

宇宙線伝播による銀河磁場の平均構造の研究

課題番号 10640242

平成10年度～平成11年度 科学研究費補助金(基盤研究(C)(2))

研究成果報告書

平成12年2月

研究代表者 倉又 秀一

弘前大学 理工学部 教授

弘前大学附属図書館 本



06897303

77 7
72k
99/K

宇宙線伝播による銀河磁場の平均構造の研究

課題番号 10640242

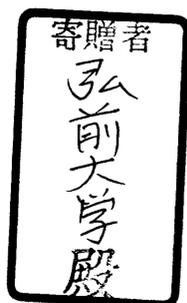
平成10年度～平成11年度 科学研究費補助金 (基盤研究 (C)(2))

研究成果報告書

平成12年2月

研究代表者 倉又 秀一

弘前大学 理工学部 教授



A377,7
H72K
98-99/K

はしがき

宇宙線発見以来の問題、起源、加速、伝播の三つの問題のうち、前の二つの理解は最近大きく進歩した。それにたいし、伝播の問題は現象論的なモデルの利用に留まっている。

この状況を打破して、宇宙線のデータから具体的な銀河に関わる量を引き出すためにいくつかのモデルの構築を試みた。

この試みの方向で、銀河に関する量が引き出せることは示されたが、モデルの不定性や、宇宙線観測のデータが不十分であることから、一意的な決定にまでは至っていない。

モデルの精密化と観測の進展とあいまって、銀河についての量をさらに引き出して行きたい。

研究組織

研究代表者	倉又 秀一	弘前大学 理工学部 教授
研究協力者	蜂須賀 一也	弘前大学 理学専攻科 修士課程 平成10年3月 修了
	荒木田 英禎	弘前大学 理学専攻科 修士課程 平成11年3月 修了
	三浦 芳春	弘前大学 理学専攻科 修士課程 平成11年3月 修了
	高橋 郁真	弘前大学 理学専攻科 修士課程 平成12年3月 修了

研究経費

平成10年度 900千円

平成11年度 600千円

計 1,500千円

研究発表

研究協力者の修士論文の形のみである。

そこで、ここに少し詳しく報告をする。

目次

1 序	5
2 Leaky Box Model	6
3 ブラウン運動モデル	9
3.1 2次元の場合	9
3.2 3次元の場合	13
3.3 散乱について	17
4 拡散方程式モデル	19
4.1 拡散方程式と境界条件としての銀河の構造	19
4.2 銀河磁場	21
4.3 解と観測との比較	22
5 結論	23
6 今後の課題と方向	24
A 母関数を用いたブラウン運動の解析	25
A.1 等方散乱での宇宙線伝播	25
A.2 宇宙線が洩れ出るまでの平均散乱回数 $\langle N \rangle$	26
B 銀河ハローを持つ境界条件のもとで磁場の不均一性を持つ場合の拡散方程式の解の導出	34

1 序

宇宙線は、恒星の進化の段階で重元素が合成され、その進化の最終段階の超新星爆発で生まれ、銀河磁場の中を伝播して地球に達すると考えられている。

恒星の進化は、宇宙物理学の中で最も確立された分野で、宇宙の中で起きる物理現象の解明の拠り所となっている。また超新星爆発により、合成された元素が放出され、爆発の衝撃波が宇宙線の加速を行っている。このことは太陽風のポウショックでの直接観測や、電子のシンクロトロン輻射の観測から、このメカニズムによる加速があることは確実な事と考えられている。

しかし、伝播に関しては現象論的な Leaky Box Model が多く用いられており、具体的な伝播のメカニズムを含むモデルは確立されていない。この「伝播」の理解の状況は、宇宙線の「起源」、「加速」の問題が、一定の理解に達していることから見ると、甚だ不十分である。

そこでこの「伝播」の現象論を一步脱した、銀河磁場やそこでの散乱を具体的に採り入れたモデルの構築を試みた。このモデルの構築が、科研費の申請の目的である。

モデルの構築は、次の二つのアプローチで行った。一つは散乱を素過程を仮定し、それにより宇宙線が拡散されて行く様子を調べ、散乱の素過程の当否や、散乱点の分布を決めて行くもの。これはその手法から、「ブラウン運動モデル」と呼ぶ。他の一つは、拡散方程式の散乱に銀河磁場の空間的不均一性を導入していくもので、「拡散方程式モデル」と呼ぼう。

これらのモデルを構築することで、銀河磁場の平均的な性質を導き出すことが出来ることが示された。

この研究では、報告者が指導した修士課程の4人の学生、蜂須賀一也(平成10年卒業、総合研究大学院大学 国立天文台 進学)、荒木田英禎(平成11年卒業、総合研究大学院大学 国立天文台 進学)、三浦芳春(平成11年卒業、高校教師就任)、高橋郁真(平成12年卒業、ソフト会社就職)との共同研究が中心となっている。

以下、Leaky Box Model を批判的に再検討し、「ブラウン運動モデル」、「拡散方程式モデル」について述べ、成果を示した後、今後の課題と方向について議論する。

2 Leaky Box Model

宇宙線伝播のモデルは、宇宙線の元素組成やエネルギースペクトルの観測が進み、高エネルギーの宇宙線の多くが太陽起源でなく銀河起源である事が明らかになって来た段階で必要になって来た。[5]、[6]

伝播モデルの構築で重要な観測事実は、

- 宇宙線角分布の等方性
- 宇宙線 一次二次粒子の比が小さい事 — 宇宙線の銀河からの洩れだし
- 一次二次粒子の比のエネルギー依存性

等がある。[7]

これを説明するもっとも簡単な現象論的なモデルに Leaky Box Model がある。これは銀河を大きな箱と考え、宇宙線は銀河内で一様に生まれて、その中を自由に飛び回り、の壁にぶつかった時は、適当な確率で跳ね返って銀河の中に留まったり、壁をすり抜けたりするものである。宇宙線が完全に銀河の中に閉じ込められるのではなく、壁に衝突した時適当な確率で外へ洩れ出すモデルである。

これを一次元で考えてみよう。宇宙線は、長さ L の線分の中に閉じ込められていて、端で跳ね返されたり、外へ洩れ出すものとする。平均 λ の距離を走って外へ洩れ出すとすれば、長さ dx での宇宙線の個数の変化は

$$dN = -N \frac{dx}{\lambda} \quad (2.1)$$

で示される。これを解けば、

$$N = N_0 e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (2.2)$$

となり、宇宙線の銀河から洩れ出すまでに走る距離は指数関数的に減少することを示す。銀河内での宇宙線の速度 v が一定ならば、 $x = vt$ であるから、宇宙線の銀河内での滞在時間 t も同じように、指数関数的に減少することになる。

このモデルから

- $\frac{\lambda}{L}$ 銀河の壁との衝突回数
- $\frac{L}{\lambda}$ 銀河の壁と衝突した時の洩れ出す確率

ということが出来る。しかし、具体的にこれらの量を銀河モデルから構築することは出来ないが、 λ というパラメータにエネルギー依存性を持たすことにより観測を再現することが可能である。

この時、宇宙線の運動量を p 、電荷 (原子番号) を Z 、光速、電子の電荷の絶対値をそれぞれ、 c 、 e として

$$R = \frac{pc}{Ze} [V] \quad (2.3)$$

で定義される、リジディティ (rigidity 硬さ) を用いると、原子番号の如何に関わらず同じ λ を用いることが出来る。このことは、宇宙線の運動を支配する現象が電磁的なものであることを示している。

さらに、銀河空間中を伝播している最中の星間物質との衝突による核破碎を考慮に入れば、 i 種の原子核の個数変化は

$$\frac{dN_i}{dx} = - \left(\frac{1}{\lambda_{int}^{(i)}} + \frac{1}{\lambda_{esc}^{(i)}} \right) N_i + \sum_{j>i} \frac{P_{j \rightarrow i}}{\lambda_{int}^{(j)}} N_j + Q_i \quad (2.4)$$

で表せられる。ここで $\lambda_{int}^{(i)}$ は、核種 i の衝突の平均自由行程、 $\lambda_{esc}^{(i)}$ は、洩れ出しの平均自由行程、 $P_{j \rightarrow i}$ は、核種 j ($j > i$) が衝突の破碎で核種 i を生み出す確率 — fragmentation probability、 Q_i は核種 i の発生を表す項である。

衝突の平均自由行程は、核種により大きく異なるが、数 GeV/nucleon を越えた領域でのエネルギー依存性は小さい。洩れ出しのほうはエネルギー依存性があり、これを Rigidity を用いて表せば、

$$\lambda_{esc}^i \propto R^{-\delta} \quad (2.5)$$

となり、核種によらず一つの式で表せられる。

つぎに、定常状態を考えて

$$\frac{dN_i}{dx} = 0 \quad (2.6)$$

だから、式 (2.4) は、

$$- \left(\frac{1}{\lambda_{int}^{(i)}} + \frac{1}{\lambda_{esc}} \right) N_i + \sum_{j>i} \frac{P_{j \rightarrow i}}{\lambda_{int}^{(j)}} N_j + Q_i = 0 \quad (2.7)$$

となる。この式 (2.7) を解析してみる。

核破碎による核子の生成より発生源からの生成が圧倒的に多い場合 (例えば鉄原子核など) を仮定すると、

$$- \left(\frac{1}{\lambda_{int}^{(i)}} + \frac{1}{\lambda_{esc}} \right) N_i + Q_i = 0 \quad (2.8)$$

となる。

ここで $\lambda_{esc} \gg \lambda_{int}^{(i)}$ となる領域を考える。その時の Leaky Box Model の方程式は、

$$- \frac{1}{\lambda_{esc}} N_i + Q_i \approx 0 \quad (2.9)$$

$$N_i \approx \lambda_{esc} Q_i \quad (2.10)$$

となる。ここで発生源でのエネルギースペクトルを $R^{-\beta}$ とすると、

$$N_i \propto R^{-\delta-\beta} \quad (2.11)$$

となり、宇宙線強度に伝播による変化が起きる。

今とは逆に、核種が発生源では生成されず、伝播中の核破碎により生じる核種の場合 (例えば sub 鉄 — 二次核種)

$$-\left(\frac{1}{\lambda_{int}^{(i)}} + \frac{1}{\lambda_{esc}}\right) N_i + \frac{P_{j \rightarrow i}}{\lambda_{int}^{(i)}} N_j = 0 \quad (2.12)$$

という Leaky Box Model の方程式になる。ここで核破碎の種類は 1 種類だけを考えることにする。

ここで $\lambda_{int}^{(i)} \gg \lambda_{esc}$ となる領域を考えると、

$$N_i = \lambda_{esc} \frac{P_{j \rightarrow i}}{\lambda_{int}^{(i)}} N_j \quad (2.13)$$

$$\propto R^{-\delta} R^{-\delta-\beta}$$

$$\propto R^{-2\delta-\beta} \quad (2.14)$$

となる。

よってこの二つの場合 (例えば sub 鉄と鉄) の宇宙線流束の比をとると、

$$\frac{\text{subFe}}{\text{Fe}} = R^{-\delta} \quad (2.15)$$

となり、宇宙線の洩れ出しの Rigidity 依存性の程度を表す δ が得られる。

このように Leaky Box Model は少ないパラメータで、観測データを整理することが出来るので、一般的によく用いられてきたが、伝播の全てを洩れ出しのパラメータに押し込めてあり、これを現実的な銀河と結びつけられない現象論的なモデルである。

そこで、伝播をより現実的に扱うために、以下のブラウン運動モデルと拡散方程式モデルを發展させる。

3 ブラウン運動モデル

宇宙線の銀河伝播をブラウン運動として解析した例は、例えば早川先生の教科書にあるが、これは完全に等方的な散乱を扱っていて、拡散モデルとの関係なども議論されている。そして等方的な散乱を考える時、Brown 運動と Fokker-Planck 方程式との関係等も議論されている。

ここでは、宇宙線伝播の現実的なモデルを構築するために、銀河内伝播を以下のように考え、ブラウン運動的に宇宙線の伝播を扱ってみる。

- 銀河のディスクに散乱点が一様に分布している。
- 散乱はそれぞれの散乱点では等方的ではなく、エネルギーが高くなるほど進行方向からのずれが小さくなる。

第二の点が我々の新しい試みで、最初の段階ではこの散乱を現象論的に扱い、次に 3.3 節で、その散乱を磁場の構造から導く試みについて述べる。

3.1 2次元の場合

以上のような動機を持って伝播過程に散乱を持ち込む事を試みた。まず 2次元格子で考える。この時散乱は四方向のみであるが、進行方向の散乱が他の三方向に比べてどれくらいの割合かを示す q というパラメータを導入する。式で表せば、 p を進行方向に進む確率、他の三方向に等確率で散乱されるとすれば、散乱の様子は次の図 3.1 で示される。そして、前方へ散乱される確率 p は、パラメータ q を用いて

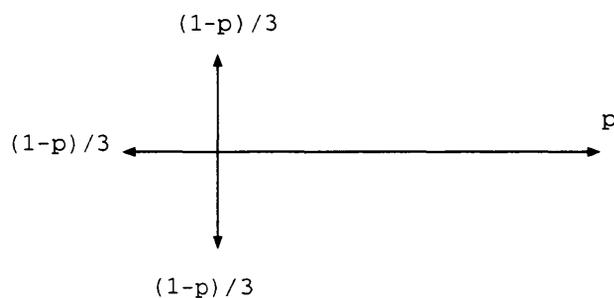


図 3.1: 散乱

$$p = \frac{1}{1 + \frac{3}{q}} \quad (3.1)$$

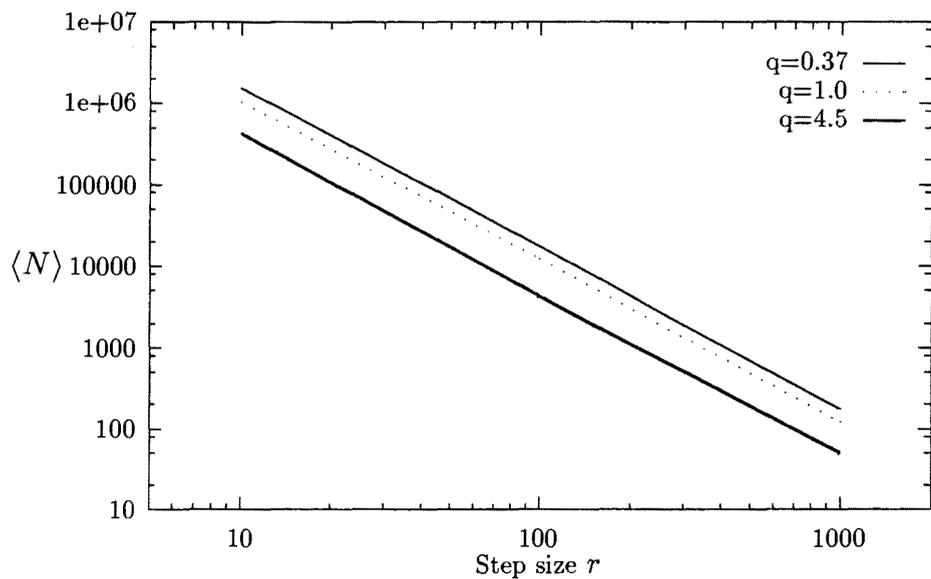


図 3.3: 格子間隔と壁へたどり着くまでの平均ステップ数

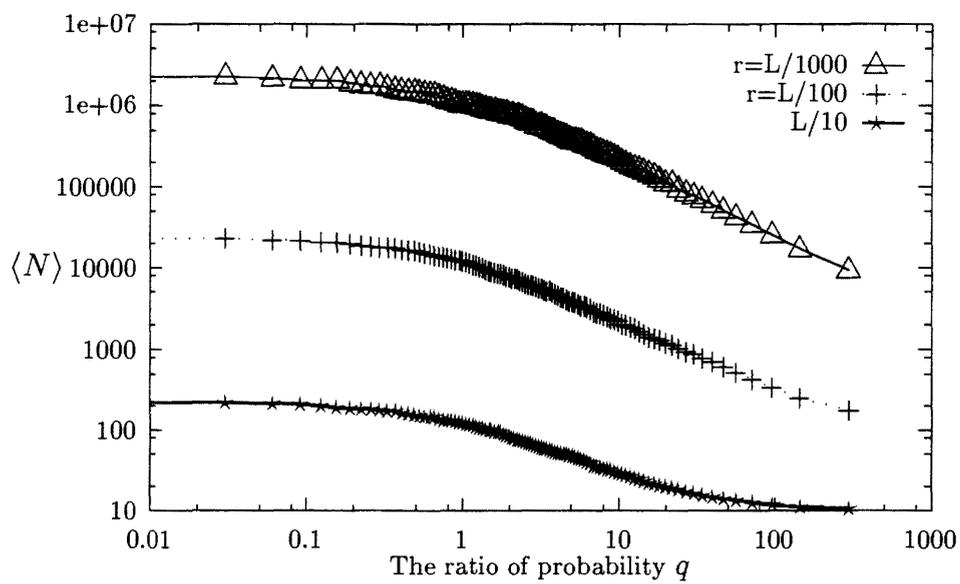


図 3.4: q と平均ステップ数

- あるエネルギーまでは escape length はほぼ一定。
- そのエネルギーを越えると、escape length は減少する。

Leaky Box Model 出は、この傾向をパラメータを用いて表しているが、ここでは散乱のエネルギー依存性のモデルを導入する事でこの傾向の再現が可能となっている。例えば、HEAO-C3 のグループは観測データから [9]

$$\lambda_{\text{esc}} = \begin{cases} 34.1\beta R^{-0.6} \text{ g/cm}^2 & (R > 4.4\text{GV}) \\ 14.0\beta \text{ g/cm}^2 & (R < 4.4\text{GV}) \end{cases} \quad (3.3)$$

という実験式を得ている。ここで R は、rigidity、 β は宇宙線の速度と光速との比である。この式を図示すれば次の図 3.5 となる。

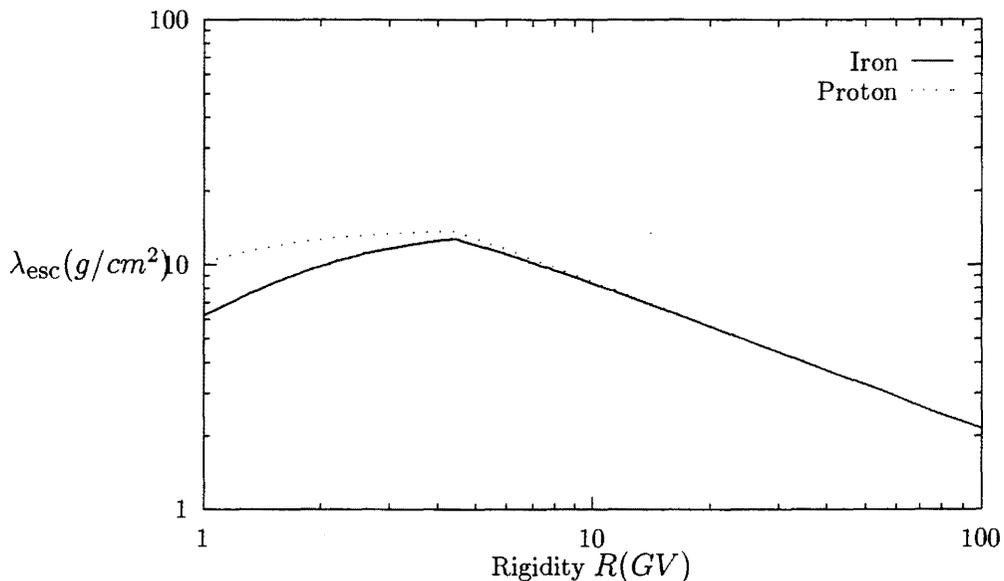


図 3.5: HEAO-C3 の観測による rigidity と escape length

洩れだしまでの平均散乱回数が減少を始めるのは、四方への散乱の確率が等しい $q = 1$ のところで、これ以下では三方向の散乱確率が等しくおおよそ等方散乱とみなせるので平均散乱回数が $q = 1$ によらなくなる。 $q > 1$ では、前方散乱の影響が強くなり q の増加とともに洩れだしやすくなるので、平均散乱回数は減少する。

図には明確示していないが、 q が大きくなるにつれて平均散乱回数は一定値に近付く事は、シミュレーションでも確認してあるし、定性的にも理解できる事である。Leaky Box Model では、escape length が減少するようにパラメータを決めると高エ

エネルギーにおいて escape length が短くなり非当方性が出てしまうので、あるエネルギーから上では escape length を一定にするように、手でパラメータをいれている。しかし、このモデルでは自然に一定値に近づくようになっている。これは、このモデルの特徴の一つである。

これまでの議論は定性的な比較である。これを越えた議論には我々の用いた q とエネルギーの対応を明らかにする必要があるが、その前に escape length が一定の領域 (すなわち q によらない領域) での平均散乱回数を用いて定量的な議論を行ってみる。

格子全体の大きさを一辺 20 kpc とおく。これは一応銀河直径を考えた数値であるが、特にこの値に拘るものではない。さらに考えている空間の物質密度 ρ を 1cm^3 あたり陽子一個とすれば、平均散乱回数を escape length に焼き直す事ができる。すなわち

$$\lambda_{esc} = \langle N \rangle r \rho \quad [\text{g}/\text{cm}^2] \quad (3.4)$$

となる。ここで r は、格子間隔で、観測された escape length との比較により決めようとするパラメータで、散乱の平均自由行程にあたる量である。

前述のように格子全体の大きさと物質密度を固定して、平均散乱回数を escape length に焼き直して、グラフにすると平坦な部分で実験との一致が良いものは $r = 100\text{pc}$ とした次のものである。水平の実線が、洩れ出しの平均自由行程が低いエネルギーで一定となっている値を表している。

このことから、上に述べた条件のもとで散乱の平均自由行程は 100 pc という事ができる。

これまでは、粒子の発生点を中心として来たが、源をずらした時でも下図のように escape length にはほとんど変化がない。したがって、源がある領域に一様に分布していてもこの結論に変わりはない。

以上のように、散乱のモデルを作る事により Leaky Box Model による escape length の振舞が得られた。

3.2 3次元の場合

同様のことを3次元で試みた。

3次元の場合、散乱を以下のように拡張する。

$$p = \frac{1}{1 + \frac{q}{7}} \quad (3.5)$$

この非等方的な散乱による Random Walk Model から

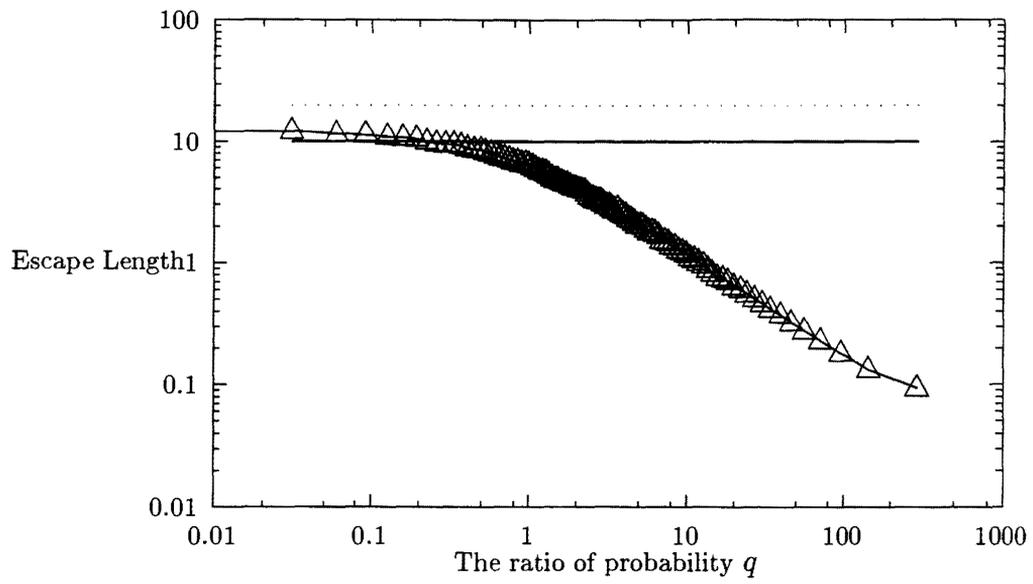


図 3.6: 我々のモデルより q と escape length

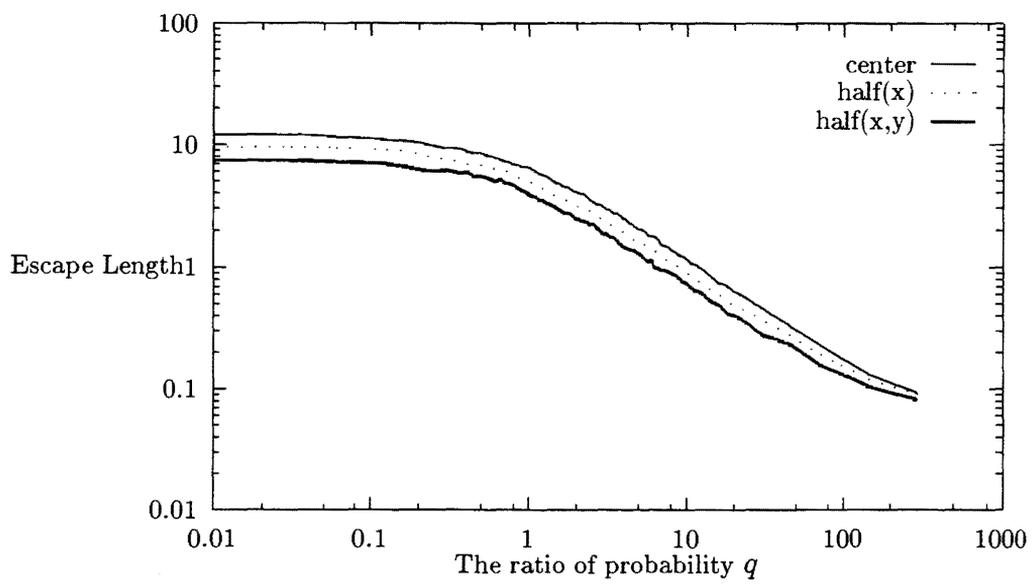


図 3.7: 源の位置の依存性

1. 散乱条件に対する平均散乱回数を求める。
2. 平均散乱回数と escape length は結び付いているから、escape length のエネルギー依存性の実験結果との比較を行う。
3. この比較から、観測結果を満たすような銀河の構造を求める。

銀河ハローを含めた宇宙線の伝播では銀河ハローの構成要素がまだよく分かっていないため、円盤部分とハロー部分とを区別することなく物質は宇宙線が伝播する際に横切ってきたと予想される平均通過質量密度で一様に分布しているとして伝播範囲内での“平均的”な量について考えることにする。よって最終的に求めようとする磁場の乱れのスケールは銀河円盤と銀河ハローを含めた全伝播範囲での平均の乱れのスケールである。

また、銀河ハローの広がりについてもまだよく分かっていない。よって銀河ハローの大きさによって観測結果を満たすような伝播条件はどのように違ってくるのか、銀河ハローの大きさと step size の関係についても調べてみる。

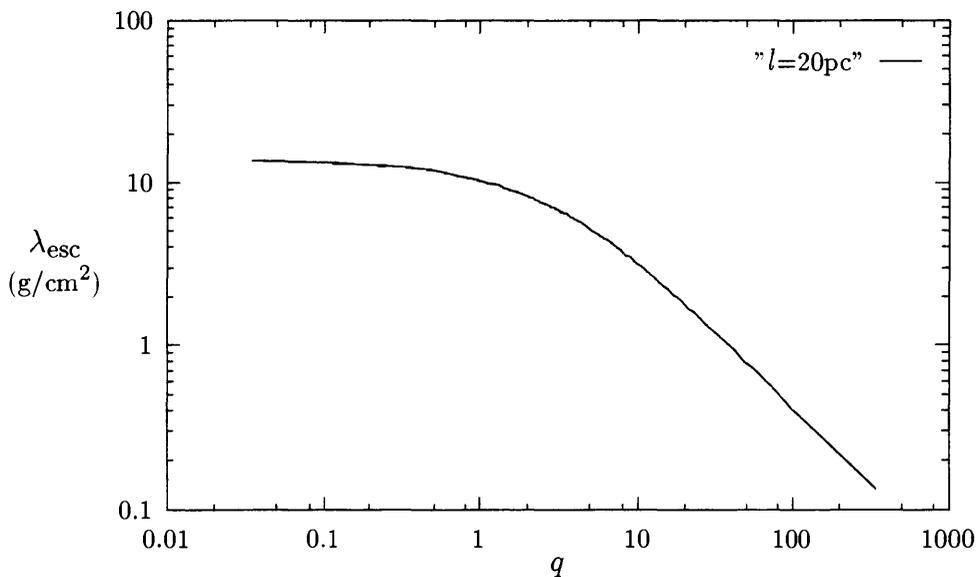


図 3.8: Escape Length と散乱確率の比 q との関係 ($H = 10 \text{ kpc}$, $l = 20 \text{ pc}$)

以上から、観測との比較で一意的ではないが銀河ハローと散乱点の間隔の組を得ることが出来る。これらの組合せの時観測との一致を見るが、その一つの場合についての q と escape length との関係を次に示す。

このように、3次元の場合でも2次元の場合と同様に観測結果を導くことが出来た。しかも3次元への拡張により、銀河の構造を具体的に議論できることが示された。

銀河ハロー	step size : l
3 kpc	3.9 pc
5 kpc	9.6 pc
10 kpc	20 pc

表 3.1: 観測結果を満たす伝播条件

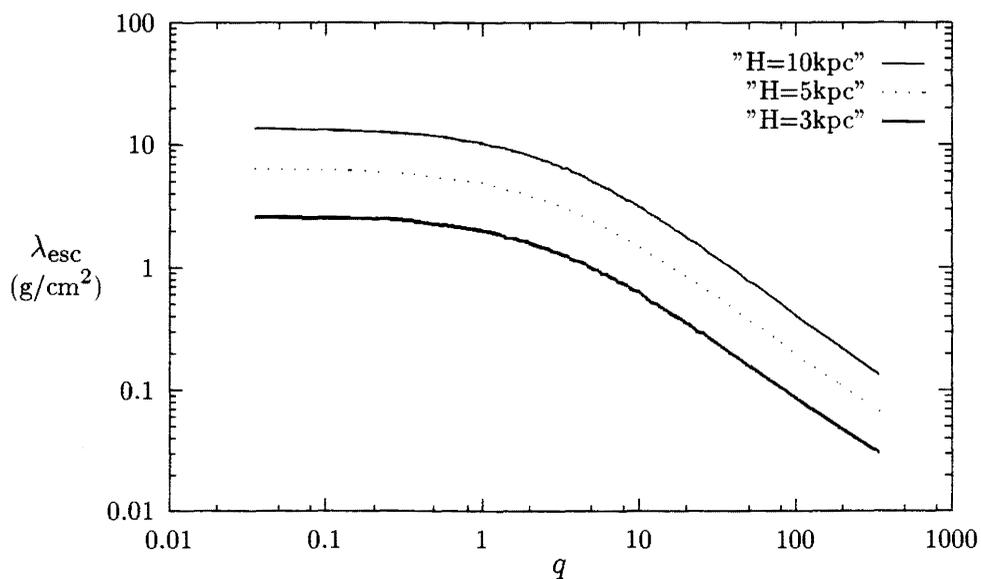


図 3.9: 銀河ハローの大きさに対する Escape Length と散乱確率の比 q との関係 ($l = 20$ pc)

3.3 散乱について

以上の議論では散乱は、パラメータ q を用いて議論したが、このような性質を持つ散乱を、具体的な磁場構造から導くことが、銀河の磁場構造をより現実的に議論するために必要である。すなわち、ある領域を考え、そこに磁場を配して散乱領域として、格子点に置く。しかし、その領域での銀河磁場を決めるパラメータの数を少なくするために、磁場を乱流として扱う。こうすれば、磁場の平均値を与えることで、その領域での磁場は決定できる。すなわち

- 前述のモデルの格子点に広がりを持たせ、この領域で散乱を起こさせ、この広がりには等間隔で銀河に存在すると仮定する。
- 上に述べた領域の内部に磁場の乱れが存在し、それにより宇宙線が散乱される。

以下、完成はしていないがその試みのうちの二つを述べる。議論の出発点としての仮定は、以下のとおりである。

ひとつは、コルモゴルフのエネルギー・スペクトラムが、 $E(k) \propto k^{-\frac{5}{3}}$ で、エネルギー密度を表すから、これを磁場のエネルギー密度と考え、

$$B(k)^2 \propto k^{-\frac{5}{3}} \quad (3.6)$$

として、これから磁場をつくる方法である。拡散モデルの磁場の不均一さはこのようにしてつくられている。この方法が一番簡単と思われるが、乱流と磁場を対応させるやり方はこれだけではない。

もう一つは、流体の乱れの解析と磁場の散乱と類推を、プラズマの非圧縮性の磁気流体と考え、

$$\text{渦度 } \omega = \text{rot } v \iff \text{磁場 } B \quad (3.7)$$

の対応を利用し、以下のステップで求める。

1. 乱流のコルモゴルフのエネルギー・スペクトルを仮定 $E(k) \propto k^{-\frac{5}{3}}$
2. これより乱流の速度場の相関関数を求める。
3. この速度相関から、上に述べた渦度と磁場との対応を利用して乱れた磁場をつくる。
4. 上に述べた磁場で粒子を散乱させる。

上のように乱流をもとにして磁場をつくれれば、極めて一般的な形での磁場となるので、仮定を少なくできる。

しかしこの場合には、上のステップで3番目が成功していない。これは今後の課題で、最初の方法とともにさらに解析の必要がある。

4 拡散方程式モデル

4.1 拡散方程式と境界条件としての銀河の構造

宇宙線の伝播を拡散方程式を用いて記述する試みは、Ginzburg らによって始められた。(例えば [8]) この拡散方程式の最も一般的な形は

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} - \nabla \cdot (\hat{D}_i \nabla N_i) + \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} (b_i N_i) + n v \sigma_i N_i + \frac{1}{\tau_i} N_i = Q_i + \sum_{j>i} n v \sigma_{ij} N_j + \sum_{j>i} \frac{1}{\tau_{ij}} N_j \quad (4.1)$$

であり、ここで

$N_i(t, \mathbf{r}, \epsilon_k)$: 時刻 t 、位置 \mathbf{r} でのエネルギー ϵ_k を持つ宇宙線原子核の個数密度

\hat{D}_i : 拡散テンソル

b_i : 連続的なエネルギー変化を表す指標

1 個の宇宙線粒子の単位時間あたりのエネルギー変化は $\frac{d\epsilon_k}{dt} = b_i$

$n(\mathbf{r})$: 位置 \mathbf{r} での星間ガスの個数密度

v : 核の速度

σ_i : 核種 i の星間物質を標的とした非弾性散乱断面積

τ_i : 核種 i の崩壊寿命

$Q_i(t, \mathbf{r}, \epsilon_k)$: 宇宙線の発生源

σ_{ij} : 核種 j ($j > i$) から、破碎により核種 i を生じる発生断面積

τ_{ij} : 核種 j ($j > i$) が崩壊して核種 i を生じる崩壊寿命

を表す。この方程式を銀河の構造を考慮した境界条件のもとで解くことは難しいので、興味のあるエネルギー領域や核種に限定して上の方程式の簡単化を行う。

たとえば、定常状態を考えれば時間変化がなく、左辺第 1 項は例となる。十分高いエネルギー領域でエネルギー損失が無視できれば、上式 (4.1) の左辺第 3 項が無視でき、さらに安定な原子核で崩壊を無視すれば左辺第 5 項、右辺第 3 項が無視できる。最後に、大きい核からの破碎による寄与はないものと仮定する。これは、源で十分作られる陽子や、それより大きい核がわずかにしか存在しない鉄の場合に有効である。これらの仮定のもとで得られる方程式は

$$-\nabla \cdot (\hat{D}_i \nabla N_i) + n v \sigma_i N_i = Q_i \quad (4.2)$$

となる。

また上式を解くための境界条件として、銀河の構造を次のように表す。

すなわち、銀河を円筒座標で表し、銀河の全体の半径が R 、厚さが h 、 $\pm h_g$ が銀河の disk の厚さとし、宇宙線の源は disk 内に一様に分布するとする。

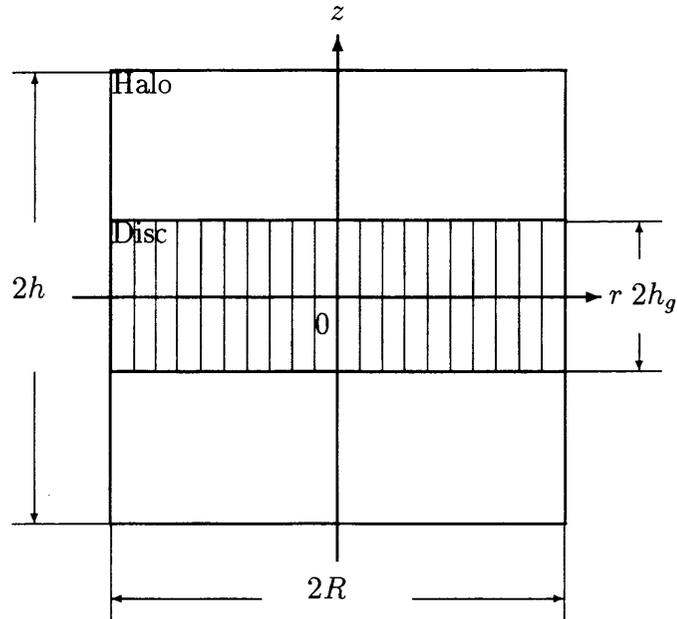


図 4.1: 銀河の構造

また、我々が、実際にモデルの計算に採用したスケールは次の通りである (Table 4.1)。

拡散方程式から出発して宇宙線伝播を解析する試みはいくつかあるが、まとめると以下の通りで、我々の試みの方向性が見てとれる。(Table 4.2)

すなわち、われわれは銀河の構造をとりいれ、しかも拡散の非等方性を考慮した解を得ている。

上の条件のもとでの拡散方程式の解の導出は、補遺Bで詳述されているが、ここではいくつか、鍵となる概念を説明しておこう。

銀河の半径 R	12kpc
銀河円盤の厚さ $2h_g$	200pc
銀河の厚さ $2h$	6kpc
銀河中心から太陽系までの動径距離 R_0	10kpc
銀河面から太陽系までの z 方向の距離 Z_0	10pc

表 4.1: モデルのスケール

	銀河の構造	
	disk、halo がある	halo のみ
等方的拡散	Ginzburg	
非等方的拡散	我々	Putsukin

表 4.2: 拡散方程式の解

4.2 銀河磁場

銀河磁場を大局的な性質を表す平均部分と非一様性を示す部分に分ける。すなわち

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 \quad (4.3)$$

$$\mathbf{H}_0 = \langle \mathbf{H} \rangle \quad (4.4)$$

$$\langle \mathbf{H}_1 \rangle = 0 \quad (4.5)$$

する。さらに、非一様磁場がランダムな乱れを持つとして、その power-law スペクトルを

$$\langle H_1^2 \rangle = A^2 H_0^2 (kL)^{-1+m} \quad (4.6)$$

$$H_0 \perp H_1 \quad (4.7)$$

$$A = \frac{H_1}{H_0} \ll 1 \quad (4.8)$$

ここで k は、銀河磁場の乱れを示す波数である。この波数と平均磁場によるラーマー半径との大小関係により次の二つの場合が考えられる。

$$\rho \leq k^{-1} \quad (4.9)$$

$$\rho \gg k^{-1} \quad (4.10)$$

$\rho \leq k^{-1}$ の場合は、大局的な平均磁場により粒子の運動は支配されるが、 $\rho \gg k^{-1}$ の場合は、ランダムな非一様磁場により散乱を受けて拡散が起こる。

拡散の非等方性を表す拡散テンソルを、Putsukin ら [10] に従って、

$$D_{\alpha\beta} = (D_{\parallel} - D_{\perp})b_{\alpha}b_{\beta} + D_{\perp}\delta_{\alpha\beta} + D_A\epsilon_{\alpha\beta\gamma}b_{\gamma} \quad (4.11)$$

とする。それぞれの項の意味は D_{\parallel} は磁力線に沿った方向の拡散、 D_{\perp} は磁力線に垂直な方向への拡散、 D_A は磁場の非一様性から生じるドリフトによる拡散の成分である。 b_{α} は平均磁場の単位ベクトルである。

銀河磁場は大局的に同心円をなし、その上に局所的な乱れがのっているものと考ええる。従って宇宙線粒子は大局的な同心円状の磁場により、銀河内に閉じ込められ、局所的な乱れにより散乱され拡散していくものとする。

以上のような非一様磁場を導入し、銀河ハローを持つ境界条件のもとで解いた。解法の詳細は、補遺に示してある。

4.3 解と観測との比較

解には、

- d_A に現れる銀河 Halo の磁場 B
- 平均磁場に垂直な拡散係数 $D_{\perp} = DE^m$, $d_{\perp} = dE^{m'}$ の係数 D , d および、銀河磁場の乱れのスペクトルの冪係数 m , m'
- 宇宙線の源におけるスペクトルの冪係数 γ_0

のパラメータを含む。これらは、観測データから決定すべきであるが、解の形が複雑で簡単に行かない。そこで、適当なパラメータを選んで、観測データが再現できるかどうか調べる。例えば、宇宙線スペクトルの knee の前後での巾の違いを調べた。詳細は、荒木田の修士論文に記してあるが、磁場による拡散係数に含まれる D と d の積を決めることが出来る。何らかの方法で、disk に関わる D を決定できれば、ハローの量 d を決めることが出来る。

宇宙線がハローまで含めた領域で伝播していることは明らかであるが、このモデルにより、ハローの磁場構造を宇宙線伝播から求めることが可能である。

5 結論

これまでの結果をまとめると以下のとおりである。

- 非等方の散乱をとりいれた Brown 運動モデル
 - 銀河のハローの大きさと平均の散乱間隔を推定することが出来る。
散乱間隔を他の観測から決めることが出来れば、ハローの大きさを決定できる。
 - 観測との比較で散乱点の平均間隔を求めることが出来る。
- 拡散方程式モデル
 - 宇宙線伝播の拡散方程式を銀河のハローを持つ境界条件で、6 個のフリーパラメータを含んで、解くことが出来た。
 - あるパラメータの組で、宇宙線スペクトルの knee を再現することが出来た。
 - 上のパラメータの組により、たとえばハローでの磁場の乱れを決定することが可能であることが示される。(これまでの試みでは、観測データにより全てのパラメータを決定していないので、上に述べた量は一意的に決まっていない。)

二つの、Brown 運動モデルと拡散方程式モデルを組み合わせることで、どちらのモデルにも含まれている、銀河磁場の不均一性のクロスチェックをすることが出来る。

6 今後の課題と方向

これからの課題としては、以下のものが考えられる。

- 非等方の散乱をとりいれた Brown 運動モデル
 - 散乱の素仮定を、現象論的なモデルでなく、銀河磁場の不均一性から導くこと。
- 拡散方程式モデル
 - 解いた拡散方程式の解に含まれる 6 個のパラメータを観測から決めること。

このようにして、宇宙線伝播から銀河の構造 — ハローの大きさや、磁場構造 — 乱れの大きさ等を求めることが出来る。

A 母関数を用いたブラウン運動の解析

3次元の Random Walk Model を母関数を用いて解析する。

このような解析を3次元で行ったものは、見当たらないのでここに示しておく。この解析的結果は、シミュレーションの信頼性の確認に用いられている。

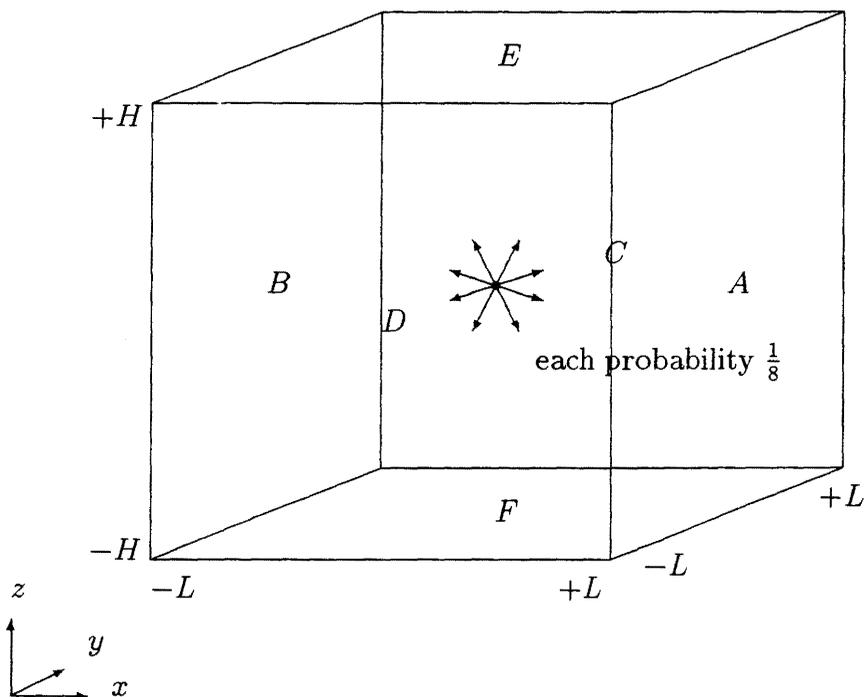
ここで示した方法は、一次元について [11] で示されたものを3次元へ拡張したものである。

A.1 等方散乱での宇宙線伝播

3次元での粒子の Random Walk について考える。粒子の Random Walk は等方的、つまり粒子は原点から出発して一回の歩行で同じ $1/8$ の確率で (x, y, z) 方向の $(+, +, +)$ 、 $(+, +, -)$ 、 $(+, -, +)$ 、 $(+, -, -)$ 、 $(-, +, +)$ 、 $(-, +, -)$ 、 $(-, -, +)$ 、 $(-, -, -)$ のいずれかの方向に動くとする。これは1次元の組合せの方法を3次元にまで拡張したもので、 x 方向、 y 方向、 z 方向の動きを独立な事象として扱うことができる Random Walk Model である。よって N step 後に位置 (x, y, z) にいる確率は (3.3) 式の表現を用いて、次のように x 軸、 y 軸、 z 軸方向でのそれぞれの確率の積で表すことができる。

$$P(x, N)P(y, N)P(z, N) \tag{A.1}$$

この場合のモデルでは各軸の方向の動きは一回の歩行で距離 1 動くとしてやるので、3次元空間の粒子は一回の歩行で距離 $\sqrt{3}$ 動くことになり、実際の銀河系内宇宙線伝播における step size はこの量に対応する。



A.2 宇宙線が洩れ出るまでの平均散乱回数 $\langle N \rangle$

吸収壁 A, B, C, D, E, F がそれぞれ $x = +L, x = -L, y = +L, y = -L, z = +H, z = -H$ の位置に存在する場合を考える。この Random Walk Model で興味があるのは吸収壁に吸収されるまでの平均 step 数、すなわち、宇宙線が銀河系内から洩れ出るまでの平均散乱回数についてである。この平均散乱回数から Escape Length への対応を見てやりたいためである。よって2次元での方法と同様に吸収壁に吸収される確率から求めて行く。

吸収壁 A, B, C, D, E, F が存在する等方的な Random Walk で、初期位置 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ でちょうど N 回目で A, B, C, D, E, F いずれかの吸収壁に吸収される確率を $A(N)$ とすれば、

$$\begin{aligned}
 A(N) = & a_A(N) + a_B(N) + a_C(N) + a_D(N) + a_E(N) + a_F(N) \\
 & + a_{AC}(N) + a_{AD}(N) + a_{AE}(N) + a_{AF}(N) + a_{BC}(N) + a_{BD}(N) \\
 & + a_{BE}(N) + a_{BF}(N) + a_{CE}(N) + a_{CF}(N) + a_{DE}(N) + a_{DF}(N) \\
 & + a_{ACE}(N) + a_{ACF}(N) + a_{ADE}(N) + a_{ADF}(N) \\
 & + a_{BCE}(N) + a_{BCF}(N) + a_{BDE}(N) + a_{BDF}(N)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

と表される。ここで $a(N)$ は、添字が1個ついたものはちょうど N 回目で他の吸収壁には到達することなくその添字が示す吸収壁に吸収される確率を表し、添字が2個ついたものはちょうど N 回目で他の吸収壁には到達することなくその添字が示す2つの吸収壁の交差する辺に吸収される確率を表し、添字が3個ついたものはちょうど N 回目でその添字が示す3つの吸収壁の交差する点に吸収される確率を表す。

この $a(N)$ の確率は、 x 軸方向に注目した Random Walk で、ちょうど N 回目で吸収壁 A に吸収される確率 $u_A(N)$ 、吸収壁 B に吸収される確率 $u_B(N)$ と、同様に y 軸方向での吸収壁 C に吸収される確率 $v_C(N)$ 、吸収壁 D に吸収される確率 $v_D(N)$ 、 z 軸方向での吸収壁 E に吸収される確率 $w_E(N)$ 、吸収壁 F に吸収される確率 $w_F(N)$ を使って表すことができる。例えば、次のようにである。

$$a_A(N) = u_A(N) \left\{ 1 - \sum_{k=L}^N v_C(k) - \sum_{k=L}^N v_D(k) \right\} \left\{ 1 - \sum_{k=H}^N w_E(k) - \sum_{k=H}^N w_F(k) \right\}$$

$$a_{AC}(N) = u_A(N)v_C(N) \left\{ 1 - \sum_{k=H}^N w_E(k) - \sum_{k=H}^N w_F(k) \right\}$$

$$a_{ACE}(N) = u_A(N)v_C(N)w_E(N)$$

この $u_A(N)$ 、 $u_B(N)$ 、 $v_C(N)$ 、 $v_D(N)$ 、 $w_E(N)$ 、 $w_F(N)$ は母関数の方法で同じようにして導くことができ、それを使うと $A(N)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
A(N) = & \frac{2}{L} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \\
& + \frac{1}{H} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2H} \\
& - \frac{2}{L^2} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \\
& \quad \times \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& + \frac{2}{L^2} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \\
& \quad \times \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^N \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& + \frac{1}{L^2} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\mu\pi}{2L} \\
& - \frac{2}{LH} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \\
& \quad \times \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2H} \cos^{H-1} \frac{\mu\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2H}\right)^{-1} \\
& + \frac{2}{LH} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \\
& \quad \times \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2H} \cos^N \frac{\mu\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2H}\right)^{-1} \\
& - \frac{2}{LH} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2H} \\
& \quad \times \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& + \frac{2}{LH} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2H} \\
& \quad \times \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^N \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& + \frac{2}{LH} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2H} \cos^{N-1} \frac{\mu\pi}{2H}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos^{H-1} \frac{\lambda\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \\
& - \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos^N \frac{\lambda\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \\
& - \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^N \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos^{H-1} \frac{\lambda\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \\
& + \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^N \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos^N \frac{\lambda\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \\
& + \frac{1}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2H} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\lambda\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& - \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2H} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2L} \cos^N \frac{\lambda\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& + \frac{1}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2H} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^N \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2L} \cos^N \frac{\lambda\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos^{H-1} \frac{\lambda\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \\
& + \frac{1}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos^N \frac{\lambda\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \\
& - \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2H} \cos^{N-1} \frac{\mu\pi}{2H} \\
& \quad \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\lambda\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& + \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2H-1} \sum_{\lambda=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2H} \cos^{N-1} \frac{\mu\pi}{2H} \\
& \quad \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2L} \cos^N \frac{\lambda\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& + \frac{1}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{N-1} \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos^{N-1} \frac{\lambda\pi}{2H} \tag{A.3}
\end{aligned}$$

ここまで分かれば吸収壁に吸収されるまでの平均 step 数 $\langle N \rangle$ を求めることができる。(3.35) 式より次のようになる。

$$\begin{aligned}
\langle N \rangle & = \frac{2}{L} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L}\right)^{-2} \\
& \quad + \frac{1}{H} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2H}\right)^{-2} \\
& \quad - \frac{2}{L^2} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L}\right)^{-2} \\
& \quad \quad \times \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{L^2} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-2} \\
& + \frac{1}{L^2} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-2} \\
& - \frac{2}{LH} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L}\right)^{-2} \\
& \quad \times \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2H} \cos^{H-1} \frac{\mu\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2H}\right)^{-1} \\
& + \frac{2}{LH} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2H} \cos \frac{\mu\pi}{2H} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2H}\right)^{-1} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2H}\right)^{-2} \\
& - \frac{2}{LH} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2H}\right)^{-2} \\
& \quad \times \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& + \frac{2}{LH} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2H} \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-2} \\
& + \frac{2}{LH} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2H}\right)^{-2} \\
& + \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L}\right)^{-2} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos^{H-1} \frac{\lambda\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \\
& - \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& \quad \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos \frac{\lambda\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-2} \\
& - \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos^{H-1} \frac{\lambda\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-2} \\
& + \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& \quad \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos \frac{\lambda\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L} \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-2} \\
& + \frac{1}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2H}\right)^{-2} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\lambda\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& - \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& \quad \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2L} \cos \frac{\lambda\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-1} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2H} \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-2} \\
& + \frac{1}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2H-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2H} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& \quad \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2L} \cos \frac{\lambda\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-1} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2H} \cos \frac{\mu\pi}{2L} \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-2} \\
& - \frac{1}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L}\right)^{-2} \\
& \quad \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos^{H-1} \frac{\lambda\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \\
& + \frac{1}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \cos \frac{\lambda\pi}{2H} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-1} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L} \cos \frac{\lambda\pi}{2H}\right)^{-2} \\
& - \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2H-1} \sum_{\lambda=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2H} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2H}\right)^{-2} \\
& \quad \times \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2L} \cos^{L-1} \frac{\lambda\pi}{2L} \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-1} \\
& + \frac{2}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2H-1} \sum_{\lambda=1}^{2L-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2H} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2L} \cos \frac{\lambda\pi}{2L} \\
& \quad \times \left(1 - \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-1} \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2H} \cos \frac{\lambda\pi}{2L}\right)^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{L^2 H} \sum_{\nu=1}^{2L-1} \sum_{\mu=1}^{2L-1} \sum_{\lambda=1}^{2H-1} \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\nu\pi}{2L} \sin \frac{\mu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2L} \sin \frac{\lambda\pi}{2} \sin \frac{\lambda\pi}{2H} \\
& \times \left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{2L} \cos \frac{\mu\pi}{2L} \cos \frac{\lambda\pi}{2H} \right)^{-2} \tag{A.4}
\end{aligned}$$

この3次元 Random Walk Model を実際の銀河系内宇宙線の伝播へ対応させることを考える。モデルでのパラメータと実際のスケールとの対応は次のようになっている。

$$\begin{aligned}
xy \text{ 平面の大きさ} : 2L & \iff \text{銀河円盤の大きさ} \\
z \text{ 方向の高さ} : H & \iff \text{銀河ハローの円盤面からの高さ} \\
\text{Random Walk の歩幅} : \sqrt{3} & \iff \text{散乱点から散乱点までの平均距離} \\
& \text{(step size : } l \text{)}
\end{aligned}$$

この対応関係から具体的に各散乱点までの平均距離を求めるには、大きさが 20 kpc の銀河円盤を考えるなら次のように行えばよい。

$$l = \frac{20 \text{ kpc}}{2L} \times \sqrt{3} \tag{A.5}$$

平均 step 数 $\langle N \rangle$ は $2L$ 及び $2H$ による量である。この $2L$ は (5.10) 式から銀河円盤の大きさと step size の比に関係しているのが分かる。また $2H$ についても (5.10) 式のような対応の式が書け、 $2H$ は銀河ハローの大きさと step size の比に関係しているのが分かる。よって平均 step 数 $\langle N \rangle$ は銀河のサイズと平均散乱間隔の比による量だと言える。

ここまでの話から銀河磁場による平均の散乱回数を示す $\langle N \rangle$ と散乱点から散乱点までの平均距離 l を導き出すことができる。この $\langle N \rangle$ に l をかけてやれば銀河系から洩れ出るまでの伝播距離が求められる。そしてこの伝播距離に平均通過物質質量をかけてやれば Escape Length が求められる。よってこの Random Walk Model を用いて観測結果との比較が行える。Escape Length への対応は銀河のサイズと step size の比を操作して観測結果を満足するような伝播条件を見つけ出すことにより行う。よってこの操作から step size l が決まり、銀河系の磁場の乱れのスケールを知ることができる。

しかしながら、2次元の場合でも述べたが、宇宙線の伝播はエネルギーに依存するため等方的な散乱を考えただけでは不十分である。よって次では各方向への散乱が不等確率で起こる非マルコフ過程による Random Walk をモンテカルロ法によるシミュレーションを用いて考えていく。また、この等方的な場合の解析式はシミュレーションが正しく動いていることを示す確認の手段に使えるので活用することにする。

B 銀河ハローを持つ境界条件のもとで磁場の不均一性を持つ場合の拡散方程式の解の導出

以下次の拡散方程式 (前述：式 4.2) の解の導出を詳細に述べる。

$$-\nabla_{\alpha}(D_{\alpha\beta}(z)\nabla_{\beta})N_i(E, r, z) + n(z)v\sigma_i N_i(E, r, z) = Q_i(E, r, z) \quad (\text{B.1})$$

ここで、 $D_{\alpha\beta}(z)$ は拡散テンソル、 $N(E, r, z)$ は宇宙線の個数密度、 $n(z)$ は星間空間ガスの個数密度、 σ_i は宇宙線と星間空間ガスとの非弾性散乱断面積、 $S_i(E, r, z)$ は宇宙線の源を表す関数。添字 α, β はそれぞれ座標を表し i は宇宙線粒子の種類を表す添字である。

我々は拡散テンソルとして Ptuskin らと同様な、

$$D_{\alpha\beta} = (D_{\parallel} - D_{\perp})b_{\alpha}b_{\beta} + D_{\perp}\delta_{\alpha\beta} + D_A\epsilon_{\alpha\beta\gamma}b_{\gamma} \quad (\text{B.2})$$

を導入する。ここで、 D_{\parallel} は磁力線に沿った方向の拡散、 D_{\perp} は磁力線に垂直な方向への拡散、 D_A は磁場の非一様性から生じるドリフトによる拡散の成分である。 b_{α} は平均磁場の単位ベクトルである。

この磁場の単位ベクトルについて考えて見よう。

観測によると我々の銀河の大域的な構造はほぼ同心円上であると考えて良い。そこでこの優位性から平均磁場の単位ベクトルを

$$b_{\phi} = 1, b_r = b_z = 0$$

と取ろう。この時拡散方程式の拡散項の微分演算子は、

$$-\nabla_{\alpha}(D_{\alpha\beta}\nabla_{\beta}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_{\perp})\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z}D_{\perp}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}D_A\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_A)\frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{B.3})$$

となる。

銀河磁場の非一様性を考える以上、拡散係数も銀河磁場の乱れの程度を考慮して決定されなければならない。

今、ランダムな銀河磁場の power-law スペクトルが (4.6) で与えられるとき、平均自由行程は、

$$l = A^{-2}L\left(\frac{r_{H_0}}{L}\right)^m$$

で与えられる。

ここで、粒子の平均自由行程 l を用いると、

$$D_{\parallel} = \frac{lv}{3} \quad (\text{B.4})$$

$$D_{\perp} = gA^4 \frac{lv}{3} \quad (\text{B.5})$$

となり、 D_A は、軌道理論等から導かれるドリフト速度

$$\langle \mathbf{V}_D \rangle = \frac{pvc}{3Ze} \left(\frac{1}{B^2} \nabla \times \mathbf{B} + \frac{1}{B^4} \mathbf{B} \times \nabla B^2 \right) \quad (\text{B.6})$$

と (B.2) の反対称成分を比較すると、

$$D_A = \frac{r_{H_0} v}{3} \quad (\text{B.7})$$

であると分かる。ここで、 r_{H_0} は平均磁場における旋回半径である。ここで、 g は理論的にまだしっかりと与えられていない。論文によってほしい $g = 0.1 \sim 0.5$ の範囲で与えられている。

そして、式をより簡単にするためにそれぞれの拡散係数は

$$\begin{cases} D_{\perp}(r, z) = \text{const} \\ D_A(r, z) = D_{A0}(z) \frac{r}{R_0} \\ D_{A0}(z) = \text{const} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

の形をとると仮定しよう。すると拡散項の微分演算子は

$$-\nabla_{\alpha}(D_{\alpha\beta}\nabla_{\beta}) = \frac{D_{\perp}}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - D_{\perp} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2D_{A0}}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{B.9})$$

という形に書かれる。(B.8) のように拡散係数が表される場合、ドリフト速度は、

$$u_r = -\frac{\partial}{\partial z} D_A = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_A) = \frac{2D_{A0}}{R_0} = \text{const} \quad (\text{B.11})$$

となり、拡散は平均磁場に垂直に同心円上の拡散と、ドリフトから生じる、 z 方向の拡散の重ね合わせとなる事がわかる。

拡散方程式を解く際の境界条件について考えてみよう。

我々は次の2つの場合を考えてみる。一つは宇宙線が境界に達した時、銀河の外には洩れ出さない、すなわち完全に反射されてしまう場合と逆に、境界に達した時必ず洩れ出て行くというものである。

Pacheco (1971) [12] によれば宇宙線の L/M 比を考えると、宇宙線が境界で反射されるとする場合、この L/M 比は観測値よりも大きくなってしまう。なぜなら、軽い元素は源から放出される primary 粒子と星間ガスとの衝突による核破碎で連続的に生成されているため、もし、銀河が完全な反射を持っていると、軽い元素は増加する一方であるからである。

そこで、我々は境界条件として、境界に達した宇宙線は自由に銀河の外に洩れ出ると仮定しよう。すなわち、

$$N_i(r = R, z) = N_i(r, z = \pm h) = 0 \quad (\text{B.12})$$

であるとする。

ここまで準備をして次にいよいよ拡散方程式の解の導出に入ることにする。

我々は粒子の個数密度 $N_i(t, \mathbf{r}, E)$ を求めるために、次の式を満たす Green 関数を求める。

$$-\nabla_\alpha(D_{\alpha\beta}(z)\nabla_\beta)\Phi(r, z; r_0) + n(z)v\sigma_i\Phi(r, z; r_0) = \theta(h_g - |z|)\frac{\delta(r - r_0)}{4\pi h_g r_0} \quad (\text{B.13})$$

ここで r_0 は宇宙線の源の位置を表し、 h_g は銀河円盤の厚さの半分、 $\theta(h_g - |z|)$ は階段関数、 $\Phi(r, z; r_0)$ は N_i と

$$N_i = 4\pi h_g g_i E^{-\gamma_0} \int_0^R \chi(r_0)\Phi(r, z; r_0)r_0 dr_0 \quad (\text{B.14})$$

という関係で結びつけられている。ここで $\chi(r_0)$ は宇宙線の源の動径方向の分布を与える関数であり、 $E^{-\gamma_0}$ は宇宙線の源におけるエネルギースペクトルである。

この方程式の解が

$$\Phi(r, z; r_0) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s(z; r_0) J_0\left(\frac{\nu_s r}{R}\right) \quad (\text{B.15})$$

の形をとると仮定しよう。

ここで J_0 はゼロ次の Bessel 関数、 ν_s は $J_0(\nu_s) = 0$ の根である。

これより拡散方程式は

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{\infty} \left[\left\{ -\frac{D_{\perp}(z)}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - D_{\perp}(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2D_{A0}(z)}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \right\} + n(z)v\sigma_i \right] \quad (\text{B.16}) \\
& \times a_s(z; r_0) J_0 \left(\frac{\nu_s r}{R} \right) \\
& = \theta(h_g - |z|) \frac{\delta(r - r_0)}{4\pi h_g r_0}
\end{aligned}$$

となる。

動径方向は Bessel 関数で展開されているので、規格化直交関数系の完備性から、 δ 関数は

$$\delta(r - r_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{|J_1(\nu_s)|^2} J_0 \left(\frac{\nu_s r_0}{R} \right) J_0 \left(\frac{\nu_s r}{R} \right)$$

となり、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} J_0 \left(\frac{\nu_s r}{R} \right) = - \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 J_0 \left(\frac{\nu_s r}{R} \right)$$

から、方程式

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{\infty} \left[\left\{ D_{\perp}(z) \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 - D_{\perp}(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2D_{A0}(z)}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \right\} + n(z)v\sigma_i \right] a_s(z; r_0) J_0 \left(\frac{\nu_s r}{R} \right) \\
& = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\theta(h_g - |z|)}{2\pi h_g R^2 |J_1(\nu_s)|^2} J_0 \left(\frac{\nu_s r_0}{R} \right) J_0 \left(\frac{\nu_s r}{R} \right) \quad (\text{B.17})
\end{aligned}$$

を得る。

この結果、我々は次の方程式を解く事に帰着する。

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2D_{A0}(z)}{R_0 D_{\perp}(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right\} a_s(z; r_0) - \left\{ \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 + \frac{n(z)v\sigma_i}{D_{\perp}(z)} \right\} a_s(z; r_0) \\
& = -\frac{\theta(h_g - |z|)}{2\pi h_g R^2 |J_1(\nu_s)|^2} J_0 \left(\frac{\nu_s r_0}{R} \right) = -\theta(h_g - |z|) C' \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

ここで、

$$D_{\perp}(z) = \begin{cases} D_{\perp} & |z| \leq h_g \\ d_{\perp} & |z| \geq h_g \end{cases}$$

$$D_{A0}(z) = \begin{cases} D_{A0} & |z| \leq h_g \\ d_{A0} & |z| \geq h_g \end{cases}$$

$$n(z) = \begin{cases} n_g & |z| \leq h_g \\ n_h & |z| \geq h_g \end{cases}$$

始めに、Halo における方程式、

$$\frac{d^2 a_s}{dz^2} - \frac{2d_{A0}}{R_0 d_\perp} \frac{da_s}{dz} - \left\{ \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 + \frac{n_h v \sigma_i}{d_\perp} \right\} a_s = 0 \quad (\text{B.19})$$

を解く。

2 階線形常微分方程式の補助方程式から

$$k^2 - \frac{2d_{A0}}{R_0 d_\perp} k - \left\{ \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 + \frac{n_h v \sigma_i}{d_\perp} \right\} = 0$$

よって、

$$k = \frac{d_{A0}}{R_0 d_\perp} \pm \sqrt{\left(\frac{d_{A0}}{R d_\perp} \right)^2 + \frac{n_h v \sigma_i}{d_\perp}}$$

ここで $\alpha < \beta$ とおくと、Halo における方程式の一般解は、

$$a_s(z; r_0) = A e^{\alpha z} + B e^{\beta z}, \quad z \geq 0 \quad (\text{B.20})$$

$$a_s(z; r_0) = A' e^{\alpha z} + B' e^{\beta z}, \quad z < 0 \quad (\text{B.21})$$

となる。

境界条件、

$$a_s(z = \pm h) = 0$$

より、

$$A = -B \exp\{(\beta - \alpha)h\}$$

$$A' = -B' \exp\{-(\beta - \alpha)h\}$$

したがって、

$$a_s(z; r_0) = \begin{cases} B[-\exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha z} + e^{\beta z}] & z \geq 0 \\ B'[-\exp\{-(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha z} + e^{\beta z}] & z < 0 \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

Disc において、方程式の一般解は

$$a_s(z; r_0) = \begin{cases} Pe^{\gamma z} + Qe^{\delta z} + C & z \geq 0 \\ P'e^{\gamma z} + Q'e^{\delta z} + C & z < 0 \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

であり、ここで $\gamma, \delta (\gamma < \delta)$ は補助方程式

$$k^2 - \frac{2D_{A0}}{R_0 D_{\perp}} k - \left\{ \left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 + \frac{n_g \nu \sigma_i}{D_{\perp}} \right\} = 0$$

の解で、

$$C = \frac{C'}{\left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 + \frac{n_g \nu \sigma_i}{D_{\perp}}}$$

とおく。

連続の条件

$$a_{sh}(\pm h_g; r_0) = a_{sg}(\pm h_g; r_0), \quad \frac{\partial a_{sh}(\pm h_g; r_0)}{\partial z} = \frac{\partial a_{sg}(\pm h_g; r_0)}{\partial z}$$

より、我々は

$$B[-\exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha h_g} + e^{\beta h_g}] = Pe^{\gamma h_g} + Qe^{\delta h_g} + C \quad z \geq 0$$

$$B'[-\exp\{-(\beta - \alpha)h\}e^{-\alpha h_g} + e^{-\beta h_g}] = P'e^{-\gamma h_g} + Q'e^{-\delta h_g} + C \quad z < 0$$

$$B[-\alpha \exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha h_g} + \beta e^{\beta h_g}] = \gamma P e^{\gamma h_g} + \delta Q e^{\delta h_g} \quad z \geq 0$$

$$B'[-\alpha \exp\{-(\beta - \alpha)h\}e^{-\alpha h_g} + \beta e^{-\beta h_g}] = \gamma P' e^{-\gamma h_g} + \delta Q' e^{-\delta h_g} \quad z < 0$$

を得る。

我々は積分定数 P, P', B, B' をまず最初に求め、のちに Q, Q' を $z = 0$ における連続の条件から決定する。

$z \geq 0$ において、

$$\begin{pmatrix} -\exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha h_g} + e^{\beta h_g} & -e^{\gamma h_g} \\ -\alpha \exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha h_g} + \beta e^{\beta h_g} & -\gamma e^{\gamma h_g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Qe^{\delta h_g} + C \\ \delta Qe^{\delta h_g} \end{pmatrix}$$

$z < 0$ において、

$$\begin{pmatrix} -\exp\{-(\beta - \alpha)h\}e^{-\alpha h_g} + e^{-\beta h_g} & -e^{-\gamma h_g} \\ -\alpha \exp\{-(\beta - \alpha)h\}e^{-\alpha h_g} + \beta e^{-\beta h_g} & -\gamma e^{-\gamma h_g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q'e^{-\delta h_g} + C \\ \delta Q'e^{-\delta h_g} \end{pmatrix}$$

我々は、

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} Qe^{\delta h_g} + C & -e^{\gamma h_g} \\ \delta Qe^{\delta h_g} & -\gamma e^{\gamma h_g} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \{(\delta - \gamma)Qe^{\delta h_g} - \gamma C\} e^{\gamma h_g} \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -\exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha h_g} + e^{\beta h_g} & Qe^{\delta h_g} + C \\ -\alpha \exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha h_g} + \beta e^{\beta h_g} & \delta Qe^{\delta h_g} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left[\{(\alpha - \delta) \exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha h_g} - (\beta - \delta)e^{\beta h_g}\} Qe^{\delta h_g} \right. \\ &\quad \left. + \{\alpha \exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha h_g} - \beta e^{\beta h_g}\} C \right] \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} B' &= \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} Q'e^{-\delta h_g} + C & -e^{-\gamma h_g} \\ \delta Q'e^{-\delta h_g} & -\gamma e^{-\gamma h_g} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta'} \{(\delta - \gamma)Q'e^{-\delta h_g} - \gamma C\} e^{-\gamma h_g} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{\Delta'} \begin{vmatrix} -\exp\{-(\beta - \alpha)h\}e^{-\alpha h_g} + e^{-\beta h_g} & Q'e^{-\delta h_g} + C \\ -\alpha \exp\{-(\beta - \alpha)h\}e^{-\alpha h_g} + \beta e^{-\beta h_g} & \delta Q'e^{-\delta h_g} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta'} \left[\{(\alpha - \delta) \exp\{-(\beta - \alpha)h\}e^{-\alpha h_g} - (\beta - \delta)e^{-\beta h_g}\} Q'e^{-\delta h_g} \right. \\ &\quad \left. + \{\alpha \exp\{-(\beta - \alpha)h\}e^{-\alpha h_g} - \beta e^{-\beta h_g}\} C \right] \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

を得る。

ここで Δ, Δ' は、

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -\exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha h_g} + e^{\beta h_g} & -e^{\gamma h_g} \\ -\alpha \exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha h_g} + \beta e^{\beta h_g} & -\gamma e^{\gamma h_g} \end{vmatrix} \\ &= \{(\gamma - \alpha) \exp\{(\beta - \alpha)h\}e^{\alpha h_g} - (\gamma - \beta)e^{\beta h_g}\} e^{\gamma h_g} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned}\Delta' &= \begin{vmatrix} -\exp\{-(\beta-\alpha)h\}e^{-\alpha h_g} + e^{-\beta h_g} & -e^{-\gamma h_g} \\ -\alpha \exp\{-(\beta-\alpha)h\}e^{-\alpha h_g} + \beta e^{-\beta h_g} & -\gamma e^{-\gamma h_g} \end{vmatrix} \\ &= \{(\gamma-\alpha)\exp\{-(\beta-\alpha)h\}e^{-\alpha h_g} - (\gamma-\beta)e^{-\beta h_g}\}e^{-\gamma h_g} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

よって $z \geq 0$ において

$$\begin{aligned}a_s(z; r_0) &= \frac{1}{\Delta} \{(\delta-\gamma)Qe^{\delta h_g} - \gamma C\} e^{\gamma h_g} \\ &\times \{-\exp\{(\beta-\alpha)h\}e^{\alpha z} + e^{\beta z}\} \quad (\text{Halo}) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned}a_s(z; r_0) &= \frac{1}{\Delta} \left[\{(\alpha-\delta)\exp\{(\beta-\alpha)h\}e^{\alpha h_g} - (\beta-\delta)e^{\beta h_g}\} Qe^{\delta h_g} \right. \\ &\left. + \{\alpha \exp\{(\beta-\alpha)h\}e^{\alpha h_g} - \beta e^{\beta h_g}\} C \right] e^{\gamma z} + Qe^{\delta z} + C \quad (\text{Disc}) \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

そして $z < 0$ において、

$$\begin{aligned}a_s(z; r_0) &= \frac{1}{\Delta'} \{(\delta-\gamma)Q'e^{-\delta h_g} - \gamma C\} e^{-\gamma h_g} \\ &\times \{-\exp\{-(\beta-\alpha)h\}e^{\alpha z} + e^{\beta z}\} \quad (\text{Halo}) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned}a_s(z; r_0) &= \frac{1}{\Delta'} \left[\{(\alpha-\delta)\exp\{-(\beta-\alpha)h\}e^{-\alpha h_g} - (\beta-\delta)e^{-\beta h_g}\} Q'e^{-\delta h_g} \right. \\ &\left. + \{\alpha \exp\{-(\beta-\alpha)h\}e^{-\alpha h_g} - \beta e^{-\beta h_g}\} C \right] e^{\gamma z} + Q'e^{\delta z} + C \quad (\text{Disc}) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$z = 0$ における連続の条件から

$$a_{sg+}(0; r_0) = a_{sg-}(0; r_0) \quad \frac{\partial a_{sg+}(0; r_0)}{\partial z} = \frac{\partial a_{sg-}(0; r_0)}{\partial z}$$

Q, Q' に対する方程式は

$$\begin{pmatrix} \frac{U}{\Delta} + 1 & -\left(\frac{U'}{\Delta'} + 1\right) \\ \frac{U}{\Delta}\gamma + \delta & -\left(\frac{U'}{\Delta'}\gamma + \delta\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V'}{\Delta'} - \frac{V}{\Delta} \\ \gamma\left(\frac{V'}{\Delta'} - \frac{V}{\Delta}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{B.34})$$

ここで、

$$\begin{aligned}U &= \{(\alpha-\delta)\exp\{(\beta-\alpha)h\}e^{\alpha h_g} - (\beta-\delta)e^{\beta h_g}\} e^{\delta h_g} \\ U' &= \{(\alpha-\delta)\exp\{-(\beta-\alpha)h\}e^{-\alpha h_g} - (\beta-\delta)e^{-\beta h_g}\} e^{-\delta h_g} \\ V &= \{\alpha \exp\{(\beta-\alpha)h\}e^{\alpha h_g} - \beta e^{\beta h_g}\} \\ V' &= \{\alpha \exp\{-(\beta-\alpha)h\}e^{-\alpha h_g} - \beta e^{-\beta h_g}\} \end{aligned}$$

それゆえ、

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{Z} \begin{vmatrix} \frac{V'}{\Delta'} - \frac{V}{\Delta} & -\left(\frac{U'}{\Delta'} + 1\right) \\ \gamma\left(\frac{V'}{\Delta'} - \frac{V}{\Delta}\right) & -\left(\frac{U'}{\Delta'}\gamma + \delta\right) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\gamma - \delta}{Z} \left(\frac{V'}{\Delta'} - \frac{V}{\Delta}\right) \\
 Q' &= \frac{1}{Z} \begin{vmatrix} \frac{U}{\Delta} + 1 & \frac{V'}{\Delta'} - \frac{V}{\Delta} \\ \frac{U}{\Delta}\gamma + \delta & \gamma\left(\frac{V'}{\Delta'} - \frac{V}{\Delta}\right) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\gamma - \delta}{Z} \left(\frac{V'}{\Delta'} - \frac{V}{\Delta}\right)
 \end{aligned}$$

ここで Z は

$$\begin{aligned}
 Z &= \begin{vmatrix} \frac{U}{\Delta} + 1 & -\left(\frac{U'}{\Delta'} + 1\right) \\ \frac{U}{\Delta}\gamma + \delta & -\left(\frac{U'}{\Delta'}\gamma + \delta\right) \end{vmatrix} \\
 &= (\gamma - \delta) \left(\frac{U}{\Delta} - \frac{U'}{\Delta'}\right)
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 Q = Q' &= \frac{V'\Delta - V\Delta'}{U\Delta' - U'\Delta} \\
 &= C \left[\left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \left\{ e^{(\delta - \gamma)h_g} - e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} \right. \\
 &\quad - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta - \gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} \\
 &\quad - \left. \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta - \gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} \right]^{-1} \\
 &\quad \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{\gamma h_g} - e^{-\gamma h_g}) \right. \\
 &\quad - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} \right\} e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} \\
 &\quad - \left. \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} \right] \tag{B.35}
 \end{aligned}$$

最終的に 積分定数 B, B', P, P' は次のようになる。

$$B = \frac{C(\delta - \gamma)}{(\gamma - \alpha) \exp\{(\beta - \alpha)h\} e^{\alpha h_g} - (\gamma - \beta) e^{\beta h_g}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \left\{ e^{(\delta-\gamma)h_g} - e^{-(\delta-\gamma)h_g} \right\} \right. \\
& \quad - \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& \quad \left. - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta-\gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta-\gamma)h_g} \right\} e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \right]^{-1} \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{\gamma h_g} - e^{-\gamma h_g}) \right. \\
& \quad - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} \right\} e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& \quad - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta-\gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta-\gamma)h_g} \right\} e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \left. \right] e^{\delta h_g} \\
& - \gamma \tag{B.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B' &= \frac{C(\delta - \gamma)}{(\gamma - \alpha) \exp\{(\beta - \alpha)h\} e^{\alpha h_g} - (\gamma - \beta)e^{\beta h_g}} \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \left\{ e^{-(\delta-\gamma)h_g} - e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \right. \\
& \quad - \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} \right\} e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& \quad \left. - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \right]^{-1} \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{-\gamma h_g} - e^{\gamma h_g}) \right. \\
& \quad - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& \quad - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \left. \right] e^{-\delta h_g} \\
& - \gamma \tag{B.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{C\{(\alpha - \delta)e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} e^{\alpha h_g} - (\beta - \delta)e^{\beta h_g}\}}{\{(\gamma - \alpha)e^{(\beta-\alpha)h} e^{\alpha h_g} - (\gamma - \beta)e^{\beta h_g}\} e^{\gamma h_g}} \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \left\{ e^{(\delta-\gamma)h_g} - e^{-(\delta-\gamma)h_g} \right\} \right. \\
& \quad - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta-\gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta-\gamma)h_g} \right\} e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& \quad \left. - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta-\gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta-\gamma)h_g} \right\} e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \right]^{-1} \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{\gamma h_g} - e^{-\gamma h_g}) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} \right\} e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} \\
& - \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} \Big] \\
& \times e^{\delta h_g} + \alpha e^{(\beta - \alpha)h} e^{\alpha h_g} - \beta e^{\beta h_g}
\end{aligned} \tag{B.38}$$

$$\begin{aligned}
P' &= \frac{C \{ (\alpha - \delta) e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} e^{-\alpha h_g} - (\beta - \delta) e^{-\beta h_g} \}}{\{ (\gamma - \alpha) e^{-(\beta - \alpha)h} e^{-\alpha h_g} - (\gamma - \beta) e^{-\beta h_g} \} e^{\gamma h_g}} \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \left\{ e^{-(\delta - \gamma)h_g} - e^{(\delta - \gamma)h_g} \right\} \right. \\
& \quad - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta) e^{-(\delta - \gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha) e^{(\delta - \gamma)h_g} \right\} e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} \\
& \quad \left. - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha) e^{-(\delta - \gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta) e^{(\delta - \gamma)h_g} \right\} e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} \right]^{-1} \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{-\gamma h_g} - e^{\gamma h_g}) \right. \\
& \quad - \left\{ \beta(\gamma - \alpha) e^{-\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta) e^{\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} \\
& \quad \left. - \left\{ \alpha(\gamma - \beta) e^{-\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha) e^{\gamma h_g} \right\} e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} \right] \\
& \times e^{-\delta h_g} + \alpha e^{-(\beta - \alpha)h} e^{-\alpha h_g} - \beta e^{-\beta h_g}
\end{aligned} \tag{B.39}$$

よって $\Phi_s(r, z; r_0)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \Phi_{sh+}(r, z; r_0) \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\nu_s r_0}{R}\right)}{2\pi h_g R^2 |J_1(\nu_s)|^2 \left(\left(\frac{\nu_s}{R}\right)^2 + \frac{n_s \nu \sigma_y}{D_{\perp}} \right)} \\
& \times \left[\frac{(\delta - \gamma)}{(\gamma - \alpha) e^{(\beta - \alpha)h} e^{\alpha h_g} - (\gamma - \beta) e^{\beta h_g}} \right. \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{\gamma h_g} - e^{-\gamma h_g}) \right. \\
& \quad - \left\{ \beta(\gamma - \alpha) e^{\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta) e^{-\gamma h_g} \right\} e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} \\
& \quad \left. - \left\{ \alpha(\gamma - \beta) e^{\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha) e^{-\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} \right] \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \right. \\
& \quad \times \left\{ e^{(\delta - \gamma)h_g} - e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \left. - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta) e^{(\delta - \gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha) e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} \right. \\
& \quad \left. \times e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta - \gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times \left. e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} \right]^{-1} e^{\delta h_g} - \gamma \Bigg] \\
& \quad \times \left\{ -e^{(\beta - \alpha)h} e^{\alpha z} + e^{\beta x} \right\}
\end{aligned} \tag{B.40}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{sg+}(r, z; r_0) \\
= & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\nu_s r_0}{R}\right)}{2\pi h_g R^2 |J_1(\nu_s)|^2 \left(\left(\frac{\nu_s}{R}\right)^2 + \frac{n_s v \sigma_y}{D_{\perp}} \right)} \\
\times & \left\{ \left[\left(\frac{\{(\alpha - \delta)e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} e^{\alpha h_g} - (\beta - \delta)e^{\beta h_g}\}}{\{(\gamma - \alpha)e^{(\beta - \alpha)h} e^{\alpha h_g} - (\gamma - \beta)e^{\beta h_g}\}} e^{\gamma h_g} \right. \right. \right. \\
& \times \left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{\gamma h_g} - e^{-\gamma h_g}) \\
& - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} \right\} e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} \\
& - \left. \left. \left. \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} \right] \right. \right. \\
& \times \left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \\
& \quad \times \left\{ e^{(\delta - \gamma)h_g} - e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} \\
& - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta - \gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} \\
& - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta - \gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times \left. e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} \right]^{-1} e^{\delta h_g} + \alpha e^{(\beta - \alpha)h} e^{\alpha h_g} - \beta e^{\beta h_g} \Bigg) e^{\gamma z} \\
& + \left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{\gamma h_g} - e^{-\gamma h_g}) \\
& - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} \right\} e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} \\
& - \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} \right\} \times e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} \Bigg] \\
& \times \left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \\
& \quad \times \left\{ e^{(\delta - \gamma)h_g} - e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} \\
& - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta - \gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{(\beta - \alpha)(h - h_g)} \\
& - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta - \gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta - \gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times \left. e^{-(\beta - \alpha)(h - h_g)} \right]^{-1} e^{\delta z} \Bigg] + 1 \Bigg\}
\end{aligned} \tag{B.41}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{sh-}(r, z; r_0) \\
= & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\nu_s r_0}{R}\right)}{2\pi h_g R^2 |J_1(\nu_s)|^2 \left(\left(\frac{\nu_s}{R}\right)^2 + \frac{n_s v \sigma_y}{D_{\perp}} \right)} \\
& \times \left[\frac{(\delta - \gamma)}{(\gamma - \alpha)e^{-(\beta-\alpha)h} e^{-\alpha h_g} - (\gamma - \beta)e^{-\beta h_g}} \right. \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{-\gamma h_g} - e^{\gamma h_g}) \right. \\
& - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& - \left. \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} \right\} e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \right] \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \right. \\
& \quad \times \left\{ e^{-(\delta-\gamma)h_g} - e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \left. \right]^{-1} e^{-\delta h_g} - \gamma \Big] \\
& \quad \times \left\{ -e^{(\beta-\alpha)h} e^{\alpha z} + e^{\beta z} \right\}
\end{aligned} \tag{B.42}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{sg-}(r, z; r_0) \\
= & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\nu_s r_0}{R}\right)}{2\pi h_g R^2 |J_1(\nu_s)|^2 \left(\left(\frac{\nu_s}{R}\right)^2 + \frac{n_s v \sigma_y}{D_{\perp}} \right)} \\
& \times \left\{ \left[\left(\frac{\left\{ (\alpha - \delta)e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} e^{-\alpha h_g} - (\beta - \delta)e^{-\beta h_g} \right\}}{\left\{ (\gamma - \alpha)e^{-(\beta-\alpha)h} e^{-\alpha h_g} - (\gamma - \beta)e^{-\beta h_g} \right\}} \right) e^{-\gamma h_g} \right. \right. \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{-\gamma h_g} - e^{\gamma h_g}) \right. \\
& - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& - \left. \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} \right\} e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \right] \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \right. \\
& \quad \times \left\{ e^{-(\delta-\gamma)h_g} - e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& - \left. \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)}]^{-1} e^{-\delta h_g} + \alpha e^{-(\beta-\alpha)h} e^{-\alpha h_g} - \beta e^{-\beta h_g} \Big) e^{-\gamma z} \\
& + \left\{ \left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{-\gamma h_g} - e^{\gamma h_g}) \right. \\
& - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& - \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} \right\} \times e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \Big\} \\
& \times \left\{ \left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \right. \\
& \quad \times \left\{ e^{-(\delta-\gamma)h_g} - e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \Big\}^{-1} e^{\delta z} \Big] + 1 \Big\} \tag{B.43}
\end{aligned}$$

そして (B.14) の式を用いて、 $\chi(r_0) = \theta(R - r_0)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
& \int_0^R \theta(R - r_0) r_0 J_0 \left(\frac{\nu_s}{R} r_0 \right) dr_0 \\
& = \int_0^R r_0 J_0 \left(\frac{\nu_s}{R} r_0 \right) dr_0 \\
& = \left(\frac{R}{\nu_s} \right)^2 \int_0^{\nu_s} x J_0(x) dx \\
& = \left(\frac{R}{\nu_s} \right)^2 [x J_1(x)]_0^{\nu_s} \\
& = \frac{R^2}{\nu_s} J_1(\nu_s)
\end{aligned}$$

より、 N_i は、次の式で与えられる。

$$\begin{aligned}
& N_{i(sh+)}(E, r, z) \\
& = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2g_i E^{-\gamma_0} J_1(\nu_s) J_0 \left(\frac{\nu_s}{R} r \right)}{|J_1(\nu_s)|^2 \nu_s \left(\left(\frac{\nu_s}{R} \right)^2 + \frac{n_s v \sigma_y}{D_{\perp}} \right)} \\
& \times \left[\frac{(\delta - \gamma)}{(\gamma - \alpha)e^{(\beta-\alpha)h} e^{\alpha h_g} - (\gamma - \beta)e^{\beta h_g}} \right. \\
& \times \left\{ \left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{\gamma h_g} - e^{-\gamma h_g}) \right. \\
& \quad \left. \left. - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} \right\} e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \right\} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta-\gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta-\gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \Big]^{-1} e^{\delta z} \Big] + 1 \Big\} \tag{B.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N_{i(sh-)}(E, r, z) \\
= & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2g_i E^{-\gamma_0} J_1(\nu_s) J_0\left(\frac{\nu_s}{R} r\right)}{|J_1(\nu_s)|^2 \nu_s \left(\left(\frac{\nu_s}{R}\right)^2 + \frac{n_s v \sigma_y}{D_{\perp}} \right)} \\
& \times \left[\frac{(\delta - \gamma)}{(\gamma - \alpha)e^{-(\beta-\alpha)h} e^{-\alpha h_g} - (\gamma - \beta)e^{-\beta h_g}} \right. \\
& \times \left\{ \left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{-\gamma h_g} - e^{\gamma h_g}) \right. \\
& \quad - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& \quad \left. - \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} \right\} e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \right\} \\
& \times \left\{ \left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \right. \\
& \quad \times \left\{ e^{-(\delta-\gamma)h_g} - e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& \quad - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \Big]^{-1} e^{-\delta h_g} - \gamma \Big] \\
& \quad \times \left\{ -e^{(\beta-\alpha)h} e^{\alpha z} + e^{\beta z} \right\} \tag{B.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& N_{i(sg-)}(E, r, z) \\
= & \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2g_i E^{-\gamma_0} J_1(\nu_s) J_0\left(\frac{\nu_s}{R} r\right)}{|J_1(\nu_s)|^2 \nu_s \left(\left(\frac{\nu_s}{R}\right)^2 + \frac{n_s v \sigma_y}{D_{\perp}} \right)} \\
& \times \left\{ \left[\frac{\left\{ (\alpha - \delta)e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} e^{-\alpha h_g} - (\beta - \delta)e^{-\beta h_g} \right\}}{\left\{ (\gamma - \alpha)e^{-(\beta-\alpha)h} e^{-\alpha h_g} - (\gamma - \beta)e^{-\beta h_g} \right\} e^{-\gamma h_g}} \right. \right. \\
& \times \left\{ \left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{-\gamma h_g} - e^{\gamma h_g}) \right. \\
& \quad - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& \quad \left. \left. - \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} \right\} e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \right\} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \right. \\
& \quad \times \left\{ e^{-(\delta-\gamma)h_g} - e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \left. \right]^{-1} e^{-\delta h_g} + \alpha e^{-(\beta-\alpha)h} e^{-\alpha h_g} - \beta e^{-\beta h_g} \Big) e^{-\gamma z} \\
& + \left[\left\{ (\alpha + \beta)\gamma - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} (e^{-\gamma h_g} - e^{\gamma h_g}) \right. \\
& - \left\{ \beta(\gamma - \alpha)e^{-\gamma h_g} - \alpha(\gamma - \beta)e^{\gamma h_g} \right\} e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& - \left\{ \alpha(\gamma - \beta)e^{-\gamma h_g} - \beta(\gamma - \alpha)e^{\gamma h_g} \right\} \times e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \Big] \\
& \times \left[\left\{ (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) - 2\gamma\delta - (\alpha^2 + \beta^2) \right\} \right. \\
& \quad \times \left\{ e^{-(\delta-\gamma)h_g} - e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& - \left\{ (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{-(\beta-\alpha)(h-h_g)} \\
& - \left\{ (\beta - \delta)(\gamma - \alpha)e^{-(\delta-\gamma)h_g} - (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)e^{(\delta-\gamma)h_g} \right\} \\
& \quad \times e^{(\beta-\alpha)(h-h_g)} \left. \right]^{-1} e^{\delta z} \Big] + 1 \Big\} \tag{B.47}
\end{aligned}$$

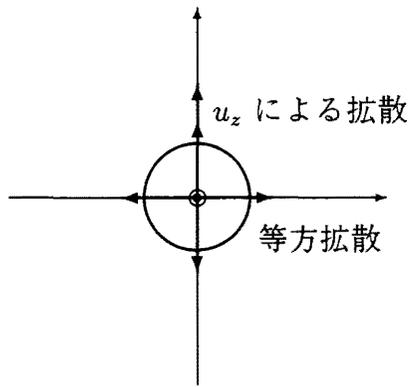


図 B.1: 拡散の方向

参考文献

- [1] 蜂須賀一也 修士学位論文 「確率過程を用いた宇宙線伝播モデルの構築」 弘前大学大学院理学研究科物理学専攻 平成10年2月10日
- [2] 荒木田英禎 修士学位論文 「非一様銀河磁場内での宇宙線の伝播」 弘前大学大学院理学研究科物理学専攻 平成11年2月10日
- [3] 三浦 芳春 修士学位論文 「Random Walk Model による銀河ハローを含む銀河系内宇宙線の伝播」 弘前大学大学院理学研究科物理学専攻 量子論講座 1999年2月10日
- [4] 高橋 郁真 修士学位論文 「銀河系内の磁場乱流による宇宙線の散乱解析」 弘前大学大学院理学研究科物理学専攻 量子論講座 平成12年2月10日
以上4点は、この研究課程で研究代表者が指導教官として指導して出来上がった修士論文。
- [5] 早川幸男「宇宙線 — 自然探求の歩み — 」 筑摩書房
- [6] 林忠四郎、早川幸男 編 宇宙物理学 岩波書店 1978
- [7] シャピロ、他「宇宙線の拡散とその発生源および組成」ライネス編「ジョージ・ガモフ — その業績と思い出」 共立出版
- [8] Berezhinsky V.S. *et.al.* Astrophysics of Cosmic Rays. North-Holland (1990)
- [9] Engelmann, J.J., *et.al.*, 1990, Astron.Astrophys. 233, 96
- [10] Ptuskin V.S., *et.al.* A&A,(1993), 268,726-735
- [11] W. フェラー、河田龍夫 監訳 確率論とその応用 I 上、下 紀伊国屋書店 1960
- [12] Pacheco J. A. D. F., A&A (1971), 13, 58-64