒にそれぞれ振り返りとまとめをさせる．

		きるようになっていったと思います．でも仮定を見直して，さらにおき直すことで，実はおいた仮定が実は意味のあるものだったと気づけると思います．(2)でも(1)と同じように仮定を見直し，おき直しています．では，まとめてみましょう(板書). 今回の問題解決で色々な経験ができたと思うので，今日の学習について感想を書いてみてください. S :（発表） T : これまであまり経験したことがない問題解決だったのではないでしょうか．このように身の回りの現実事象は仮定をおくことで解決することができます．この仮定をおくことは問題解決で前提を考える大事なことでしたね．実は，まだまだ仮定をおき直して解決していくこともできると思います．例えば，ミラーをおく場所を変えたり，道路の形を変えたり．時間があったらやってみてください.	

資料

(6)板書計画


今日の課題：『ミラーを設置しよう！』
課題文
○場面を上から見た図
求める角度
まずここにおいてみる
(1) ミラーを道路の端においたとき、どのような角度でおけばよいか考えよう。
●作図①
点
●作図②
⇒どちらも入射と反射の法則を使ってる
☆作図の結論から
線分のY上にいるときは確認できる
↓少しずれると
見えない＝ミラーを点で見ていた
仮定を見直す
↓どうしたい？
もっと見える範囲を広げたい
↓じゃあ？
ミラーに幅をもたせる！
仮定をおき直す
線分(直線の一部)
(2) ミラーに幅をもたせたとする。動いたYが確認できるか、作図して調べよう。
〈平面鏡の反射〉
☆作図の結論から
XからP.Qに入射し、その点から反射した直線の間の範囲が見える。
↓さらにずらすと
見えない＝ミラーを線分と見ていた
仮定を見直す
↓どうしたい？
もっと見える範囲を広げたい！
↓じゃあ？
弧
ミラーを円の一部としてみる。
仮定をおき直す
(3) ミラーを円の一部とする。動いたYが確認できるか、作図して調べよう。
〈曲面鏡の反射〉
○課題の結論
Xの真正面の道路の端から30cm外側に、43°の角度で、曲面鏡を使うことで、見える範囲を広くできる。
〈作図の結果〉
○まとめ
出た答えと現実場面を比較することで、仮定を見直し、新たな仮定をおき直すことで、問題の解決が進んだ。よって、仮定について考えることは、現実場面の問題の解決で大事なことである。

②授業プロトコル

・1時間目

(00：00)

T1：では日直さんお願いします.

S1：お願いします.

T2：皆さんおはようございます.

S2：おはようございます.

T3：先生の名前は毛内一元といいます．教育学部から来ました．今日は皆さんと数学の勉強をしていきたいと思いますのでよろしくお願いします．まず，先生の最近の悩みがあって，先生運転するんですね，車を．ですけど，やたらと車にぶつかられそうになる．すごい危険なんですね．怖いんですよ．なので，今日はその悩みをみんなで解決していきたいなと思ってるんですけど，いいですか？みんなもどうですか？事故に，自転車で，もう雪降っちゃったからないかもしれないけど，自転車乗ったときに，事故に遭いそうになった人いますか？あった？じゃあそれを改善しようね．ということで，今日はそういうことをやっていきたいと思います．その中で，皆さん道路とか歩いているときに，思い出してほしいんですけども，なんか交通安全のために何かあるものがありませんか？事故防止のための対策というか．思いつくものありますか？

S3：標識.

S4：鏡.

T4：おお．色々あると思います．例えば附属の近くで最近？もう一ヶ月くらい前かな．ちょっと新しくできたものがあるんですけど，何か知っている人はいますか？わかんない？10 月 30 日のことなんですけど．ちょっと写真の見せたいと思います．(写真提示)さあどうでしょう．ここどこかわかりますか？わかんない？ここ附属中学校ですね．わかった？三岳公園から出てきたところに実は，ちょっと拡大しようか？ミラーが設置されたんです．知ってた人？あれみんな知らない？実はこんなところに交通安全のための対策が取られているということがあります．いいですか？今日はこのミラー，いろんなところにあるけど，どのように設置されているのかな？ということを考えてみて，実際に効率のいいミラーの設置の仕方をみんなで考えていきたいと思いますので，よろしくお願いします．いいですか？ではまず今日の課題から行きます．はい，今日の課題．アッ書かなくていいですよ？あとでワークシート渡すので，はい，『ミラーを設置しよう』という問題をちょっと今日は解決していきたいと思います．いいですか？では，具体的な問題をちょっと出したいと思います．(課題提示)はい，読んでみます．交通安全面での危険性を少なくするために，ミラーを設置したいと思います．いいですね．どのような位置，角度で設置すればよいか考えましょう．また，見える範囲を大きく確保するためには，どうしたらよいか考えましょう．いいですか？二段構えです．場所とか，あとはどのように広くするか．ということをこれから考えてきたいと思います．いいですか？では，実際に考えていきたいんですけど，まずミラーどういうところにありますか？思い浮かべて.

S5：曲がり角.

T5：いいですね．ちょっと書けないからごめんね，ここに書けないからホワイトボードに書くね．曲がり角．他にありますか？

S6：視界の悪い場所.

T6：例えば？視界の悪い場所.

S7：横に建物がある.

T7：ん？

S8：こういう曲がり角があって，ここにでっかい建物がある.

T8：でっかい建物がある．障害物とか．いいですね．曲がり角なので，今回はちょっとこの場面をちょっと使ってみましょうか？交差点．なおかつ，T字路というところを考えてみたいと思います．みんなT字路わかる？いいよね．大丈夫だよね．はい，T 字路を考えてみたいと思います．で，それが一応こんな感じですかね，はい，書いてきました．はい，いいですか？はい．まず道幅書いておこうか，条件として．まずここ，一応 4m ということにしておきたいと思います．4m 大丈夫？イメージつく？大丈夫かな，はい，一応この黒い線というのは中央線，いいよね？道路なので中央線があるとします．そして車に乗っているという状況を想定して，この赤線は車が通るところ．いいよね．車は道の真ん中通るよね．ということを一応考えておきたいと思います．ここまでいいですか？いい？大丈夫？場面としてまず，自分が交差点に入ります．そして，右折しようかなというときに，左から来る車を確認したい．という場面を考えてください．ここまで大丈夫？想像できる？大丈夫？なので，それで考えていくんですが，じゃあとりあえずXの場所．自分，自分が車に乗っているとして，Xと名乗りましょう．自分のことを．そうすると，Xはどこに置けますか？どの辺？

S9：下側の.

S10：左.

T9：この辺？はい，この辺にしようか？一時停止するからね．この辺にしようか？はい，じゃここをX．はい，じゃYは？あっあのYってこっちから来る車．来る車．ふっ.

S11：(笑い)

S12：左側.

T11：左側から来るから，この辺でいい？はい，この辺に Y という車がいますよということを考えましょうか？いいですか？あと，距離考えておきたいんですけど，X，一時停止線を少し考えたときに，どのくらい離れていたらいいかな？イメージしてみて.

S13：1m.

T12：おっ 1m．じゃあ，Y，Yのこの距離どのくらいにしようか？

S14：長いほうがいい.

T13：おっ，長いほういい．いいですね．長いほうがいい，何でちなみに？

S15：長いほうが，なんか来るまでよさそう.

T14：なるほど，でもあんまり長いとみる意味ないよね.

S16：(笑い)

T15：だからもう少し短くしてみない？さすがに.

S17：10m.

T16：おー．いいとこきましたね．ちょっとその，少し距離を考えたときに，まあ，Yがここ，Xここ通るんだよね．って考えたときに，ここにいたときに，ぎりぎり止まればいいかな？急ブレーキ，キキ—って，という場面を想定したときに，こういうデータがあります．制動距離．制動距離誰か聞いたことありますか？わかんないかな．制動距離っていうのはこう運転してて，キキ—って止まって，皆車す

ぐ急に止まれる？車.

S18：止まれない.

T17：止まれないよね．ちょっと動いちゃう．この動いた距離を制動距離と言います．いいですか？車ってだいたいどのくらいの何キロで走ってるかわかる？

S18：普通 40km/h.

T18：普通のところだと 40km/h，ちょっと大きい道路だと？

S19：60km/h.

T19：60 くらいで走る車もいるよね．ということを考えると，応一応 80 とか 100 出す車ちょっとね，危なすぎるから，考えないとして，60 までにしましょう．そうすると Y はどのくらい離れていればいいと考えられますか？

S20：普通のところだと 6m.

T20：普通のところだと 6m，でも一応 60 キロも考えておきたいから.

S21：14m.

S22：15m.

T21：15m. まあ 14m だとあとちょうど止まっちゃうんだよね. ということはぶつかっちゃうんだよね.

S23：へへ.

T22：ということなので，ここは 15m ということにしておきたいと思います．いいですか？ここまで．ちょっと想像できてきた？いいかな？じゃあここまで，ん？どうした？

S24：何で急ブレーキなの？

S25：ははは.

T23：確かにね，確かにね．ちゃんと見えてればいいんだけど，あんまり遠くにしても，さっきもあったけど，ちょっと意味がないかなと思うから，ここ見えるようにしたいというのもあるからちょっと 15m で考えるということにしてみましょう．じゃあ，ここまでわかったけど，なにをおくんだっけ？

S26：ミラー.

T24：ミラーだよね，そうそう，ミラーをどこにおこうか？これだと.

S27：真ん中にでっかいやつ置く.

T25：真ん中. 真ん中ってどこ？赤い線？のこれ？あーなるほど. ここもありますね. 他にもありますか？いっぱい置くとこあると思うんだけど，どう他にもありそう？

S28：ないと思う.

T26：ん？ないと思う？大丈夫？みんなここで大丈夫？いい？じゃとりあえずここにおいてみようか？まず．まずここにおくということにしてみたいと思います．いいですか？では，最後．ミラーをおくんだけど，位置はいいよね？じゃ角度．どのように置けばよさそうでしょうか？

S29：X も Y も見える.

T27：X も Y も見える．なるほどね．じゃ例えば，先生の手，ミラーだとしましょう．はい，こうおきました（ホワイトボードの図に手を添えながら）．どうですか？

S30：自分の車が見える.

T28：Y は？

S31：見えない.

T29 : 見えない．なんで？なんで？っていうかじゃ何が見える？
S32 : 自分.
T30 : 自分，そうだよね．自分が見える．ということですね．じゃこれどうすればいい?
S33 : 傾ける.
S34 : (手で表現)
T31 : 傾ける．じゃ傾けてみるからストップって言って．(手を傾ける)
S35 : ストップ.
T32 : このくらい？なるほどね．このくらい．こういう風に置くとしましょうか？じゃあこれ具体的に角度とかわかる？ちょっと分からない？
S36 : 30° くらい.
T33 : いい予想かもしれないね．じゃあこれを実際に解決してみよう．ということでいいですか？まず最初ワークシート渡したいと思います．渡ったら一応名前書いておいてください．みんなわたりました？後ろの人渡りました？大丈夫？はい，ではここから実際に解決していきたいと思うのですが，先生も一応作ってきました．えーとじゃあまず(1)ですが，問題一応書いてますね．書いてるのでその通りちょっと書いておきます．ミラーを道路の端におく．でおいたとき，どのような角度でおけばよいでしょうか？ちなみにワークシート渡したのですが，問題場面忠実に表したいので縮尺をかけています．一応 1／50 になってます．例えば，ここ X とこの交差点の手前まで測ってみて．何センチくらいある？普通の短い定規でいいよ.
S37 : 2 センチ.
T34 : 2 センチ，ということは 1m から 1／50 になっているのはわかりますか？ていうことで一応この場面，忠実に再現しているので，皆さんもこの状態で考えてほしいなと思います．では，さっき言ったように，このミラー置くところ，O とします．今回，O としたときにどのような角度で設置したらよいか．作図して問題を解決してみましょう．一応，コンパスと，分度器と，30 センチ定規，ちょっとこれ 1 本，2 人で 1 本，ごめんなさい，使ってやってみてください．いいですか？たぶん，今まで中学校とかかな．習ってきたことを使ってみれば，解決できるかもしれません．ちょっと何を考えればいいのかなとちょっとやってみてください．ではちょっとやってみましょうか？始めてください．(15 : 58)

(自己解決)
T35 : さ，見え方です，見え方．とりあえずコンパス出していいよ.
T36 : まだノーヒントね.
T37 : なにすればいいかわかる？
T38 : たぶんあんまり経験したことのない問題解決だと思うので，頭使ってやってみてください.
T39 : だいぶ解決できてきているみたいだね，だいぶ.

(21 : 26)
T40 : じゃちょっと一つ聞いてみようか？西川さん，その作図をする上で何を考えましたか？ちょっと皆にヒントになるようなこと言ってみて．何使ったのそれ？
S37 : 角の二等分線.

T41：おっ，角の二等分線つかったそうです．どうですか．角の二等分線を使ったそうですよ．

(23：20)
T42：じゃあちょっと，このぐらいにしておこうか，一回．どう？ちょっとむずかしかった？いつもの何かテストとかとは違う感じだから難しいなとは思うかもしれないんだけど，どんな作図したのか確認してみましょう．まず，三上さん，ちょっとどのような作図をしたかちょっと教えてください．いいですか？まず？大丈夫だよ，先生やるから．まずどうしました．
S38：X と O と D の角の二等分線を引く．
T43：なるほど．X と O と Y，あっ D，こっちね？なるほど，これの二等分線をひいた．皆さんどうですか？ここで引いた人手挙げて？おっ結構いるんじゃない？ちなみに他のとこに引いた人？西村さんどこに引きましたか？
S39：X と O と Y の角の二等分線.
T44：X と O と Y の角の二等分線を引いたと，ちなみにこっちでやった人？さあどっちで引いたらいいでしょう？ちょっとここ難しいとこだよね．D のところで引いても多分いいんだよ．でも Y のところで引いてもいいと思うんだけど，どっちがいい？どっちでやればいいだろう．いい，じゃ今みんな何を見たいんだっけ？X のところにいて，何が見たいんだっけ？
S40：Y.
T45：Y を見たいんだよね？OK？ということなので，ちょっと Y と結んでみようか？はい，結びました．いい？で，ここで何をするんだっけ？みんなここで何をした？
S41：角の二等分線.
T46：角の二等分線を引いたんだよね．はい，二等分線を引きました．じゃあつぎ，この次何をしたらいいですか？何をしましたか.
S42：垂線引いた.
T47：いいよ.
S43：点 O に垂線，いや点 O を通るように垂線を引いた.
T48：なるほど，ここ少し延長した方がいいね．でここで垂線ね．引きましたよ．じゃあどうすればいいですか？ここまで来て，多分結論ですよね．最後，どのような角度でおけばいいか．角度でおくって言ったけど，さっきどうするって言ったっけ．こうおくって言ったよね．ここからどのくらい上がったか．傾いたか．ということだったので，ちょっと直線の名前書いておこうか．直線 m にしてみようか？この垂線．そうすると角なになにの角度を求めればよさそうですか？
S44：∠mOD
T49：∠mOD．そうですね．ここですね．ちょっと赤にしてみようか？道路からどのぶんき（註 1），傾いたかってことなので，ここの角度を求めましょう．最後求めるところわからなかった人もいるかもしれないけど，ここじゃあ求めてみてください．どうですか？答え出ましたか？（註 1 「ぶんき」とは量を示す言葉として使っている.）
S45：43°
T50：43°．はい，一つ目の意見 43°．まだいってない．ちょっと頑張ってみて．他は？
S46：44°

T51：44°．他にある？
S47：約 40°
T52：約 40°．この辺り？ちょっとじゃあ，43°の人？結構いる．44°の人？ちらほら．いいんだよ？40°くらいの人？41°？42°？いない，なるほど．どうしようか？ばらついたね．でも誤差出るのは仕方ないんだよ．実測で調べてるから．真ん中くらいにしておこうか？とりあえず．これでいい？43°くらいでいいか？じゃあ結論として 43°でおきましょうということにしておきたいと思います．多少ずれててもいいですよ？44°とか 42°でも大丈夫です．ちょっと落ち着こうか？ここで．まだ作図追いついてない人ちょっとやってもいいよ．
(30：24)
T53：大丈夫？作図できそう？
(31：05)

T54：よし，じゃあここで確認しておきたいことがあるのですが，この作図，皆さんここまで習ってきたことを使ったからこういう作図したと思うんですが，何の法則？性質？を使ったか言える人いますか？
S48：理科でありました．
T55：おっ理科であった？いいよ，全然．何使った？
S49：入射角＝反射角．
T56：なるほどね．入射角＝反射角ね．ちなみに入射角はどこだ，これ？ちょっと直線の名前書いておくか？これ m だから，ℓにしようか？入射角どこ？
S50：どっちから見ればいい？
T57：じゃあ X から見ようか？X からみようか．X から入って Y に出ていく感じにしようか．
S51：∠XOℓ
T58：なるほど，ここね？ここが入射角．で，反射角は？
S52：YOℓ.
T59：YOℓ．ここですね．これがどういう性質なの？
S53：同じ
T60：同じ．ちょんちょんと，そういう性質ですね．はい，というのは実は自分書いてきました．見覚えある？大丈夫？じゃここに張っておきたいと思います．今の話だと，入射角，ここと反射角が同じですよ，ということを使ったということですね．皆さんいいですね．既習，習ったきたことをどんどん使ってやれるということはすごいいいことだと思います．では，この作図振り返ってみましょうか？いいですか？まずこの作図で見えているところはどこですか？もう一回確認するよ？どこでしょう？わかる？西川さんわかる？どこ見えてる．ミラーで．
S54：Y が見えてる．
T61：ということはこの直線上は見えてるってことが言える．なおかつここが見たいから Y が見えてる．じゃ一つ質問．Y が例えば，ここから移動しました．ここ見えますか？見えてると思いますか？見えてると思う人？見えてないと思う人？よしじゃあ少し確認してみましょう．ここにこんなミラーがあります．鏡だよね？皆見えてるよね？これをちょっと置いてみようかな？大丈夫かな？じゃあ例えば，富田君誰か見える？

S55：見えません.

T62：こうすれば見える？こう？

S56：見えません．あっ見えます.

T63：誰見える？

S57：ももこさん.

T64：手挙げてもらえる？おっなるほどね？じゃあごめんね，ちょっと立ってもらっていい？大丈夫，罰ゲームじゃないから．じゃちょっとごめんね，富田君，ちょっと動いてじゃあ左に動いてみようか？見えるところでストップっていって．見える？あっじゃあもう一回最初から行こうか．よーいスタート.

S58：見えない．ストップ.

T65：あっじゃもう少し戻って．ちょいちょい.

S59：（笑い）

T66：もう一回，ストップっていってね．ゆっくりゆっくり.

S60：ストップ.

T67：いい？このぶんき（註 1）動きました．このぶんき（註 1）動いても見えました．いい？このミラーだと．ここまで OK？じゃあ作図に戻ります．この作図だと Y のところしか見えない．点だからここしか見えないんだよ．ちょっとずれれば見えない．いい？ということはちょっとこの作図だとあれっ？っていうところがあるんだよ．作図の方法自体はあってるんだよ．いいよね？間違ってないよね．なんだけど，作図にある前提にしているものが違う．ということになります．この作図でミラーは O ですが，図形でいうと何ですか？（註 1 「ぶんき」とは量を示す言葉として使っている.）

S61：直線，違った.

T68：O のところ.

S62：交点

T69：こう．．．点．点ね．点で見てるんです．いい？点だよね？点で見てます．だけどミラーは見て，これは？点ですか？

S63：円？

T70：点じゃない．円というよりは，ここ．横に？

S64：広がっている.

T71：横に広がっている，幅があるんだよね．幅がある．だからこの作図で置いてる前提とホントのミラーの前提がちょっと違うんですね．なので，ちょっとそれを踏まえて次の場面に行きたいと思うのですが，ちょっと今の流れよくわからないよね？確認してみたいと思います．いいですか？作図の結果から．はい，まずどこが見えるんだっけ？この直線上．OY 上は見えるんだよね．ここまで OK？いいよね．じゃあここから，Y を少しずらしました．そうするとどうなったんだっけ？

S65：見えなくなった.

T72：Y は見えなくなりました．じゃあ皆さんどうしたいですか？

S66：ちょっとぐらい動いても見える

T73：見えるようにしたいんだよね？いいよね？はい．みえるようにしたい．じゃあ，どうするの？今やったよね．ミラーに，ミラーを点でなくて？

S67：幅を持たせる.

T74 : ミラーに幅を持たせる．ということですね．こういう風に次考えてみたいと思います．いいですか？ちょっと難しいよね？やったことないよね？こんなこと．やったことないと思います．難しいです．ただみんなで頑張ってやってみましょう．ではそれを踏まえて，次(2)です．(2)に入っていきます．ということでワークシート配りましょうか？はい，わたりました？また名前書いておいてください．いいですか，じゃあみなさんもう一度実際のミラー見てみましょうか？(写真提示)このミラーどのくらい大きいと思いますか？手でちょっと表現してみて？

S68 : 1m

T75 : 1m，直径 1m．結構大きさ色々ありそうですね．はい，実際これ売ってます．ホームセンターとかで，見たことある？

S69 : ないです.

T76 : ないと思うけどね．あんまりそんなミラー買いたいって言う人はいないと思うけど．売ってます．例えば，一般的には 60 センチ，80 センチ，100 センチ．だいたいこの 3 種類売ってます．ちょっとまあ，道路とか歩いてるときにこれそんくらいの大きさかなって見てみてください．たまにすごいでかいのあるから，それは 1m，100 センチだと思う．でも一般的には 60 センチ，いい？一般的には 60 センチなので今回はその 60 センチということで考えてみたいと思います．一応ワークシートに書いてるよね.はい，じゃあひとつ，ミラーが幅を持ちました．60 センチ．まあ，最初ここにおいてましたよね？だけどここに置いちゃ？おけそう？まず．おいたらどうなりそう？こういうことだよね.（作図にペン合わせる.）てことは？ん？何て言った？

S69 : 通る時に邪魔.

T77 : 通るときに邪魔だよね？そう，通る時に邪魔なんだよ．なのでどうすればいい？

S70 : 少し寄せればいい.

T78 : そうだね，少し外側にすればいいよね．OK？あげる分としては直径が 60 センチだから，半径 30 センチ分あげれば，まあぶつからないかな．ということです．なので，一応，図見てみると，さっきよりも 30 センチ分あがったところにあります．先生の出しましょうか？こんな感じになるかと思います.こういう状況になりました．どのように見えるのでしょうか？想像つきます？つかなかったら，さっきも作図して求めたから，今回も作図して求めてみようか？いい？使うのはやっぱり，これ，入射角と反射角が等しいということを使ってみてください．あとは，ミラーが幅を持ったということだよね．ミラーが幅を持ったということをヒントにしてちょっと作図してみましょう．はい，ではじめ.

S71 : Y さんが動いているっていうのは？

T79 : あっそっかそっか，それ言ってなかったね，ごめんごめん．Y さんがどこだっけ？何メートル動いたって書いてる？4m だ，そうそう.

S72 : 2m.

T80 : あっ 2m か．2m ね．はい，この人がここからこのぶんき動きました．っていう状況ね．なので，このくらいでしょうか？はい，ここにいるとき Y は，さっきだと見えなかったよね．でも今だと，見えるんでしょうか？見えないんでしょうか？ということを作図して求めてみましょう．いいですか．さっきの作図を生かしてやってみてください. ちょっと，もしかして鳴る？ちょっとやってみようか？始め.(1)の作図を生かしてやってみてね.（チャイム）鳴っちゃった．どうする？一回区切るか？区切って，休み時間の時も考えてみて．で，もし作図できる人がいたら作図してみておいてほしいかな．あんまり無

理しなくていいから．いい，ちょっと頭の中整理しておいてね．ちょっと難しいことやってるから．じゃどうしようか．日直さんにまた，日直さんなしでいっか？はいじゃあ，一回休み時間にしたいと思います．休憩に入ってください．どうぞ．
(45：27)

・2 時間目
(00：00)
T1：みんないる？はい，では 2 時間目始めたいと思います．いいかな．始めますよ？じゃあ，はい，色々この図で疑問点がある人が先生に聞いてくれました．ありがとうございます．まず，んーと，誰だっけ？角度どうしたらいいんだって話してくれたの誰だっけ？ちょっと立って？
S1：はい．
T2：じゃあどうしたらよさそう？この角度．まず角度って何だっけ？
S2：道路の端とミラーの角度．
T3：ミラーの角度．まっ今回だと，道路があってミラーの線，ミラーがあるとしたらここかな？
S3：あっ違った．さっき道路の端につけたミラーをそのまま点線のところに移動したので，点線から 43°です．
T4：点線から 43°．ここからか？こういうことね．これを 43°にしたい．
S4：はい．
T5：みんなしたい？みんなしたければ，いいんだけど．ふふ．そうする？
S5；したい？したい？
T6：角度が 43°であれば，さっきの話使えるよね．いい？じゃあ今，西田君だっけ？
S6；小島です．
T7：あっごめんごめん．今言ってくれたように，ここから 43°の角度はまずミラーの線ということにしましょう．この O を中心に何センチだっけ？0.6 センチ？0.6 センチ幅をとれば，ミラーに幅ができたと考えられますね．いい？でもたった 0.6 センチだけど，あっごめん，座っていいよ．ごめん．0.6 センチ幅を持たせるだけで，どのくらい広くなるか．作図してみましょう．ってだいぶ結構作図できてる人も結構いるんだけど．またちょっとまた時間とります．どうぞ．幅を持たせた状態で作図だよ？O から 0.6 センチずつ．
(02：21)

(自己解決)

(04：40)
T8：皆幅とった？0.6 センチ．
(06：18)
T9：1 つヒント．(1)はどこで作図したかっていうと O だよね．O で作図をしました．では次，ここだとどこで作図したらいいか．どこだと思う？さっきはここだよね？でも今はミラーに幅ができたから，ど

この点で作図すればいいかな？わかる？ミラーがここからこうなった．ということは幅ができたということははじっこ？この 2 点で入射と反射の作図ができればいいから．例えば，一つやってみようか．X から右端に入射しました．そしたら反射どうやって描けばいいかな？反射の線．わかる？反射の線を描くには，これだよね？入射あります．反射描くには？入射角と反射角は？

S7 : 等しい.

T10 : 等しいんだから，そのためのこれ，対称軸だよ，対称軸描けばいい，対称軸が描けるようにすればいい，ってことは対称軸はこれの？入射角と反射角を合わせたやつの？二等分線だよね．だからまず，この対称軸を描いてみよう．いい？対称軸描ければきっと反射の線も描けるはず．ちょっとやってみようか？

(07 : 55)

(11 : 55)

T11 : よし，ちょっと皆でやってみようか？難しかったかな？いいかな．ちょっと皆でやってみよう．まずちょっと見て？この下の線，下の点，あるよね？ここにじゃまず入射したということを考えたいと思います．ここにも結局入射と反射の性質，法則を使えれば，行けるから，ここで核の二等分線，対称軸をまず引くんだよね？そしたら対称軸っていうのは？ミラーの線に対してどうなんだっけ？わかる？対称軸とミラーの線の関係ってわかる？これとこれ.

S8 : 垂直.

T12 : 垂直だね，そう，垂直ってことはこの点から垂線を引いてみよう．ちょっと一回やってみるよ？垂線を引きましょう．はい，引きました．でこの垂線っていうのが今の？これね．対称軸だよね？じゃあ対称軸からもう一つ性質があるんだけど, 例えば, ここの点とここの点ってどういう関係？ここと ここ．どういう関係？覚えてる？対称軸，点と点.

S9 : 長さが等しい.

T13 : 長さが等しい．あっそうですね．長さが等しいんです．いい？んで，なおかつ，この点線と青い線の関係は？

S10 : 垂直

T14 : そう垂直，ここも垂直なの．ここも垂直だね．ということを使うと，ここの点出したいよね？ここの点出すために，ここからどういう線引けばいい？ここの点出したい．ここと対称軸に対して？

S11 : 垂直.

T15 : 垂直だから，垂線を引けば，まずこの緑の線は引けるよね？ではまず引いてみます．X から垂線を引きます．じゃあ後どうすればいいんだっけ？この点出せばいいんだよね？どうする？この点出すために．わかる？ここと ここの長さが？同じってことはコンパスでこうとればいい．ここ交点だから，コンパスで範囲とります．これを同じ距離だけ，はいとります．そうすると，ごめんね，ずれた．こんな感じかな．ちょっとずれたな．ちょっと皆もこうやって引いてみて．同じように．対称軸まず引くと，対称軸引いてそれに対して垂線に引くと，後と等距離の点取ればいい．ということですね．ちょっとやってみてください.

(16 : 35)

(17：25)
T16：引けた人はもう片っぽの点も入射と反射の線引いてみて．ちょっとあの作図上すぎるんだけど，もっと下行くはずなんだよ．ごめん，下に行ってるはず，ごめん．

(21：10)
T17：とりあえず，もう一回線引き直したから，やっぱりこうだね．こっちが正しい方．

(21：44)
T18：結論までいった人？作図できたよって人いますか？

(24：28)
T19：よし，もう一本引いてみるか？とりあえず．じゃみんな見て，もう 1 本引いてみます．まず何引くんだっけ？
S12：まず垂線引く．
T20：じゃあ垂線引きます．で，次どうするんだっけ？
S13：さらに垂線引く．
T21：垂線引く．どこから？どこから？点 X からね．これさっきのと同じだから，これ使おう．で，後は等距離とればいいんだよね．こんな感じ，下が青，上が赤．作図としてはこんな感じでしょうか？さっ，こんな感じです．ちょっとこの図見てみて．みんな，ごめんね．ここに Y がいますね．このミラーだと見えますか？どう？
S14：見えない．
T22：見えない？見えない？見える？どっち？見えると思う人？見えないと思う人？
S15：あの青い線の位置ってどっち？
T23：ごめん，こっち．だから範囲としてはこうだよ？ってことは？
S16：見える．
T24：Y はこの範囲に入っているので，見えるということになります．OK？大丈夫？大丈夫じゃないかもね．ごめんね．よし，じゃあみんなもう一回この場面振り返ってみたいと思います．いいですか？まず作図の結果から，いきます．はい，作図の結果からどういうことが分かったでしょうか．さっきはこの直線上しか見えなかったんだよね．なんだけど，今回は？どうなったんだっけ？
S17：面になった．
T25：ん？
S18：面になった？
T26：何ていった？ごめん正解言ってるのかもしれないけど，もう一回言って？
S19：面になったから Y がちょっとくらい動いても大丈夫になった．
T27：そうそうそうそう．結局平面になったから幅を持ったんだよね．見える範囲が，ね，範囲ができました．だから見える範囲ができて，Y もこの内に入ってるから見える．ということですね．ちょっと書いておきます．ミラーが幅をもったので，見える範囲ができた．はい，で，ここで，1 つ．Y は今ここ何だよね？いい？なんだけど，例えば，このへんだったらどう？みえる？見えない？二択．はい，見える

と思う人，見えないと思う人？見えないと思う人の理由は？ここにあると見えません，なぜでしょう？
S20：見える範囲の外にあるから．
T28：そうだね．この範囲から外にいるから，見えないんだよね．じゃあみなさんどうしたいですか？これ？少しずらすと，Y は見えない．さあ，というのを実はこっちもやっていたんですね，どう？同じことやってるよね．でもさっきよりも見てね，これよくなっているよね？場所としてはここからここまで見えるようになった．ね，みえる，いい？さっき点でみてました．ここではどう見てたんだっけ？(2)ではミラーを？
S21：面．
T29：面？面，面，面，面の前に，ほら．ミラーは幅を持たせたんだよね．OK？ということで，この作図 2 つでは，前提としているものが変わりました．前提，最初点で考えてたんだよね．でも今度は，幅持たせました．いいかな．この前提のことを皆さん一応覚えておいてください，仮定と言います．いい？問題，現実場面の問題を解いてます，今．仮に定めたものですね．この仮定をおくということは，この問題解決で一応やってきてましたね．その仮定についてどう扱っているか．見てみたいと思います．(1)で Y が見えなくなりました．ここにあったのが，移動すると，Y は見えなくなりました．じゃあその理由は何だったか？ミラーをこっちではミラーをなんて見てたんだっけ？
S22：点．
T30：そう，点で見てたんだよね？ミラーを点で見ていた．これを仮定について見直してるんですね．いいですか？では，次，どうしたい？見えるようにしたい．と言いましたね．じゃあどうするか．ミラーを幅を持たせると言いました．ここでやってるのが，仮定についてね，おき直してるんです．なのでみなさん，(1)から(2)に来るとき，仮定についておき直し，仮定について見直し，おき直したりしてるということで，現実場面の問題解決で，非常に大事なことをしているんです．いい？大事なことやったから，最初直線だったよね．見える範囲がなかった．けどもやったら，次やったら幅を持って，広い範囲見えるようになりました．いいよね．ここまで OK？なので，今時間なくなっちゃったから，あれなんだけど，えーと，仮定について，見ていくことは非常に大事なんだってことを，えーと，覚えておいてください．で，ちょっと時間が無くなったので，えーと解決までさせてあげられないのですが，ここで見えない，Y がさらに移動したら見えなくなったんだよね，また．ここまで見えてた．でもこの辺だと見えなくなっちゃったんだよね．じゃまたおんなじようにしてみましょう．はい，少しずらしたら見えなくなった．んですが，ここでミラーは幅をもったものだったけど，もうひとつミラーを見せたいと思います．何かわかりますか？
S23：まるっぽい．
S24：前に出てる．
S25：膨らんでる．
T31：前に出てる，膨らんでる．そうそう，こうね．
S26：凸レンズ．
T32：凸レンズ．いい言葉出るね．こうね．ふっくらしてるんだよね．ということはさっきはまっすぐだったんだよね．平面だったんだよね．そこからぼっこりしてる．ということなので，こうなったんだよね．大げさに描くと．じゃあこれを延長してみます．どうなると思う．どうなると思いますか？
S27：球．

T33 : ん？球面？一応これ上から見た状態．とすると，これは？何これ？

S28 : 円．

T34 : 円だよね．これ．そうそう，これは，円の中で，ここがミラーってことは，ミラーは円の？

S29 : 一部．

T35 : 一部って考えられるかもしれない．いい？えーと，ミラーは曲がってる．そうすると，どうしようか，今ミラーを円の一部っていったけど，そういう風にまた仮定をおき直してみようか？ミラーを円の一部としてみることにしたいと思います．いい？もう一回見てみると，はい，Y が見えない．そしたらミラーがまがってるな．ここで何した？みんな．仮定を？

S30 : 見直す．

T36 : そうそう，仮定を見直したんだよ．だって，ミラー平面だと思ってたのが曲がってるっていったんだよね，仮定を見直してるんです．ミラーを円の一部としてみよう．この時仮定を？どうしてる？

S31 : おき直してる．

T37 : そうそう，さっきは点だった，幅を持った状態．あっじゃ今度は円の一部としてみよう．ということで，仮定をおき直してるんですね．実際どうですか？この平面と曲面だと．見え方どうですか？わかる？どっちの方が広く見える？こっちだと思う人？こっちだと思う人？そうなんだよ．こっちの方が広く見える．なので，ミラーは実は円の一部かもしれない．という仮定が置けるのですね．ちょっと時間がないので，えーと曲面でも入射と反射が起こってるんですね．というのを一瞬実験で見せたいと思います．ちょっと電気を消してもらって．ちょっとごめんね，時間がないので，ちょっとだけなんですが，これ，曲面ですね．これにレーザーを入射させてみます．いい？これレーザーね．これを入射させてみます．そうすると，例えば緑これね．この点に入射させてみます．いきますよ，見える？こんな感じで，曲面でも反射してます．ちょっと，反射の線見るために，今線上に 1 点取ってみたいと思います．で青いほう，少し左にずれたやつにもやってみるよ．こういくと，こんな感じで，反射します．見える？ごめん見づらいね，こういって，こんな感じで反射します．こっちも点取っておきます．こうすると，曲面でも入射と反射がされてるということが分かりました．いいですか？ほんとはこれも作図させて，作図してみてみたかったんですけど，ちょっと時間もないので，パソコンで見て見たいと思います．GeoGebra ってソフトなんだけど，青い線が，さっきの平面幅を持たせた状態の鏡，さっきのこれ平面鏡って言います．これを曲面鏡と言います．赤い方，映ってない，青いほうが平面鏡，赤いほうが曲面鏡の反射になります．いい？平面鏡と曲面鏡比べてみると，見える範囲は？

S32 : 広い．

S33 : 違う．

T38 : 違う．どっちが広い？

S34 : 赤．

T39 : そう，赤の方が広いんだよね．だから曲面鏡っていうのは，平面鏡よりもはるかに広い範囲が見えるんですね．いい？で，最後．Y が進みました．で，平面．曲面鏡でもこの辺まで見えるよね．ここまで，赤が．わかる？じゃあ残りのここ？もうちょっと角度変えようか？ここまでは曲面鏡で見える範囲だよね？わかる？じゃあここはどう？

S35 : 自分の目で見える．

T40 : そうそう，自分で見えるよね．X から．実はこの緑の線が X から見える範囲．X がここから角まで

は見えるという線を引いたものです．なので，曲面鏡になると，ここからここまで全部見えるという形になるかと思います．なので，やっぱりミラー，曲面鏡はすごいんだな．ということが分かってもらえたらな．ホントは作図してやってみると，一目瞭然なのでわかるのですが，ちょっと時間がなくて済みませんでした．ということで，ちょっと今日のまとめに入りたいと思います．今日やったことは今まであまりやったことがないことだったと思います．なので，実感あんまり持てなかったかもしれないんですけど，まとめのプロント配ります．まず⑶まで行けなかったので，⑶ないんですけど，⑴ではミラーをどのように見てましたか？（チャイム）ミラーを？点で見てたんですね．⑵では？平面，平面で見ていた．一応書いておこっか？⑶ではこれだよね，円の一部としてみたんだよね．ごめんね，そこまで行けなくて．それを踏まえて，最後のまとめのところ，今日の問題解決で作図と結論，作図の結論と，実際の場面を振り返ってみてどういうことがわかりましたかっていうところを少し書いてみたいと思います．まず出た答えとはい，例えば，平面で見たときは平面鏡見せました．いい？実際のものを見せました．現実場面のものを見ました．比べると，まず何をしましたか皆さん，あっ Y が見えないな，ミラーを平面で見ていたな，これ何をしたんですか？はい，仮定を見直したんですね，で，最後どうしましたか？ミラーに幅を持たせようということで，仮定をおき直したんですね．おきなおした．これによって，問題の解決がどうなったでしょうか？みなさん．

S35：つながった．

T41：つながった．ですね，ちょっと不十分かもしれませんが，なので，仮定について考えることは？どうだったんですか？

S36：大事．

T42：大事なんです．ほんとは．ちょっと今日一日で，伝わらなかったかもしれないんですけど．大事なんです．ということを心にとめて，これからの問題，日常場面での問題を解決する機会があったら数学をちょっと使ってみてほしいなと思います．はいでは，時間になってしまったんですが，感想一言でもいいので，かいてもらえたらありがたいです．一番最後のところ書いてみてください．すみません，時間なんですが．じゃあどうしよっかな．感想ぱぱっと書いちゃった人から前に持ってきてほしいなと思います．作図と一緒に出してもらえたら助かります．じゃあ帰りまでに担任の先生に渡して下さい．作図のプリントと，まとめのプリント一緒でいいので出してください．よろしくお願いします．はいでは，時間もすぎてしまったので終わりたいと思います．日直さんお願いします．

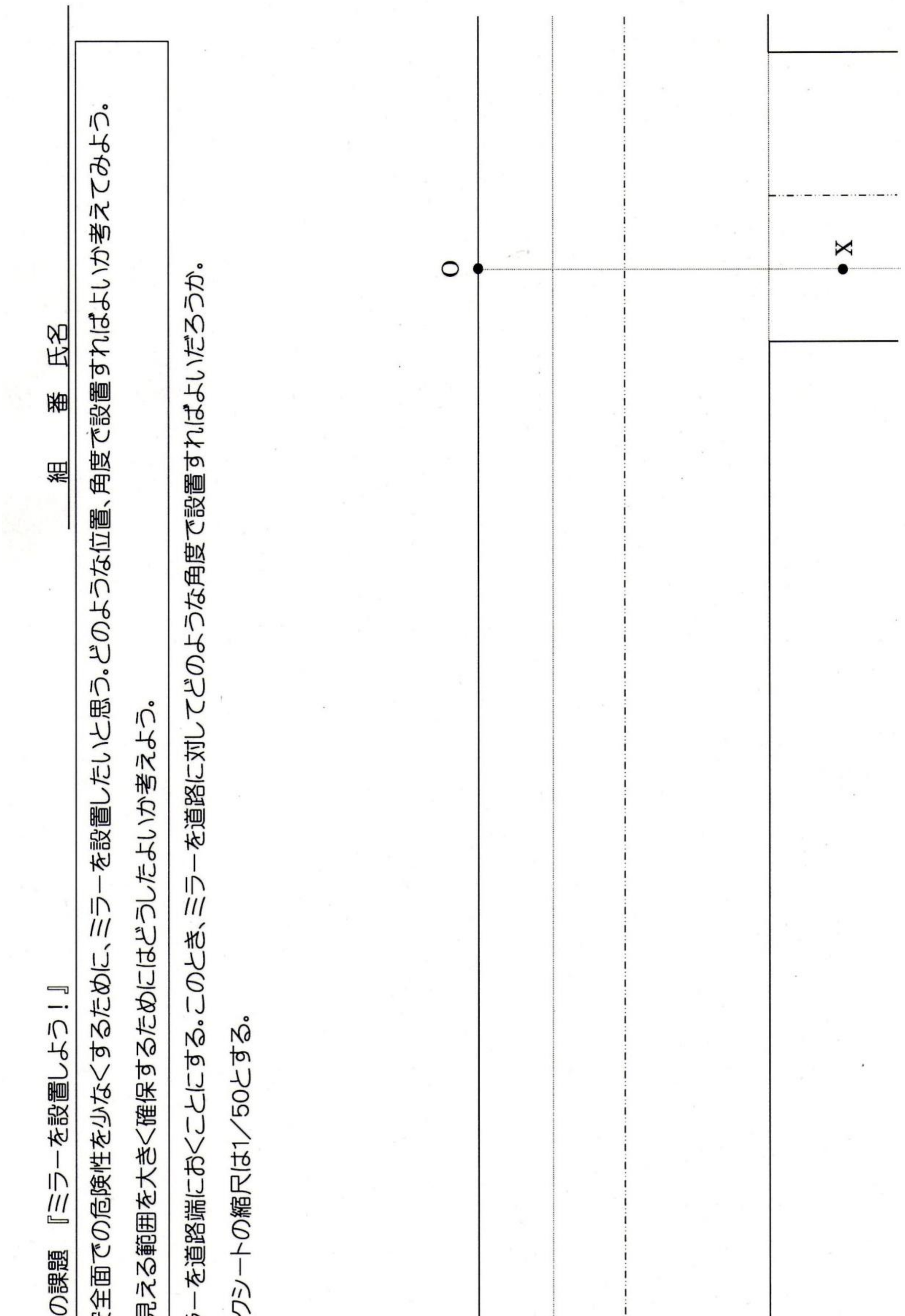
S37：起立．ありがとうございました．

T43：ありがとうございました．

(49：46)

③授業用ワークシート（A3 用紙を A4 用紙に縮小したもの，最終訂正版）

〈1 枚目〉



○今日の課題 『ミラーを設置しよう！』

組　番　氏名

交通安全面での危険性を少なくするために、ミラーを設置したいと思う。どのような位置、角度で設置すればよいか考えてみよう。

また、見える範囲を大きく確保するためにはどうしたらよいか考えよう。

(1)ミラーを道路端におくことにする。このとき、ミラーを道路に対してどのような角度で設置すればよいだろうか。

※ワークシートの縮尺は1/50とする。

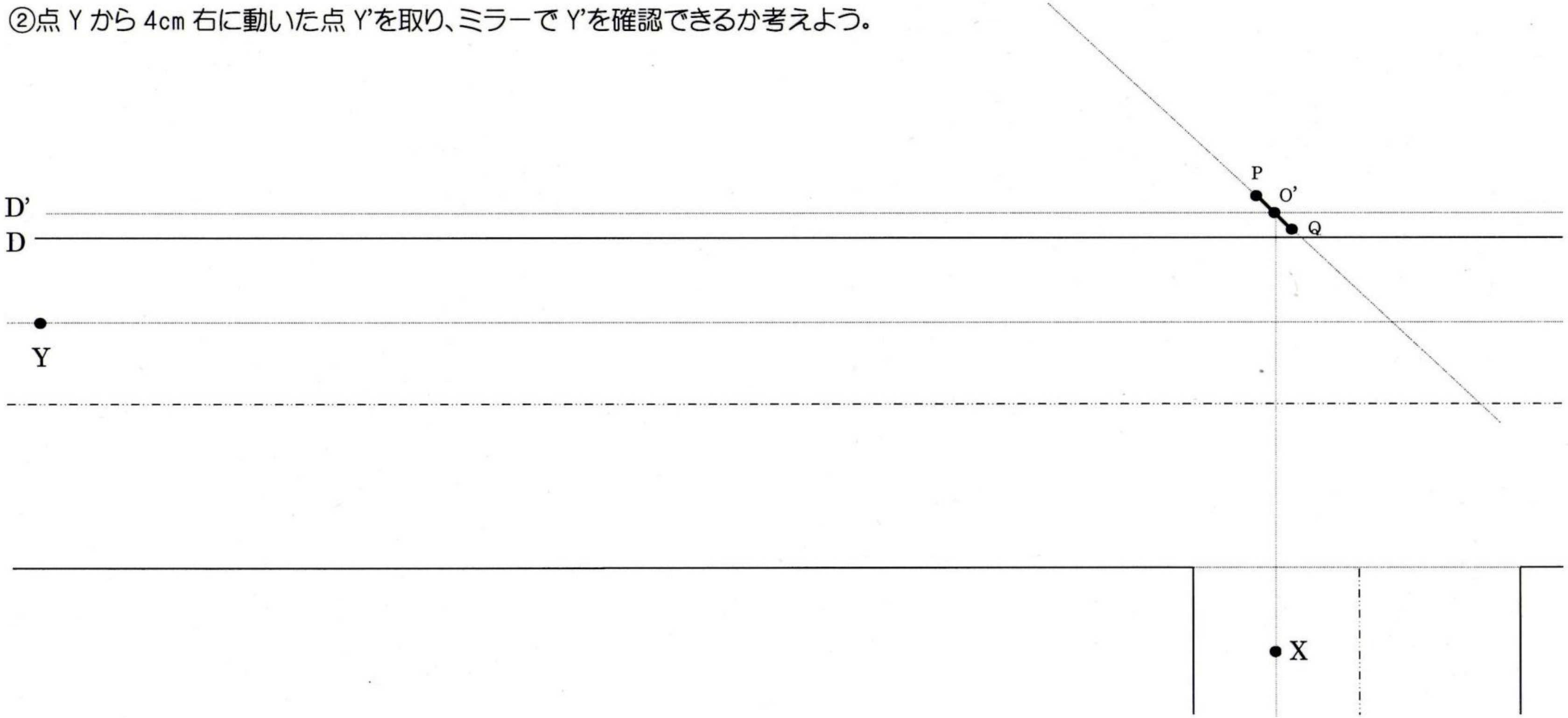
〈2枚目〉

組　　番　氏名

(2)ミラーが幅をもつことにする(※このワークシートではミラーの中心から0.6cm)。車を表す点Yが右に2m(※このワークシートでは4cm)動いたとする。このとき、ミラーでこの車を確認できるかどうか、作図をして調べよう。(D'は道路の端Dより30cm(※このワークシートでは0.6cm)外側の線とする)

①どの点における反射の線を作図したらよいか考えよう。

②点Yから4cm右に動いた点Y'を取り、ミラーでY'を確認できるか考えよう。



〈3枚目〉

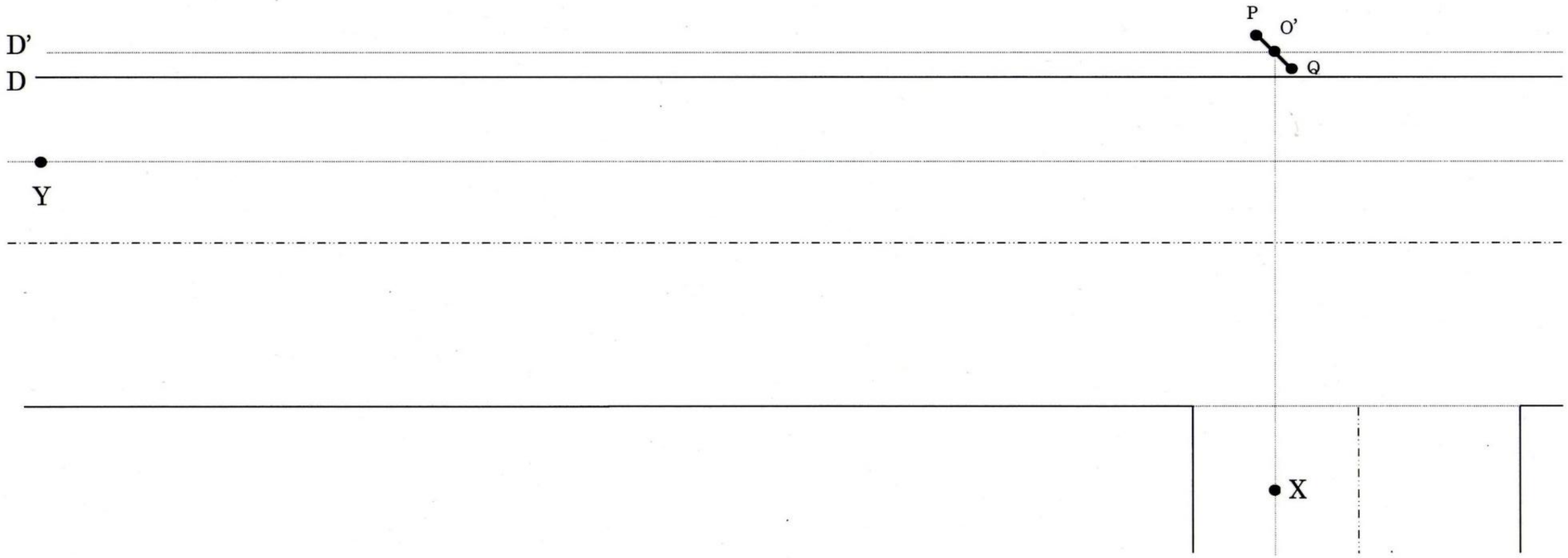
組　　番　氏名

(3)ミラーを円の一部と考え、このミラーを含む円の半径を 220cm(※このワークシートでは4.4cm)とする。車を表す点 Y が右に9m(※このワークシートでは18cm)動いたとする。このとき、ミラーでこの車を確認できるかどうか、作図をして調べよう。

①円の中心を作図して見つけよう。

②ミラーの両端の点における反射の線をかくには、何が必要だったかを考えて作図しよう。

③Y から18cm 右に動いた点 Y”を取り、ミラーで Y”を確認できるか考えよう。



資料

〈まとめプリント〉

組　　番　氏名

○課題の結論

○まとめ

・(1)～(3)でそれぞれミラーについてどのような仮定をおいていたでしょうか。

(1):

(2):

(3):

・今日の問題解決で、作図の結論と実際の場面で振り返ってみて、どういうことがわかったでしょうか？

〈自分のまとめ〉	〈全体のまとめ〉

☆今日の感想を書いてください。

引用・参考文献

・和文一覧

(1) 新井仁(2005).「事象を読み取る力を高める関数領域の指導のあり方に関する研究―グラフを問題解決の道具として―」，日本数学教育学会誌『数学教育』，87(5)，pp.12-19

(2) 新井仁(2006).「スギ花粉飛散量予測を題材とした関数領域の指導について」, 日本数学教育学会誌『数学教育』，88(11)，pp.11-18

(3) 一松信(2010).『みんなと学ぶ小学校算数 6 年下』，平成 22 年文部科学省検定済教科書，小学校算数用．学校図書.

(4) 大澤弘典(1996).「現実場面に基づく問題解決―グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して―」，日本数学教育学会誌『数学教育』，78(9)，pp.16-20

(5) 太田伸也(1997).「生徒に幾何の世界を構成させる図形指導（2）―『写真に写る大きさと距離との関係』を題材に―」，日本数学教育学会誌『数学教育』，79(5)，pp.24-32

(6) 久保良宏他(2001).「数学と社会のつながりに関する中学校・高校の数学科教科書の分析」，日本数学教育学会第 34 回数学教育論文発表会論文集，pp.289-294

(7) 熊谷治久(2004).「確かな定式化を目指した数学的モデル化過程の授業」，日本数学教育学会誌『数学教育』，86(11)，pp.12-19

(8) 国立教育政策所(2013).「生きるための知識と技能 5　OECD 生徒の学習到達度調査(PISA)　2012 年調査国際結果報告書」，赤石書店

(9) 島田茂(1977).『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』，みずうみ書房

(10) 島田茂(1990).『教師のための問題集』．共立出版

(11) 清水静海(2010).『わくわく算数 6 上』，平成 22 年文部科学省検定済教科書．啓林館

(12) 清水宏幸(2003).「比例とみて問題を解くことのよさを感じさせる指導」，日本数学教育学会誌『数学教育』，85(11)，pp.25-30

(13) 清水宏幸(2006).「日常の場面で 1 次関数を活用させる指導―ガス料金について考えさせる指導―」，日本数学教育学会誌『数学教育』，88(7)，pp.2-8

(14) 清水美憲(2012).「評価問題作成における数学的なプロセスへの焦点化―全国学力・学習状況調査(中学校数学)の動向と課題―」，日本数学教育学会誌『数学教育』，94(9)，pp.30-33

(15) 砂場拓也(2003).「事象を数理的に考察する能力の育成に関する研究Ⅲ」，日本数学教育学会第 35 回数学教育論文発表会論文集，pp.97-102

(16) 清野辰彦(2002).『学校数学における数学的モデル化の学習指導に関する研究―教科書の問題の分析と評価を中心に―』，東京学芸大学大学院修士論文(未刊行)

(17) 清野辰彦(2005).「「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導に関する研究―2 乗に比例する関数に焦点をあてて―」，日本科学教育学会年会論文集 29，pp.183-186

(18) 清野辰彦(2006).『学校数学における数学的モデル化の学習指導に関する研究―『仮定の意識化』に焦点をあてて―』，東京学芸大学連合大学院博士論文(未刊行)

(19) 清野辰彦(2011).「学校数学における経験的モデル化と理論的モデル化―双方の活動を経験できる教材とその教育的価値―」，日本数学教育学会誌『数学教育』，93(11)，pp.2-12

(20) 高橋広明(2010).「中学校新数学科　活用型学習の実践事例集」，西村圭一編著，明治図書
(21) 長崎栄三(2001).『算数・数学と社会・文化のつながり―小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指して―』，明治図書
(22) 長崎栄三他(2004).「算数と社会をつなげる力に関する研究」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 86(8), pp.3-13
(23) 長崎栄三他(2008).「算数・数学教育の目標としての「算数・数学の力」の構造化に関する研究」，日本数学教育学会誌『数学教育』，90(4)，pp.11-21
(24) 日本道路協会(1984).『道路反射鏡設置指針』，日本道路協会編．丸善.
(25) 永田潤一郎(2004).「「比例とみなす」ことのよさについての考察」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 86(3)，pp.13-20
(26) 西村圭一(2001).「数学的モデル化の授業の枠組みに関する研究」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 83(11)，pp.2-12
(27) 西村圭一(2003).「数学的モデル化を取り入れた発展的な学習の授業実践―紙パックジュースを題材に―」，日本数学教育学会誌『数学教育』，85(11)，pp.31-39
(28) 西村圭一(2012).『数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究』, 東洋館出版社
(29) 西村圭一，長崎栄三(2008).「数学教育における算数・数学と社会をつなげる力の意義と学習指導に関する研究」，日本数学教育学会誌『数学教育』，90(9)，pp.2-12
(30) 西村圭一, 島田功, 長崎栄三(2008).「算数･数学と社会をつなげる力の構造の精緻化に関する研究」, 日本数学教育学会第 41 回数学教育論文発表会論文集，pp.231-236
(31) 藤井斉亮他(2010).『新しい算数 6 下』．小学校算数科用　平成 22 年文部科学省検定済教科書．東京書籍.
(32) 藤井斉亮他(2011).『新しい数学 1』．中学校数学科用　平成 23 年文部科学省検定済教科書．東京書籍.
(33) 藤井斉亮他(2011).『新しい数学 2』．中学校数学科用　平成 23 年文部科学省検定済教科書．東京書籍.
(34) 藤井斉亮他(2011).『新しい数学 3』．中学校数学科用　平成 23 年文部科学省検定済教科書．東京書籍.
(35) 松原元一(1990).「数学的見方考え方」，国土社
(36) 三輪辰郎(1982).「モデル化」,『現代教育学の基礎』，筑波大学教育学研究会編，pp.286-289
(37) 三輪辰郎(1983).「数学教育におけるモデル化についての一考察」,『筑波数学教育研究』，第 2 号，筑波大学数学教育研究室，pp.117-125
(38) 三輪辰郎(1986).「数学的モデル化と教材開発」,『学校数学における数学的モデル化の教材開発（三輪辰郎（研究代表））科学研究補助金研究成果報告書　課題番号 59580177』
(39) 文部科学省(2008).『中学校学習指導要領解説　数学編』

・英文一覧

(1) Blum,W. , Niss,M.(1989). Mathematical Problem Solving,Modelling,Applications,and Links to Other Subject-State,Trends and Issues in Mathematics Instruction. Blum,W. , Niss,M. ,Huntley, I.(ed.), *Modelling Applications and Applied Problem Solving teaching mathematics in a real context.* Ellis Horwood Limited , pp.1-21

(2) Kantowski,Mary Grace(1986). Mathematical Model Making in Problem Solving. *Proceedings of the U.S-Japan Seminar on Mathematical Problem Solving.* Jerry P. Becker and M. Tasuro(ed.), pp.427-439

(3) Murthy, D. N. P(1979). A note of mathematical models. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology. Vol.12*. pp.97-100

(4) Nelson,R.D(1977). Mathematical modelling in the classroom. *The Mathematical Gazette.Vol61*.pp.82-91

(5) Niss,M (1989). Aim and scope of applications and modelling in mathematics curricula. Blum,W. ,Biehier,R. , Huntley,I.D., Kaiser-Messmer,G.Profke,L.(ed.).*Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics.* Ellis Horwood Limited , pp.22-31

(6) Oke,K.H.Bajpai,A.C.(1986). Formulation –Solution Processes in Mathematical Modelling. Berry,J.S., Bueghes,D.N., James,D.J.G., Moscardini,A.O.(ed.). *Mathematical Modelling Methodology, Modelos and Micros.* Ellis Horwood Limited ,pp.61-79

(7) Pinker,Aron(1981). The concept ‘model’ and its potential role in mathematics education. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology. Vol.12.No.6*. pp.693-707

(8) Pollak,H.O.(1970). Application of Mathematics. *Mathematics Education 69th Yearbook of the National Society for the Study of Education.* University of Chicago Press. Pp.311-334

(9) Pollak,H.O.(2003). A History of the Teaching of Modeling . *A History of School Mathematics Volumel, NCTM*, pp.647-671

(10) Sevais,W. and Varga,T.(1971). Teaching School Mathematics. *A UNESCO Source Book.*

(11) Treilibs,Ver,Hugh Burkhardt, and Brian Low.(1980). Formulation processes in mathematical modeling. Shell Centre for Mathematical Education.

・インターネットサイト

(1) 道路反射鏡設置基準：
http://www1.g-reiki.net/shiki/reiki_honbun/e329RG00000553.html#e000000008

(2) 道路反射鏡協会：
http://www.dhk.gr.jp/about_mirror/mirror-characteristic.html

(3) JAF：
http://www.jaf.or.jp/qa/ecosafety/careful/09.htm)