

漸近的平坦な重力レンズの 拡張およびその性質

泉 洗次

平成27年3月10日

目次

第1章 導入	5
1.1 重力レンズ	5
1.2 多重重力レンズ	5
1.3 距離の逆 n べき時空の重力レンズ	6
1.3.1 シア	7
1.3.2 マイクロレンズイメージの光中心	8
1.3.3 時間の遅れと振動数シフト	8
第2章 重力レンズ	10
2.1 重力レンズ	10
2.2 曲がり角	12
2.3 レンズ方程式	14
2.4 増光率	16
2.5 シア	21
2.6 時間の遅れ	25
2.7 振動数シフト	28
2.8 逆 n べき時空	31
第3章 多重重力レンズの摂動論	35
3.1 基礎方程式	35
3.1.1 多重平面のレンズ方程式	35
3.1.2 反復解	36
3.2 像の位置	38
3.2.1 2枚のレンズ平面	38
3.2.2 3枚以上のレンズ平面	41
3.3 N 体レンズによる像	43
3.4 数値計算	44
3.5 結果と考察	45

第4章	新奇な物質による重力レンズシア	47
4.1	重力レンズシア	47
4.1.1	$\varepsilon > 0$ の場合	47
4.1.2	$\varepsilon < 0$ の場合	50
4.2	結果と考察	53
第5章	新奇な物質によるマイクロレンズイメージの光中心	55
5.1	マイクロレンズイメージの光中心	55
5.1.1	光中心	55
5.1.2	数値計算: $\varepsilon > 0$ の場合	56
5.1.3	数値計算 $\varepsilon < 0$ case	57
5.1.4	パラメータ概算	59
5.2	結果と考察	61
第6章	重力凹レンズによる光の負の時間の遅れ	64
6.1	時間の遅れとパルス周波数変移	64
6.1.1	光のシグナルの時間の遅れ	64
6.1.2	パルス周波数変移	68
6.1.3	パルサータイミング法	70
6.2	結果と考察	72
第7章	結論	73
付録A	ダークマターハロー	76
A.1	ダークマターハローの密度分布	76
A.2	重力レンズ	77
A.2.1	質量面密度	77
A.2.2	レンズ方程式	77
A.3	ダークマターハローの光度曲線	80

概要

重力レンズは現代の天文学及び宇宙論において重要な役割を果たしている。系外惑星探査や暗黒物質及び暗黒エネルギーの調査等様々な分野に対して重力を用いた望遠鏡として広く応用されている。

宇宙には多種多様な天体が無数に存在する。その中には直接観測が難しい天体も多数存在する。重力レンズを使うことによってそのような天体でも間接的に観測が可能である。そのためには、銀河等の既知の天体だけでなく、理論上その存在が予言されているダークマターやダークエネルギー等の未知の物質・エネルギーで構成される時空構造の理解が必要である。しかし、これらの時空構造は非常に暗いため、未だ直接観測されておらず、性質や状態、密度分布等の理論予想の検証が困難であり、よく理解されているとはいいがたいのが現状である。

そこで有効になるのが、重力場中の光の軌道（光的測地線）に着目することである。光の軌道は物質やエネルギーのつくる重力場にのみ依存する。よって、物質やエネルギーの性質が不明確であり、また十分な明るさがなくとも、その近辺を通った光を観測することにより、間接的にその存在を発見することが可能であると考えられる。

重力場中を伝搬した光はそうでない光と比べて、観測されたときに様々な変化が見られる。その変化は、(光源の) 像の分離・変形、明るさの変化、または光の到達時間のずれとして現れる。

しかし、重力場中の光の軌道を研究する際に、複雑な密度分布を持つ天体や多数の天体を対象とする場合、次数の高い光の軌道の方程式を取り扱うことになり計算が非常に困難である。また、未知の時空構造を対象とする場合、密度分布等のパラメータやパラメータへの依存性を決める際、任意性を持たせる必要がある。

現在、ある質量分布中を伝搬する光の経路は大規模シミュレーションにより数値的に計算する手法が主流である。しかしこれは、膨大な計算時間や計算コストがかかることや、観測量がモデルのパラメータにどのように依存するかが明らかでない等の問題が存在する。そこで申請者は

それらと違った解析的手法を用いてする研究に取り組み、重力レンズの観測可能量が時空構造のパラメータにどのように依存しているかを明らかにした等、数値計算ではできないような成果を上げてきた。

本論文では以下の三つの研究について述べる。

研究1：多体系による重力場中の光の軌道方程式に対する摂動解法の構築(第3章)

研究2：Schwarzschild 時空やワームホールと呼ばれる時空間トンネルのような構造を持った時空、またそれらをさらに一般化した計量を用いた重力レンズに関する物理量の計算とそれらを発見する手法の立案(第4～6章)

研究1では高次の方程式である多数の天体による重力場中の光の軌道方程式を、ある一つの天体とそれ以外の天体との質量比が微量であるとしてテイラー展開することで、摂動解を導いた。研究1の特色として、複数のレンズ天体間同士の視線方向の距離を違うものとして計算することに成功したことと、レンズ方程式を天体の質量比を展開パラメータとして摂動的に解いたことが挙げられる。本研究の前には複数のレンズ天体と同じ距離にあるとした計算しか行われていなかった。またこの研究は、解析的手法により光の経路を与え、かつ、モデルのパラメータ依存性を明らかにしたという点で特徴的である。

研究2では質量等の時空構造を特徴付けるパラメータを ε 、計量と呼ばれる2点間の距離を表す量において平坦時空からのずれを空間の中心からの距離 r の関数としてを r^{-n} と表し、パラメータやパラメータ依存性に任意性を持たせた時空構造を仮定し田植えて、重力レンズに関する物理量を求めた。結果として、光の曲がり角、像の変形、増光曲線、光中心、時間の遅れといった観測可能量を得た。この時空は、Schwarzschild 時空とエリスワームホールの計量の成分がそれぞれ距離の -1 乗、 -2 乗であることから推定し考案された。研究2の特色は、Schwarzschild 時空やワームホールまたはボイド等を含んだ計量を用いて重力レンズに関する物理量を計算することで様々な時空の性質を包括的に扱うことができるという点である。

第1章 導入

1.1 重力レンズ

重力レンズは現代の天文学及び宇宙論において重要な役割を果たしている [2,3]。宇宙論的な規模での太陽外の惑星から暗黒物質および暗黒エネルギーまで及ぶ様々な分野に対して重力の望遠鏡として広く応用されている [4]。実例として、重力レンズを用いた系外惑星探査の成功が挙げられる [5-9]。Gaudi らはレンズを通して太陽-木星-土星系と類似した系を発見した [10]。近年、重力レンズは宇宙論規模での修正重力理論を制限するために使われている [11]。

1.2 多重重力レンズ

この章では多重平面上での点源による重力レンズを議論する。この時、平面の数は任意とする。このような多重平面の取り扱いは重要である。マイクロレンズの研究では普通、単一平面上の連星レンズを仮定する。その有効性について議論するために、2枚のレンズ平面を考え、後に2つのレンズ平面が融合する極限をとることができる。この方法によって二つのレンズ間の距離によって引き起こされる効果を見積もることができるだろう。別の重要性として宇宙論中の重力レンズが挙げられる。明らかに、異なる赤方偏移と不均質な暗黒物質の銀河は単一平面ではなく多重平面の方法によって記述されなければならない。

レンズとソースのパラメータの関数として像の位置を表すことは長い間挑戦的な問題として存在した [12,13]。多重レンズ方程式を解くために先の単一平面の研究の拡張による質量比を展開パラメータとしたテイラー級数展開の方法を示す [14]。特に、自明でないとして、特異点を備えたレンズ方程式の分母を注意深く研究する。

多重平面レンズ像の数え上げ定理は像の数の下限値はそれぞれの平面上の単一の質点を備えた N 平面において 2^N となることを述べている ([15])

の458ページ)。しかしながらこの定理は像の位置については全く述べていない。従って、そのような像の位置が解析的手法の中でどのように実現されるかを議論することは重要である。

弱場、薄いレンズ近似、微小な曲がり角の三つの仮定の下で、重力レンズは普通、レンズ平面から光源平面への写像として記述される [9]。Bourassa と Kantowski は重力レンズを記述するために複素表示を導入した [16,17]。これらの表示は楕円体、もしくは回転楕円体のレンズを記述するために用いられる [18-20]。

N 体レンズでは、Witt は単一の複素変数の多項式へレンズ方程式を書き直した [21]。この形式は質点レンズの研究においてしばしば使用されている。単一平面上の N 体レンズによる一変数多項式は $N^2 + 1$ の次数を持つ。それにもかかわらず、像の数の最大値は $5(N - 1)$ として知られている [22-25]。これは非物理的な解が多項式に含まれていることを意味している (一般的なレンズシステムでの層状の尖った caustic 近くの像の消失及び出現に関する詳細な議論より [15])。浅田 [14] に次いで、この論文では複素変数形式のレンズ方程式を用いる。これにより、非物理的な解を排除することができる。

1.3 距離の逆 n べき時空の重力レンズ

光の曲がり方は時空の null 構造の研究をする際に非常に役立つ。曲がる角度の厳密な形式は強重力場を正確に理解する際に重要な役割を果たします [31-35]。例として、Schwarzschild ブラックホールの強い重力レンズ効果は、Frittelli と Kling および Newman [31]、および Virbhadra と Ellis [32] によって研究された。また Virbhadra と Ellis [33]、および Virbhadra と Keeton [36] はその後、裸の特異点による強い重力レンズ効果について研究した。Eiroa、Romero および Torres は Reissner-Nordström ブラックホール撮像を扱った [34]。Perlick は、Barriola-Vilenkin モノポールおよびエリスワームホールによる重力レンズについて議論した [35]。

一般相対性理論の特徴の一つとして、ワームホールのような自明でない時空のトポロジーを認めるという点が挙げられる。エリスワームホールはモーリスとソーンの通過可能なワームホールの特殊な例である [37-39]。更に、ワームホールは、物理学のいくつかのエネルギー条件の破れと必然的に関連づけられる [40]。例えば、ダークエネルギーはアインシュタイン方程式の右辺の付加的なエネルギー運動量成分による宇宙の加速膨張

を説明するために導入される。更に、アインシュタイン-ヒルベルト作用に相当するアインシュタイン方程式の左辺はストリング理論、ループ量子重力等に基づいた様々な方法(非線形曲率項、高次元等)により修正される。重力は非線形であるため、時空が漸近的平坦、静的球対称であると仮定した場合であっても、アインシュタイン方程式の左右両辺いずれかの修正は標準的な Schwarzschild 時空と著しく異なる時空となるを解として許すことになる可能性がある。1例として、エリスワームホール(通過可能なワームホール)が挙げられる。

何年も前にワームホール時空に点在する問題は議論された([41,42]等)。興味深いことに、エリスワームホールは無限遠で質量0だが光の偏差を引き起こす[41,42]。さらにエリスワームホールによる重力レンズ効果は近年、新奇な時空の探査で調査された[35,43-50]。エリスワームホールによる曲がり角のいくつかの形式は最近得られ、またしばしば使用され[35,45-48,51,52]、さらにそれらの研究の違いを明確にするための研究も行われた[53,54]。

$f(R)$ 重力理論や4次重力のような修正された重力理論中の重力レンズの微小な変化はこれまで研究されてきた[55-58]。北村らによって重力レンズ中の修正に関するいくつかの研究がなされてきた[59]。彼らは現象論的に、漸近的平坦且つ静的球対称な距離の逆 n べきに依存する修正された時空を仮定した。シュバルツシルト時空とエリスワームホールは $n=1, n=2$ にそれぞれ対応している。さらにこれらの時空は一つのパラメータで表されている。もしこのモデルが標準アインシュタイン方程式の枠組みで解釈されるとするなら、 $n \neq 1$ のとき、時空は非真空であるといえるであろう。

1.3.1 シア

北村らは減光がエリスワームホール($n=2$)を含む $n > 1$ の時生じることを示した[59]。さらのそのような新奇なモデルによる重力マイクロレンズ効果の光度曲線には時間対称の減光部分が現れることも示した。銀河中のマイクロレンズ観測では光度曲線は役立つ。宇宙論的シチューエーションでは、しかしながら、アインシュタインリングは非常に大きくなり、それに従ってタイムスケールも増大するため光度曲線は観測できない。一方、像の分離角は現実的に観測可能なほど十分大きくなる。Sloan Digital Sky Survey Quasar Lens Searchの結果を使用することによって、

高橋と浅田は近年エリスワームホールと負の質量を持った物質の存在量の上限を求めた [60]。理論物理学では、負の質量とは普通の物質の質量の符号とは反対の質量の物質が持つ仮想概念である。にもかかわらず可能な負の質量のアイディアは 19 世紀以降しばしば議論されてきたが、その存在を立証する証拠は発見されていない [61–64]。負の質量は負の質量の固まりを形成するために互いに引きあがるだろう。その結果、そのような固まりはボイドの中に存在するであろう。しかしながら、像の分離角についての情報は新奇のレンズモデルを区別するのに十分ではない。従って、この章では修正された時空によるレンズイメージの形について述べる。

1.3.2 マイクロレンズイメージの光中心

上述のシアは銀河系外、もしくは宇宙論的な距離で起こりうる現象である。よってこの章では銀河系内のマイクロレンズイメージの光中心について述べる。Schwarzschild レンズ像の光中心はたびたび研究されてきた [94–101]。Virbhadra と Keeton [36] は Janis-Newman-Winicour 解を使って裸の特異点の光中心を研究した。

距離の逆 n べき時空の光中心の研究結果は以下の通りである。(1) ある新奇なレンズモデルについては、光源からの光中心は大きな n の場合蝶ネクタイのような曲線を描いて動くであろう。 $n = 1$ なら楕円、 $n = 2$ なら卵形として知られている。(2) 凹面タイプの斥力レンズモデルでは光中心は単純に曲線上を移動しながら光源速度の垂直方向に歪む。一方で Schwarzschild の場合は接線方向に歪む。

1.3.3 時間の遅れと振動数シフト

Shapiro の時間の遅れと呼ばれる Schwarzschild 時空中の光の到着時間の遅れは曲がった時空中の光に対する別の重力効果である。時間の遅れ効果はアインシュタインの理論を検証した [86]。著しい進歩は土星へ向かう途中のカッシーニ衛星のドップラートラッキングによってもたらされた [87]。修正重力モデルでの重力の時間の遅れは弱場近似中の Schwarzschild 時空からの微小なずれを仮定することによって議論されてきた [88]。Virbhadra と Keeton [36]、DeAndrea と Alexander [89] は宇宙検閲官仮説を検証するために裸の特異点による時間の遅れを議論した。強い裸の特異点によ

る時間の遅れは負である。ここで、強い裸の特異点とはいかなる光球にも覆われないものをさす。

従って他の新奇なレンズモデルを理解するために光の時間の遅れを研究することは興味深い。光の放射源が移動する場合、時間の遅れの変化によって周波数変位が引き起こされる。この周波数変位は2点間の時計の違いによる重力赤方偏移とは別物であることに注意する。6.4を見ると、周波数変位は各シグナルの時間の遅れによって引き起こされる。ここでは光源の直線運動を想定する。視線方向に沿った速度成分は、Shapiroの時間の遅れより遥かに大きいと予測されるドップラー効果を主に引き起こす。ドップラー効果は光の固有振動数が演繹的に知られている場合のみ測定することができる。さらに、ドップラーシフトは光源が直線運動するため一定である。一方、速度の横成分はレンズオブジェクトと光線の最近接距離(またはインパクトパラメータ)を変化させる。従ってShapiroの時間の遅れ、及び振動数シフトは時間に依存する。また固有振動数が未知であってもそれらは観測可能である。以降では特に光源平面中の光源の運動に注目する。

実際、カッシーニによって時間の遅れによる振動数シフトが観測された[87]。よってこの論文では到着時間の遅れとそれによって引き起こされる振動数シフトの両方について述べる。特に、新奇な重力レンズ効果を研究するために北村ら[59]によって議論された時空モデルを再検討する。Schwarzschild時空とエリスワームホールはそれぞれ $n=1$, $n=2$ に相当する。このようにこれらの時空は一つのパラメータで表現することができる。このパラメータモデルはあるパラメータ領域のいくつかのエネルギ条件の破れで関連づけられるであろう球状の質量分布を表す。もしモデルが標準アインシュタイン方程式の枠組みの中で解釈されれば、バーコフの定理は $n \neq 1$ の場合非真空であるかもしれないということを表していることに注意する。このレンズモデルはレンズ像の減光[?]、ラディアルシア[70]、変則的な光中心[90]を示唆した。

第2章 重力レンズ

ここでは重力レンズの基礎とそれに伴う現象について述べる。

2.1 重力レンズ

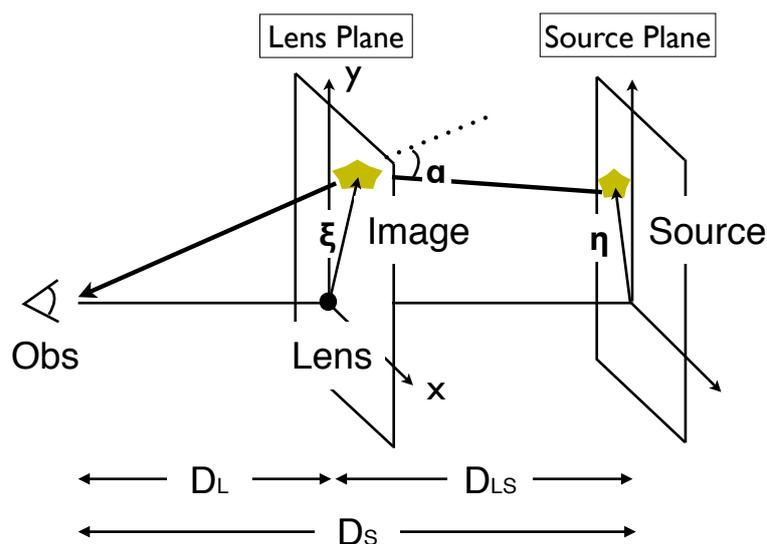


図 2.1:

光源から発せられる光が銀河等の天体 (重力レンズ天体) による重力場を通過した際、その軌道が曲がり観測者に届く。これは時空の計量が重力場により影響を受け、光の軌道がそれに伴い変化したためである。

重力場中を伝搬して観測者に届いた光は、そうでない光と比べ観測されたときに様々な変化が見られる。その変化は、(光源の) 像の分離・変形、明るさの変化、または光の到達時間の変移として現れる。

これを利用した天文学的な応用の一例を挙げる。

1. 太陽系外惑星探査

重力マイクロレンズ効果と呼ばれる光源の増光は、レンズ天体、光源をうまく配置することによって、レンズ天体が地球質量程度の星であっても起こりうる。このことを利用した太陽系外惑星探査が実施されている。しかしこの効果は、一回の観測で惑星を検出できる反面、追試がほぼ不可能という欠点を持っている。また、惑星の軌道半径が小さいと中心の星の増光に隠れてしまうので観測できない。逆に軌道半径が大きすぎると今度は中心の星共々増光する確率が減少してしまう。しかし、暗く地球程度の質量しか持たない星を発見することができるのは非常に大きなメリットと言える。

2. 宇宙の距離指標

強い重力レンズによる多重像はそれぞれ異なる経路を通過しているので、観測者までの到達時間も異なる。天体の光度が時間変動している場合、多重像間の到達時間差を推定することができる。レンズ天体と光源の位置を像の位置や明るさ等から正確に決定することができれば、この時間差の観測からレンズ天体と光源の距離の比 $D_L D_S / D_{LS}$ を求めることができる。この比は宇宙の膨張速度を表す定数であるハッブル定数に依存している、つまりこの比からハッブル定数を推定することができる。

3. 宇宙論パラメータ推定

強い重力レンズ効果が観測される確率はレンズ天体の数に比例し、また宇宙論パラメータの値に強く依存する。観測されている強い重力レンズ現象の頻度を理論予測と比較することで宇宙論パラメータを推定することができる。しかしそのためには銀河数密度とレンズ断面積を正確にもで羽化する必要がある。レンズ断面積とは、レンズ天体となりうる銀河を置いた視線方向に垂直な平面内において、ある範囲内に光源があることによって重力レンズ現象が引き起こされる、その範囲の面積のことである。銀河数密度とレンズ断面積は銀河の進化や質量分布等、現在も研究が進められている諸々の要素にも依存するため不定性がある。

4. 自然の望遠鏡

重力レンズ効果によって曲げられた光は元の光よりも明るく観測さ

れる。従って、本来は暗くて観測が困難な宇宙論スケールの天体であっても、この効果によって観測することが可能である。

5. 銀河系内ダークマター候補天体探査

マイクロレンズ現象を利用して銀河系内のダークマター候補となる天体の一つである (MAssive Compact Halo Object: MACHO) を探査することができる。MACHO とは、白色矮星、褐色矮星、中性子星、ブラックホール等の暗くて見えない天体、もしくは銀河等に付随するハローのことである。

1986 年、プリンストン大学のボードン・パチンスキーは重力マイクロレンズ効果を用いて、我々の銀河を満たしていると思われる $10^{-6} \sim 10^2 M_{\odot}$ (M_{\odot} は太陽質量のこと) のダークマターを検出する方法を考案した [1]。銀河系内の MACHO 天体は静止している訳ではなく、平均的には 200 km/sec 程度の速度でランダムに運動している。それが光源となる天体と地球とを結ぶ線上 (またはごく近傍) を横切る際重力レンズを起こし、1ヶ月程度光源天体がより明るく輝いて見えるはずである。その頻度から逆算し、MACHO 天体の存在量を推定できる。

1990 年代に大マゼラン星雲や我々の銀河を光源天体とするマイクロレンズ探査が始められ、現在までに多数の事象が観測されている。その結果、銀河ハローに存在する MACHO の量は銀河系の見えない質量を全て説明するには足りないことが明らかになっている。

6. ダークマター分布マッピング

強い重力レンズあるいは弱い重力レンズを用いて観測を再現するような天体の質量分布を構築することで、直接は観測できないダークマター分布をマッピングすることができる。

重力レンズの計算を行っていく。まず始めに重力場中を伝搬する光の曲がり角を導き、次に重力レンズ現象を研究する際によく用いられる方程式であるレンズ方程式を導出する。このレンズ方程式を利用して像の分離・変形等の現象について述べる。

2.2 曲がり角

一般的に重力レンズは、観測者と光源の間にある一つのレンズ天体のみ寄与することが多い。このとき光は、レンズ天体の存在する観測者の視

線方向に垂直な平面で不連続に角度 α だけ曲がると近似することができる。この時の曲がり角 $\hat{\alpha}(\xi)$ はレンズ天体の質量分布をレンズ平面に射影することによって得られる。具体的な導出方法は以下の通りである。まず始めに、光線が物質の局所分布と相互作用する間、物質の形状は著しく変形しないものとする。次に、メトリック

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \approx \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) c^2 dt^2 - 8cdt \frac{\mathbf{V} \cdot d\mathbf{x}}{c^3} - \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) d\mathbf{x}^2 \quad (2.1)$$

は静的であると考え、フェルマーの原理を適用する。これは重力場の実効的な屈折率

$$n = 1 - \frac{2U}{c^2} + \frac{4}{c^3} \mathbf{V} \cdot \mathbf{e} \quad (2.2)$$

をもたらす。 $dl = |d\mathbf{x}|$ は弧のユークリッド長さであり、 $\mathbf{e} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dl}$ は光線の単位接線ベクトルである。空間的な光の経路の方程式は変分原理 $\delta \int n dl = 0$ のオイラーラグランジュ方程式に従う。通常ベクトル表記を用いて、

$$\frac{d\mathbf{e}}{dl} = \frac{-2}{c^2} \nabla_{\perp} U + \frac{4}{c^3} \mathbf{e} \times (\nabla \times \mathbf{V}) \quad (2.3)$$

が得られる。 $\nabla_{\perp} U \equiv \nabla U - \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \nabla U)$ は光線方向 \mathbf{e} に直行する平面上の ∇U の射影である。この方程式はヌル測地線

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dv^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \frac{dx^\beta}{dv} \frac{dx^\gamma}{dv} = 0 \quad (2.4)$$

からも求めることができる。クーロン型の寄与はレンズ天体方向の引力に対応する。2番目の項は物体の運動により生じる重力磁場に起因する。これは運動する物体、特に回転体による時空の引きずりと関係がある。しかしこの効果は最初の項と比較して十分に小さいため、(2.6)以降は無視する。

曲がり角 $\hat{\alpha}$ を最初と最後の光線方向の差として

$$\hat{\alpha} = \mathbf{e}_{in} - \mathbf{e}_{out} \quad (2.5)$$

と定義する。式(2.3)から

$$\hat{\alpha} = \frac{2}{c^2} \int \nabla_{\perp} U dl - \frac{4}{c^3} \int \mathbf{e} \times (\nabla \times \mathbf{V}) dl \quad (2.6)$$

を得る。一般的に、光線 $\mathbf{x}(l)$ の2次の非線形微分方程式は解くことができず、また(2.6)は光線に沿って積分しなければならないため、上記の曲がり角の表式はあまり役に立つようには見えない。しかし最も現実的な

条件の下では、曲がり角は非常に小さく、基本的に半径 $d + \delta$ の範囲で生じる。 d はレンズ天体の半径、 δ はレンズ天体と光線の最近接距離である。点源 ($U(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{|\mathbf{x}|}$) の場合、摂動を受けていない光線上で積分すると、 $\mathbf{x}(l) = \boldsymbol{\xi} + l\mathbf{e}$ (インパクトベクトル \mathbf{x}_i は接線ベクトル $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{in}$ に直交する) はアインシュタイン角

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2} \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \quad (2.7)$$

ここで、トータルの曲がり角 $\hat{\alpha}$ が非常に小さいだけでなく、光線の入射方向上にあるレンズ天体の広がり L が、実際の光線上の重力場の強さの値 $\nabla_{\perp} U$ が摂動を受けていない光線上のそれからほんの少ししかずれないほど小さいものとする。つまり、光線の最大偏光 $\Delta S_{max} \sim \hat{\alpha}L$ は場が変化する長さスケールに比べて小さい。

$$|\Delta S_{max} \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} U| \ll |\nabla_{\perp} U| \quad (2.8)$$

この時、摂動を受けていない光線上の (2.6) でまた積分を実行することができる。そのような幾何学的薄レンズによる曲がり角はレンズの質量要素によるアインシュタイン角 (2.7) の合計と等しい。結果的に、 \mathbf{e} に平行な微小な円筒中の全ての質量要素は同じインパクトベクトルを持つ。従って全ての質量要素は \mathbf{e} に垂直な平面状に射影され、曲がり角を表面質量密度 $\Sigma(\boldsymbol{\xi})$ によって特徴付ける。

よって曲がり角は

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbf{R}^2} d^2\xi' \frac{4G\Sigma(\boldsymbol{\xi}')}{c^2} \frac{\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} \quad (2.9)$$

と与えられる。積分はレンズ平面上で行われる。また $\boldsymbol{\xi}$ はこの平面状の2次元ベクトルである。

2.3 レンズ方程式

レンズ方程式は以下のように導出される。光源、レンズ、観測者を図 2.1 のように配置する。このとき、 $\boldsymbol{\eta}$ は光源の位置、 $\boldsymbol{\xi}$ は光のインパクトパラメータ、 D_S, D_L, D_{LS} はそれぞれ、観測者からレンズ、観測者から光源、レンズから光源までの距離である。またレンズと光源を含む観測者の視線方向に垂直な平面をそれぞれレンズ平面、光源平面と呼ぶ。簡単

な幾何学的考察からレンズ方程式は

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{D_S}{D_L} \boldsymbol{\xi} - D_{LS} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.10)$$

となる。このレンズ方程式と曲がり角 (2.9) はレンズ平面から光源平面への射影で表される。この射影は任意の質量分布 $\Sigma(\boldsymbol{\xi})$ で簡単に得られる。この方程式を使うことによって、光源の位置 $\boldsymbol{\eta}$ が与えられた時、像の位置 $\boldsymbol{\xi}$ が得られる。しかし射影 $\boldsymbol{\xi} \mapsto \boldsymbol{\eta}$ は非線形であるため、レンズ方程式を解析的に解くためには質量分布が非常に単純である必要がある。レンズ方程式 (2.10) を角度距離で書き直す。レンズと光源の角度位置をそれぞれ $\boldsymbol{\theta}_S, \boldsymbol{\theta}_I$ とすると、 $\boldsymbol{\eta} = D_S \boldsymbol{\theta}_S, \boldsymbol{\xi} = D_L \boldsymbol{\theta}_L$ となる。よってレンズ方程式 (2.10) は

$$\boldsymbol{\theta}_S = \boldsymbol{\theta}_I - \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\theta}_I) \quad (2.11)$$

と書き直せる。

レンズ方程式 (2.10) を無次元化する。レンズ平面上と光源平面上の長さスケールをそれぞれ ξ_0, η_0 とすると、 $\eta_0 = \xi_0 D_S / D_L$ という関係がある。これらを用いて無次元ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\xi_0}, \quad \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\eta_0} \quad (2.12)$$

を定義する。同様にして無次元化された表面質量密度は

$$\kappa(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\Sigma(\xi_0 \boldsymbol{\xi})}{\Sigma_{cr}} \quad (2.13)$$

となる。臨界表面質量密度 Σ_{cr} は光源が重力レンズを起こすためにレンズ面で必要となる典型的な面密度の値を与える。これは

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2 D_S}{4\pi G D_L D_S} \approx 1.7 \times 10^{15} \left(\frac{1 \text{ Gpc}}{D_L D_{LS} / D_S} \right) M_\odot \text{ Mpc}^{-2} \quad (2.14)$$

で与えられる。

これらの定義を用いてレンズ方程式 (2.10) と曲がり角 (2.9) を無次元化すると

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) \quad (2.15)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}^2} d^2 x' \kappa(\boldsymbol{x}') \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^2} = \frac{D_L D_{LS}}{\xi_0 D_S} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\xi_0 \boldsymbol{x}) \quad (2.16)$$

となる。また曲がり角 α は、恒等式 $\nabla \ln |\mathbf{x}| = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$ よりレンズポテンシャル ψ を使って

$$\alpha = \nabla \psi \quad (2.17)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}^2} d^2 x' \kappa(\mathbf{x}') \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (2.18)$$

と表せる。このことからレンズ方程式 (2.15) は

$$\mathbf{y} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^2 - \psi(\mathbf{x}) \right) \quad (2.19)$$

と書き直せる。またレンズポテンシャル ψ と表面質量密度 κ の関係式 (2.18) は恒等式 $\Delta \ln |\mathbf{x}| = 2\pi \delta^2(\mathbf{x})$ を使うことによって

$$\Delta \psi = 2\kappa \quad (2.20)$$

が得られる。この式より、表面質量密度が与えられるとレンズポテンシャルを決定することができる。ここで δ^2 は2次のデルタ関数で、 Δ は \mathbf{x} に関するラプラシアンである。

レンズ方程式 (2.15) を複素変数を用いて書き直すこともできる。 $x_c = x_1 + ix_2, y_c = y_1 + iy_2$ とすると、

$$y_c = x_c - I_c^*(x_c) \quad (2.21)$$

$$I_c = \frac{1}{\pi} \int_C \kappa(x'_c) \frac{1}{x_c - x'_c} d^2 x' \quad (2.22)$$

となる。複素形式は、与えられた質量密度分布からの曲がり角の計算は不自明だが、複素積分理論が解析的な結果に結びつく場合に用いられる。

2.4 増光率

光束が受ける重力の影響の強さは光束の両端で異なる。このことから、重力による光の曲がり観測される光源を複数の像に分裂・変形させるだけでなく、光源の像の特性にも影響を及ぼす。特に像のフラックスは光束の断面積が重力によって歪められるため影響を受ける。光子数が保存されることから、像のフラックスはこの領域の歪みによって決定される。

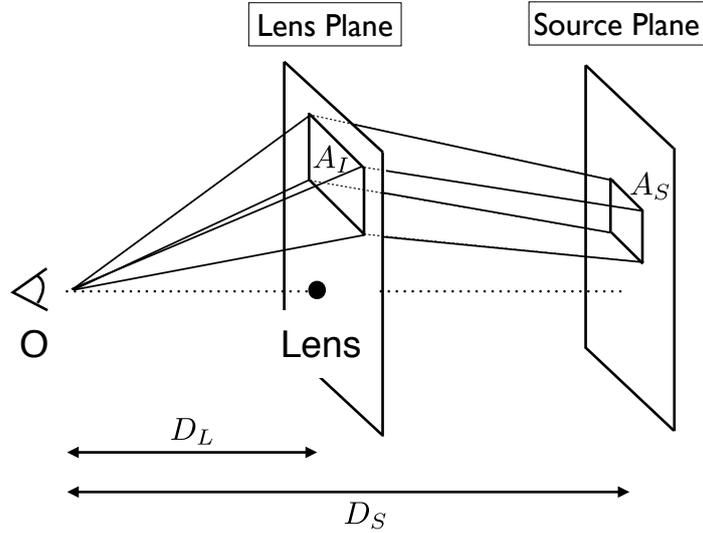


図 2.2: 光源に対する立体角の歪みを模した図。光源は領域 A_S を持つ。レンズがない場合の立体角 $d\omega^* = A_S/D_S^2$ であり、レンズがある場合の立体角は $d\omega = A_L/D_L^2$ である。光源の明るさは立体角 $d\omega$ に比例して増光される。

天球面上の立体角 $d\omega^*$ に対する面輝度 I_ν を持つ微小光源を考える。光源からのフラックスは

$$S_\nu^* = I_\nu d\omega^* \quad (2.23)$$

となる。もし光束が重力の影響を受けるならば、像の立体角 $d\omega$ は $d\omega^*$ とは異なるだろう。重力レンズ現象では振動数 ν または面輝度 I_ν は変わらないので、観測される像のフラックスは

$$S_\nu = I_\nu d\omega \quad (2.24)$$

従って重力レンズ現象は因子

$$|\mu| = S_\nu/S_\nu^* = d\omega/d\omega^* \quad (2.25)$$

による観測された像のフラックスの変化を引き起こす。

(2.12) において $\xi_0 = D_d$ の場合、 \mathbf{x}, \mathbf{y} はそれぞれ角度位置 θ, β と等し

い。従って、立体角の比 (2.25) は

$$\frac{dw}{dw^*} = \frac{d^2\theta}{d^2\beta} \quad (2.26)$$

によって与えられる。このことから増光因子 $|\mu|$ はヤコビ行列によって与えられる。レンズ方程式のヤコビ行列 (2.15) は

$$A(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\boldsymbol{\theta}}, \quad A_{ij} = \frac{\partial(\beta_1\beta_2)}{\partial(\theta_1, \theta_2)} \quad (2.27)$$

によって定義される。増光因子 μ はレンズを受けた像のフラックスと受けていない像のフラックスの比によって

$$\mu(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\det A(\boldsymbol{\theta})} = \left| \det \frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial\boldsymbol{\theta}} \right|^{-1} \quad (2.28)$$

と与えられる。光源は因子 $|\mu(\boldsymbol{x})|$ によって明るく、もしくは暗くなる。もし光源がいくつかの像に写像される場合、それぞれの増光因子の比率は像のフラックス比と等しい。

次に、増光率の一例として Schwarzschild レンズの場合を計算する。像の位置 θ_+, θ_- はそれぞれ

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{4 + \beta^2} \right) \quad (2.29)$$

である。二つの像に対する増光率は (2.28) より、

$$\begin{aligned} \mu_{\pm} &= \left| \frac{\theta_{\pm} d\theta_{\pm}}{\beta d\beta} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\beta} (\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4}) \times \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4}} \right) \right| \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{1 + 4/\beta^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + 4/\beta^2}} \pm 2 \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

と計算される。相加相乗平均の関係より、レンズ天体の中心に対して光源と同じ方向にある像 θ_+ は必ずもとの光源より明るくなる ($\mu_+ > 1$) ことがわかる。また $\beta \rightarrow 0$ では増光率が発散し、像はリング状となる。

レンズ天体が軽く重力が弱い場合、像は二つに分離できず、一つの像として観測される。この場合光源は全増光率

$$\mu_{tot} = \mu_+ + \mu_- = \frac{1}{2} \frac{2 + 4/\beta^2}{\sqrt{1 + 4/\beta^2}} = \frac{\beta^2 + 2}{\beta\sqrt{\beta^2 + 4}} \quad (2.31)$$

として観測される。

次にマイクロレンズの光度曲線について考察する。光度曲線とは横軸に時間、縦軸に光度変化をとった、光源の明るさの時間変化を示す図である。まず観測者から見たときレンズ天体が常に原点となるような2次元座標系を選ぶ。レンズ天体に対する光源の相対速度を v_l とする。対応する角速度は $u_L = v_L/D_L$ レンズ天体は点レンズで近似する。光源とレンズ天体の最近接時間を t_0 とする。この時の角度を β_0 とおくと、時刻 t における光源とレンズ天体のなす角度は図 2.3 より

$$\beta(t) = \sqrt{\beta_0^2 + u_L^2(t - t_0)^2} \quad (2.32)$$

で与えられる。(2.31) より、この角度に対応する増光率 $\mu(t)$ は

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{\beta_E(t)^2 + 2}{\beta_E(t)\sqrt{\beta_E(t)^2 + 4}} \\ \beta_E(t) &= \frac{\beta(t)}{\theta_E} = \sqrt{\left(\frac{\beta_0}{\theta_E}\right)^2 + \frac{\pi\Sigma_C v_L^2}{M}(t - t_0)^2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

となる。銀河系内の MACHO によって大マゼラン星雲 (LMC) 内の星がマイクロレンズを受ける場合、典型的なパラメータ

$$v_L \approx 200[km/s]$$

$$D_L \approx 10[kpc]$$

$$\Sigma_C = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_S - D_L} \approx 3 \times 10^4 \left(\frac{10[kpc]}{R}\right) [g/cm^3]$$

$$\theta_E = \frac{1}{D_L} \sqrt{\frac{M}{\pi\Sigma_C}} \approx 0.3 \sqrt{\frac{M}{0.1M_\odot}} \sqrt{\frac{10[kpc]}{R}} [\text{ミリ秒角}]$$

$$\Delta t_{EL} \equiv \frac{\theta_E}{u_L} \approx 20 \sqrt{\frac{M}{0.1M_\odot}} \sqrt{\frac{R}{10[kpc]}} \left(\frac{200[km/s]}{v_L}\right) [\text{日}] \quad (2.34)$$

を考えると図 2.4 のような光度曲線を得ることができる。

Schwarzschild レンズのような通常の物質による重力レンズは増光するが、ワームホール等の新奇な物質による重力レンズでは減光する可能性もある ([59] 参照)。

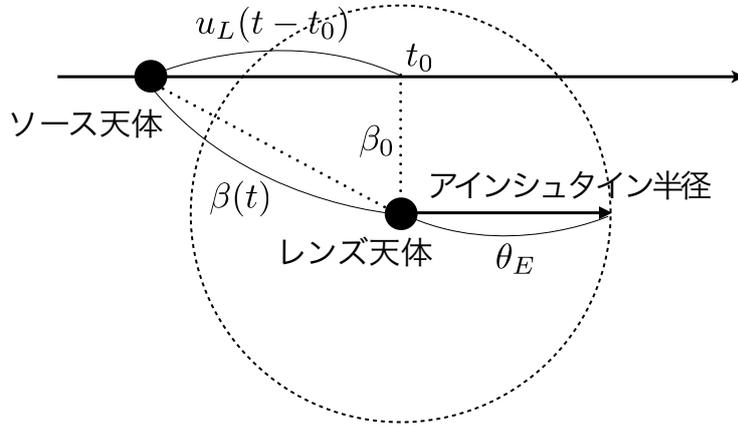


図 2.3: マイクロレンズにおけるレンズ天体と光源の相対運動

ある特定の x では行列式 A は 0 になり、 μ は発散する。そのような点のことを critical points と呼ぶ。それに対応する光源の位置 y は caustics と呼ぶ。このような発散は幾何光学近似が critical points の付近でうまくいかないことを示す。また増光率の発散はある二つの事実から、光源の像が無限に明るくなるということの意味しない。一つ目は現実の光源は拡大される点である。そのような光源では増光率は (2.28) の加重平均である。このことは増光率が常に有限であることを示す。2 番目は、たとえ光源が点状であっても増光率は無限ではない点である。これまでこの論文では幾何光学近似中の光の伝搬を扱ってきた。この近似は重力レンズを研究するにあたって非常に有効である。光源は干渉効果のために非現実的なほど小さくしなければならない。しかし光源を仮想的に点源とおいても、critical curve 上の像の最大増光率は波動効果のために有限である。

レンズ写像の critical curve はそれらの性質の定性的理解のために非常に重要である。critical curve の像について考察する。観測者とレンズの位置が与えられると、像の数は一般的に光源の位置によって異なる。像の数は光源が caustic を横切ることによって変化する。交差の方向によって反対のパリティを持った二つの像は一つに融合、もしくは現れる。融合する直前、像は critical curve 付近に現れるため非常に明るい。

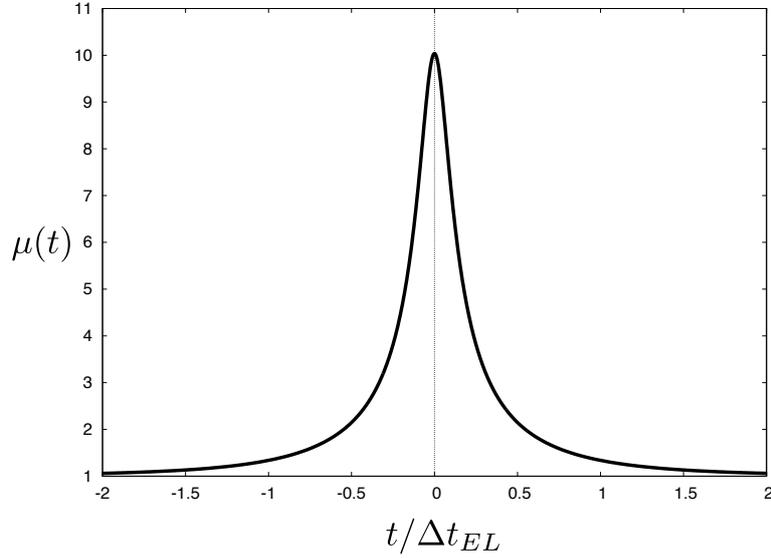


図 2.4: マイクロレンズの光度曲線。 $\beta_0/\theta_E = 0.1$ の場合。 Δt_{EL} はアインスユタインリング半径をレンズ天体が横切る時間スケール。

caustics の位置が知られているのなら、前述の性質を用いることによって像の数の依存性を決定することは簡単である。レンズが有限の質量を持った任意の透明な質量分布であるとする、点源の像の数はレンズと光源の位置が十分ずれている場合一つである。

2.5 シア

重力レンズ効果によって引き起こされる像の形状の変化とその変化率について述べる。レンズポテンシャルを用いてヤコビ行列 (2.27) を表すと

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \psi_{ij} \quad (2.35)$$

と書き表せる。この表式からわかるようにヤコビ行列 A は対称である。面密度とレンズポテンシャルの関係からヤコビ行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$$\kappa = \frac{1}{2}(\psi_{11} + \psi_{22}) \quad ; \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}) \quad ; \quad \gamma_2 = \psi_{12} = \psi_{21} \quad (2.37)$$

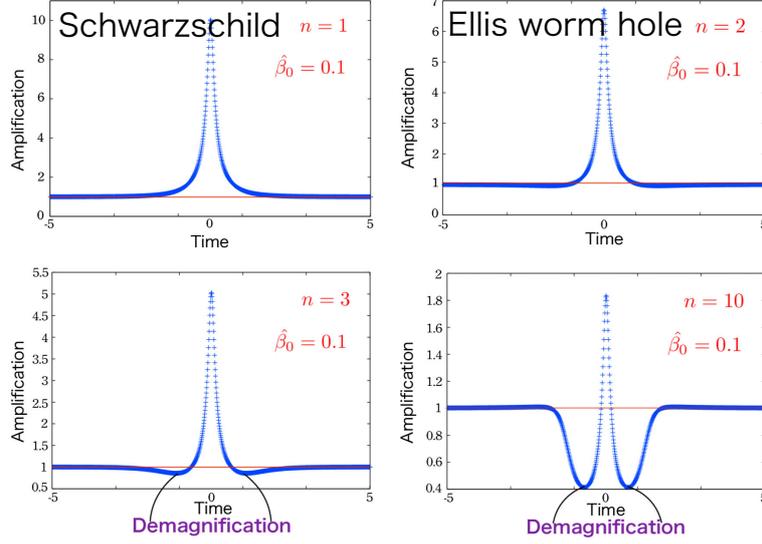


図 2.5: 距離の逆 n べき時空の重力レンズによるマイクロレンズの光度曲線 ([59] 参照)。

次に具体的なコンバージェンスとシアを計算してみる。本論文では特に円対称レンズ天体を取り扱うため、円対称レンズの場合のコンバージェンスとシアを計算する。コンバージェンスについてはレンズポテンシャルと面密度の関係式から

$$\kappa = \frac{1}{2}(\psi_{11} + \psi_{22}) = \frac{\Sigma(\theta)}{\Sigma_c} = \frac{1}{2\pi\Sigma_c\theta} \frac{d\tilde{M}(<\theta)}{d\theta} \quad (2.38)$$

を得る。シアについても同様に計算すると、

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2}(\psi_{11} - \psi_{22}) \\ &= \frac{1}{2\pi\Sigma_c} \left[\frac{\partial}{\partial\theta_1} \left(\frac{\theta_1\tilde{M}(<\theta)}{\theta^2} \right) - \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left(\frac{\theta_2\tilde{M}(<\theta)}{\theta^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\Sigma_c} \left[\frac{-2\theta_1^2 + 2\theta_2^2}{\theta^4} + \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2}{\theta^3} \frac{d\tilde{M}(<\theta)}{d\theta} \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

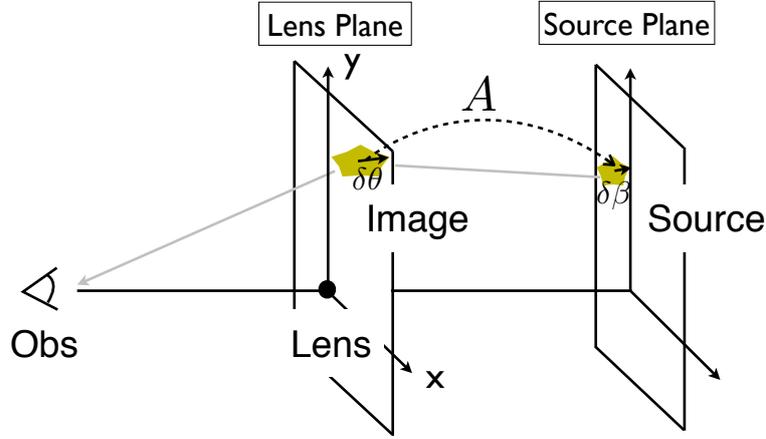


図 2.6: レンズの変換行列の模式図

$$\begin{aligned}\gamma_2 = \psi_{12} &= \frac{1}{\pi\Sigma_2} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \left(\frac{\theta_1 \tilde{M}(<\theta)}{\theta^2} \right) \\ &= \frac{1}{\pi\Sigma_c} \left(\frac{-2\theta_1\theta_2}{\theta^4} \tilde{M}(<\theta) + \frac{\theta_1\theta_2}{\theta^3} \frac{\partial\tilde{M}(<\theta)}{\partial\theta} \right)\end{aligned}\quad (2.40)$$

ここで $\theta = (\theta \cos \phi, \theta \sin \phi)$ とおき、

$$\gamma \equiv \frac{1}{\pi\Sigma_c} \left(\frac{1}{2\theta} \frac{d\tilde{M}(<\theta)}{d\theta} - \frac{\tilde{M}(<\theta)}{\theta^2} \right)\quad (2.41)$$

と定義することによって、シア (2.39),(2.40) が、

$$\gamma_1 = \gamma \frac{\theta_1^2 - \theta_2^2}{\theta^2} = \gamma \cos 2\phi\quad (2.42)$$

$$\gamma_2 = \gamma \frac{2\theta_1\theta_2}{\theta^2} = \gamma \sin 2\phi\quad (2.43)$$

にまとめることができる。

シア (2.42),(2.43) より、円対称レンズに対するヤコビ行列 (2.36) は

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma \cos 2\phi & -\gamma \sin 2\phi \\ -\gamma \sin 2\phi & 1 - \kappa + \gamma \cos 2\phi \end{pmatrix}\quad (2.44)$$

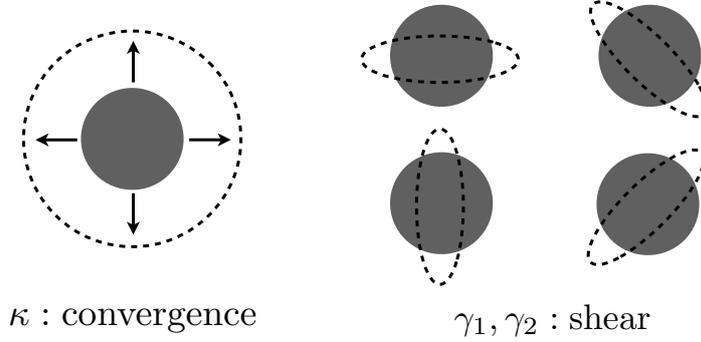


図 2.7: コンバージェンスとシアの模式図

と書くことができる。このヤコビ行列の固有値と固有ベクトルは

$$\lambda_- = 1 - \kappa - \gamma = 1 + \frac{1}{\pi\Sigma_c} \left(\frac{\tilde{M}(<\theta)}{\theta^2} - \frac{1}{\theta} \frac{d\tilde{M}(<\theta)}{d\theta} \right) \quad (2.45)$$

$$w_- = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$\lambda_+ = 1 - \kappa + \gamma = 1 - \frac{1}{\pi\Sigma_c} \frac{\tilde{M}(<\theta)}{\theta^2} \quad (2.47)$$

$$w_+ = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

と得られる。このことから

$$U \equiv (w_-, w_+) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

を用いるとヤコビ行列 (2.44) は

$$A' = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

と対角化される。

U は座標系を角度 ϕ だけ回転させる行列であるから、別の座標系に移

ると

$$\delta\theta' = U^{-1}\delta\theta, \quad \delta\beta' = U^{-1}\delta\beta, \quad (2.51)$$

$$\delta\beta' = A'\delta\theta' = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \theta', \quad (2.52)$$

$$\delta\theta' = A'^{-1}\delta\beta' = \begin{pmatrix} 1/\lambda_- & 0 \\ 0 & 1/\lambda_+ \end{pmatrix} \beta' \quad (2.53)$$

この結果は、光源を単位円とすると、像はレンズ天体の方向 (タンジェンシヤル方向) に $1/|\lambda_+|$ 、それと直行する方向 (ラディアル方向) に $1/|\lambda_-|$ の楕円となることを示す。

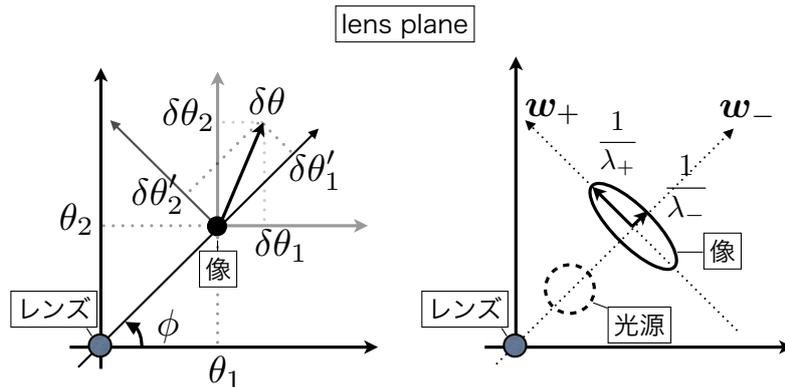


図 2.8: レンズ面の回転と像の変形

2.6 時間の遅れ

この節では重力レンズによる光の到着時間の遅れについて述べる。重力場中を通過した光とそうでない光とでは観測者までの到着時間に差が生まれる。このような重力レンズ像の時間の遅れは様々な観測可能量の中で唯一次元を持った量である (像の分離角、レッドシフト、輝度比、拡大された像のアライメントは無次元)。この事実の重要性は以下の例によっ

て説明される：全ての距離が2倍であること以外は全く同一の二つのレンズ幾何について考える。それぞれの観測者が観測する分離角とフラックス比はそれぞれ等しくなるだろう。またどんな像のペアであっても時間の遅れは2番目のケースが2倍となる。従って時間の遅れは、少なくとも原理的には、重力レンズシステムの全長スケールを決定することを可能にする。

単一の光源が重力レンズによって二つ以上の像に分離する場合、異なった経路に沿った光の飛行時間は一般的には異なる。これは光の飛行時間に寄与する二つの効果によるものである。まず始めに、レンズによって光線は曲げられる。曲げられた光は幾何学的に直線よりも長い。このように幾何学的に時間の遅れは生じる。次に、光はレンズ天体の重力場を通過する。弱場近似での計量から、光がユークリッド長さ dl を横切る座標時間は

$$cdt \approx (1 - 2U)dl \quad (2.54)$$

である。 U はニュートンポテンシャルである。これがポテンシャルによる時間の遅れである。

次に時刻 $t = 0$ で光が光源から放射され、レンズ付近のディフレクションポイント I に直進し、そこから観測点 O へ向かう状況を考える。この時、時間の遅れは (2.54) より

$$t = c^{-1} \int \left(1 - \frac{2U}{c^2}\right) dl = c^{-1}l - 2c^{-3} \int U dl \quad (2.55)$$

となる。 l は経路 SIO のユークリッド長さである。また、ポテンシャル項は経路に沿って積分される。この時間の遅れは実際、太陽系において 10^{-3} の精度で立証されている。図 (2.9) より、

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})^2 + D_{LS}^2} + \sqrt{\boldsymbol{\xi}^2 + D_L^2} \\ &\approx D_{LS} + D_L + \frac{1}{2D_{LS}}(\boldsymbol{\xi}^2 - \boldsymbol{\eta}^2) + \frac{1}{2D_L}\boldsymbol{\xi}^2 \end{aligned} \quad (2.56)$$

である。

ポテンシャル項を定義するため、まず始めに、光源 S から観測者 O までの光線に沿った、レンズ平面の原点に置いた点源のポテンシャルの積分を見積もる。結果として、

$$\int_S^I U dl = GM \left[\ln \frac{|\boldsymbol{\xi}|}{2D_{LS}} + \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|D_{LS}} + O\left(\left(\frac{\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi}}{D_{LS}}\right)^2\right) \right] \quad (2.57)$$

が得られる。レンズが起こる条件下では、

$$\int_S^I U dl = GM \ln \frac{|\boldsymbol{\xi}|}{2D_{LS}} \quad (2.58)$$

と近似される。 $\boldsymbol{\eta}$ の依存性は無視してよい。ここで D' がインパクトパラメータ $|\boldsymbol{\xi}|$ より大きいが D_{LS} より小さいパラメータであるとする、上記の最後の表式は

$$GM \left(\ln \frac{|\boldsymbol{\xi}|}{2D'} + \ln \frac{D'}{D_{LS}} \right) \quad (2.59)$$

と分解される。最初の項はレンズ平面上の厚さ D' の板の中の光線に起因している。また2番目の項はその板の外側の光に起因している。最初の項のみ、 $\boldsymbol{\xi}$ に依存するレンズのサイズ D' の付近で生じる。

イメージ I から観測者 O までの光線の同様の項を上記の結果に加え、(2.59)と同様にそれを分解し、質量分布中の U の線形性を使って、ポテンシャルによる時間の遅れが

$$\frac{-2}{c^3} \int U dl = \frac{-4G}{c^3} \int d^2\xi' \Sigma(\boldsymbol{\xi}') \ln \frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|}{D'} + const \quad (2.60)$$

と得られる。当然、 D' は任意の長さスケール ξ_0 で置き換えられる。宇宙論への拡張のためにそれは重要であるが、(2.60)の右辺の最初の項はレンズ付近で生じる局所的な効果を表す。

幾何的、ポテンシャル的な時間の遅れを加え、 S から O のレンズの影響を受けていない光線の到着時間を引くと、運動学的に可能な光線の時間の遅れを

$$c\Delta t = \hat{\phi}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + const \quad (2.61)$$

と得る。フェルマーポテンシャル $\hat{\phi}$ は

$$\hat{\phi} = \frac{D_L D_S}{2D_{LS}} \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{D_L} - \frac{\boldsymbol{\eta}}{D_S} \right) - \hat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.62)$$

によって与えられる。レンズポテンシャル $\hat{\psi}$ は

$$\hat{\psi} = \frac{4G}{c^2} \int d^2\xi' \Sigma(\boldsymbol{\xi}') \ln \left(\frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|}{\xi_0} \right) \quad (2.63)$$

で与えられる。

フェルマーの原理より、時間の遅れはレンズ天体の位置 $\boldsymbol{\xi}$ に関して定常である。つまり

$$\frac{\partial(\Delta t)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.64)$$

である。これを利用して

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{D_S}{D_L} \boldsymbol{\xi} - D_{LS} \hat{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.65)$$

を得る。これはレンズ天体が与えられたときの光源と像の関係である。曲がり角

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \nabla \hat{\psi} \quad (2.66)$$

が以前得られた (2.9) と一致しているのがわかる。

フェルマーポテンシャルを使ってレンズ方程式は

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \hat{\phi}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad (2.67)$$

と簡略化させることができる。光源 $\boldsymbol{\eta}$ の二つの像 $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}$ の到着時間の差 (時間の遅れ) は

$$c(t_1 - t_2) = \hat{\phi}(\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\eta}) - \hat{\phi}(\boldsymbol{\xi}^{(2)}, \boldsymbol{\eta}) \quad (2.68)$$

と表される。 $(t_1 - t_2)$ は光線が観測者に届くまでの座標時間の差である。対応する固有時間の差は、 $(t_1 - t_2)$ に $1 + U_0/c^2$ を掛けることによって得られる。これは地球上では $U_0/c^2 \approx 10^{-9}$ であるから重力レンズの応用とは実際無関係である。

2.7 振動数シフト

波数ベクトル k^α を使った測地線の方程式

$$k_{;\beta}^\alpha k^\beta = 0 \quad (2.69)$$

は 4 元速度 u_S^α を持った点源 S と 4 元速度 u_O^{alpha} を持った観測者 O の間の振動数シフトの計算を可能にする。 ω の定義式

$$\omega = -\frac{dS}{d\tau} = -S_{,\alpha} u^\alpha = k_\alpha u^\alpha \quad (2.70)$$

と位相の変化 dS は光源と観測者では同じであるという事実から

$$\frac{\omega_O}{\omega_S} = \frac{(k_\alpha u^\alpha)_O}{(k_\beta u^\beta)_S} = \frac{d\tau_S}{D\tau_O} \equiv \frac{1}{1+z} \quad (2.71)$$

を得る。 k_O^α は k_S^α を S と O を結ぶ光線に沿って平行に運ぶことによって得られる。S と k_α のスケールをかえても (2.71) は変わらない。よって振動数シフトは振動数、もしくは波長にのみ依存する (ドップラーと重力の

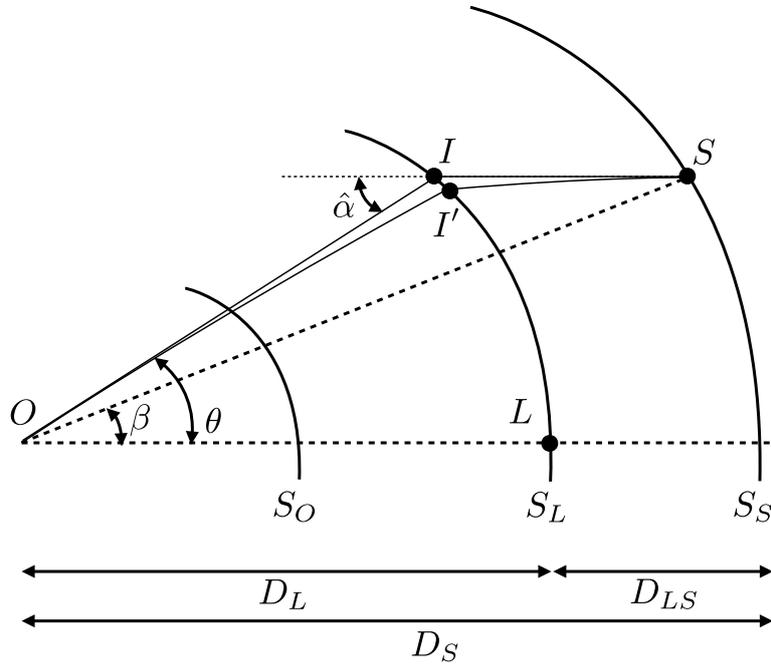


図 2.9: 一般的な重力レンズの模式図。L はレンズの中心である。L と観測者 O を通る直線は光軸である。β は光源 S の位置角である。光源からの光線 S'I'O は角度 $\hat{\alpha}$ で曲げられている。これにより光源の像は位置 β で観測される。全ての角度は微小のため、実際の光線は近似的に SIO に、光源とレンズ球面は平面とすることができる。

項の分離は単なる習慣で、一般相対論では本質的な意味を持たない。S と O の間の同時刻における計量は重力場と相対速度で決まる)。

計量が定常である (重力ポテンシャルの要素 $g_{\alpha\beta}$ が 4 つの座標に依存する全体のスケールファクター Ω^2 を除いた時間座標 t に依存するような座標系 (t, x^α) を認める) 時空中では、 $g_{\alpha\beta}(t, x^\alpha) = [\Omega(t, x^\alpha)]^2 h_{\alpha\beta}(x^\alpha)$ である。

(2.70) より、共動観測者 O での放射の角振動数は

$$\omega_O = \frac{\partial S}{\partial t} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)_O = \frac{\tilde{\omega}}{\Omega(t, x_O^\alpha) \sqrt{h_{tt}(O)}} \quad (2.72)$$

である。 h_{tt} は観測者 O の位置 x_O^α での $h_{\alpha\beta}$ の tt 成分の値である。同様の定式化を光源にも適用できることから、振動数比は

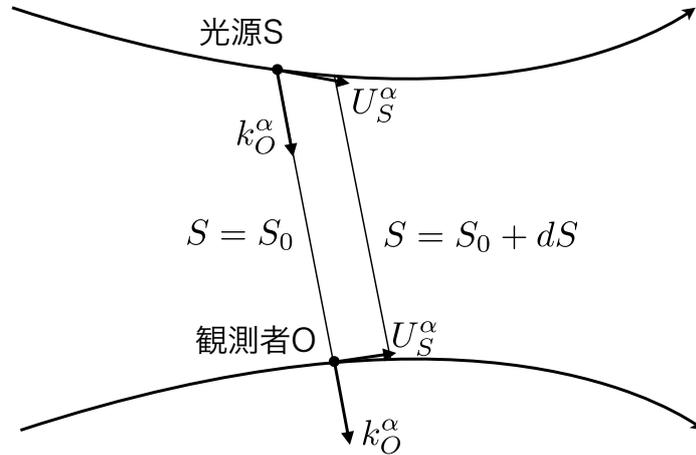


図 2.10: 振動数シフトの模式図。光源と観測者の世界線を繋ぐ二つの光線。位相は光線上では一定である。それは二つの固有時間間隔 $d\tau_S, d\tau_O$ の関係式 $k_{;\beta}^\alpha k^\beta = 0$ を構築する。

$$\frac{\omega_O}{\omega_S} = \frac{\Omega(t_S, x_S^\alpha)}{\Omega(t_O, x_O^\alpha)} = \sqrt{\frac{h_{tt}(S)}{h_{tt}(O)}} \quad (2.73)$$

もし共動光源と共動観測者を結ぶ複数本の光線がある時、光源の二つの像の振動数比は、光が光源から放射され同時に観測者に到着したときの時間のスケールファクターの変化により (2.73) の対応する Ω 比が異なる場合のみ違いが現れる。 Ω がこの時間遅れの間明らかに変化しない場合、異なる像の振動数比は等しい。これらの比率は光線の経路ではなく光源と観測者のイベントでのみ決定される。光源と観測者が共動でない場合、振動数シフトは局所ドップラーによって修正されなければならない。これは現実的に考えうるケースの全ての像に対し適用される。

2.8 逆 n べき時空

この節では逆 n べき時空について説明する [59]。数ある修正重力理論に基づき現代論的な観点から、この論文では、漸近的平坦、静的球対称の修正時空が弱場近似中で距離の逆 n べきに依存すると仮定する。Schwarzschild 時空とエリスワームホールはそれぞれ $n = 1, n = 2$ に対応する。ここで注意すべき点として、時空が標準アインシュタイン方程式の枠組みの中で解釈された場合、バーコフの定理より $n \neq 1$ ではこの時空は非真空である。

全体の時空はより高次元かもしれないが、ここでは 4 次元時空中を伝搬する光を考える。4 次元時空の計量は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{r^n}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{r^n}\right) dr^2 + r^2(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\phi^2) + O(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1 \varepsilon_2), \quad (2.74)$$

と表される。ここで r は半径、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は微小なパラメータである。 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は正負の値をとりうる。両方とも負で、かつ $n=1$ のとき、この計量は質量が負の Schwarzschild 時空の計量をあらわす。

光の伝搬を研究するために、因子 $(1 - \varepsilon_1/r^n)^{1/2}$ を用いて共形変換を施すことは有用である。ヌル構造は共形変換による影響を受けない。 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の線形オーダーでは、時空の計量は単に

$$d\bar{s}^2 = -dt^2 + \left(1 + \frac{\varepsilon}{R^n}\right) dR^2 + R^2(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\phi^2) + O(\varepsilon^2) \quad (2.75)$$

と書ける。 $\varepsilon \equiv n\varepsilon_1 + \varepsilon_2$,

$$R^2 \equiv \frac{r^2}{\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{r^n}\right)} \quad (2.76)$$

である。パラメータ ε のみが共形変換されたメトリックに影響する。

この計量では質量 0 の粒子でのラグランジアンが得られる。球対称であるため、一般性を損なわず、赤道平面 $\theta = \pi/2$ を選ぶことができる。時間的回転キリングベクトルに関連する運動の定数を使うことによって、光の曲がり角は線形オーダーで

$$\alpha = 2 \int_{R_0}^{\infty} \frac{d\phi(R)}{dR} dR - \pi = \frac{\varepsilon}{b^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \psi d\psi + O(\varepsilon^2) \quad (2.77)$$

となる。 R_0, b はそれぞれ光線の最近接距離、インパクトパラメータを意味する。この曲がり角は $n = 1$ で Schwarzschild、 $n = 2$ でエリスワーム

ホールとなる。特定のケースでは上記の積分は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \psi d\psi &= \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} \quad (\text{even } n) \\ &= \frac{(n-1)!!}{n!!} \quad (\text{odd } n) \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{2 \Gamma(\frac{n+1}{2})} \quad (\text{real } n > 0)\end{aligned}\quad (2.78)$$

と計算される。また曲がり角は積分をパラメータ ε に吸収させ、単に

$$\alpha(b) = \frac{\bar{\varepsilon}}{b^n} \quad (2.79)$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \psi d\psi \quad (2.80)$$

と書くこともできる。ここで $\bar{\varepsilon}$ の符号は ε と同じである。この曲がり角は Schwarzschild($n=1$) や、エリスワームホール ($n=2$) 等を表すことにもなる。 $\varepsilon > 0$ では曲がり角は常に正となり、これは対応する時空が光に対し凸レンズのように引力を働かせることに対応する。それに対し $\varepsilon < 0$ では曲がり角は必ず負となり、必然的に対応する時空が光に対し凹レンズのように斥力を働かせる。以降では $\varepsilon > 0$ による重力レンズを重力凸レンズ、 $\varepsilon < 0$ による重力レンズを重力凹レンズと呼ぶことにする。塚本と原田 [49] は仮定として北村他 [59] による時空計量から得られる修正された曲がり角を用いる。有効質量について述べる。標準レンズ理論 [102] の適用によって、 $\alpha = \bar{\varepsilon}/b$ で表される光の曲がり角のコンバージェンス (規格化された表面密度) は

$$\kappa = \frac{\bar{\varepsilon}(1-n)}{2} \frac{1}{b^{n+1}} \quad (2.81)$$

となる。弱場の Schwarzschild ではコンバージェンスは消える。 $\varepsilon > 0$ かつ $n > 1$ では、レンズオブジェクトの有効表面質量密度は標準レンズ理論 [59] の枠組みにおいて負と解釈される。これは質量 (もしくはエネルギー) が $\varepsilon > 0$ かつ $n > 1$ では新奇である必要があることを示唆する。 $\varepsilon < 0$ かつ $n < 1$ の場合も同様である。興味深いことに、 $\varepsilon < 0$ かつ $n > 1$ の場合ではコンバージェンスは中央の特異点をのぞいて至る所で正である。従ってこの場合、斥力であるにも関わらず標準レンズ理論の枠組みにおいて新奇な物質 (もしくはエネルギー) は必ずしも要求されない。つまり上記のモデル中の引力、及び斥力はコンバージェンスの正負と対応していないということである。以上をまとめたものが表 (2.1) である。

表 2.1: コンバージェンス κ の符号。式 (2.81) の $\varepsilon(n-1)$ の符号と一致する。

κ の符号	ε および n の範囲
$\kappa > 0$	$\varepsilon > 0 \ \& \ n < 1$
	$\varepsilon < 0 \ \& \ n > 1$
$\kappa = 0$	$n=1$
$\kappa < 0$	$\varepsilon > 0 \ \& \ n > 1$
	$\varepsilon < 0 \ \& \ n < 1$

薄いレンズ近似の元では、レンズ方程式を式 (2.82) として与えることは有用である [102]。

$$\beta = \frac{b}{D_L} - \frac{D_{LS}}{D_S} \alpha(b) \quad (2.82)$$

β は光源の角度位置を意味し、 D_L, D_S, D_{LS} はそれぞれ、観測者からレンズまでの距離、観測者から光源までの距離、レンズから光源までの距離を表す。

上記より、距離の逆 n べき時空のレンズ方程式は

$$\hat{\beta} = \hat{\theta} - \frac{1}{\hat{\theta}^n} \quad (\hat{\theta} > 0) \quad (2.83)$$

$$\hat{\beta} = \hat{\theta} + \frac{1}{(-\hat{\theta})^n} \quad (\hat{\theta} < 0) \quad (2.84)$$

となる。 $\hat{\theta} \equiv \beta/\theta_E, \hat{\theta} \equiv \theta/\theta_E, \theta \equiv b/D_L$ である。

$\varepsilon > 0$ では $\beta = 0$ の時、常にアインシュタインリングに対応する正の根が存在する。アインシュタインリング半径は式 (2.85) で定義される。

$$\theta_E = \left(\frac{\varepsilon D_{LS}}{D_S D_L^n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (2.85)$$

$\varepsilon < 0$ の場合、 $\beta = 0$ では正の根は存在しない。これは時空が斥力を持っているためと考えられる。 $\varepsilon < 0$ の場合のアインシュタインリング半径を式 (2.86) と定義する。しかしこれは、このような半径を持ったアインシュタインリングが観測されるという訳ではない。この半径は $\varepsilon < 0$ の時の典型的な角度スケールを表すものである。

$$\theta_E = \left(\frac{|\varepsilon| D_{LS}}{D_S D_L^n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (2.86)$$

一般的な正の n では、修正されたレンズ方程式の厳密解を得ることは不可能である。そこで、パラメータ依存性を明確にするために数値計算ではなく解析的ではあるが近似的な方法を用いる。

第3章 多重重力レンズの摂動論

ここでは多重重力レンズの摂動論について説明する。この章の構成は以下の通りである。3.1では複素変数形式の多重レンズ方程式の定式化について簡単に述べる。レンズ方程式は反復法により解く。3.2.2では2平面の場合の反復解と任意の枚数のレンズ平面の像の位置を計算するためのアルゴリズムを与える。3.3ではレンズ像の位置が現在の方法でどのように実現されるかを議論する。3.4では数値計算を用いたテストを行う。3.5では結論を述べる。

3.1 基礎方程式

3.1.1 多重平面のレンズ方程式

N 体によるレンズ効果を考える。この時観測者からの角径距離を $D_i (i = 1, 2, \dots, N)$, $D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq D_N$ とする。この場合、 N 枚のレンズ平面を考え、それぞれの平面に対し薄いレンズ近似を仮定する [26, 27]。

全ての曲がり角は小さく、また caustic から遠くはなれている。上記のセットアップは理想化されている。現実の宇宙では、各平面上に単一の孤立した質量を見つけることは稀である。大角度での質量からの寄与は概して角度距離の定義の中で考慮されるものとする。言い換えれば、視線方向に沿った局所質量分布による効果を集中させるということである。まず最初に、角度変数をアインシュタインリング半径

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM_{tot}}{c^2} \frac{D_{1S}}{D_1 D_S}} \quad (3.1)$$

で規格化する。ここで、最初の平面 D_1 上に総質量を置く。 G は重力定数、 c は光速を表す。 M_{tot} は $\sum_{i=1}^N M_i$ として定義される。 D_1 、 D_S 、 D_{1S} はそれぞれ観測者から1番目の質量、観測者から光源、1番目の質量から光源までの角径距離である。

再帰的に多重平面レンズ方程式を書き下すことができる [?, 26]。ベクトル表記では、2平面レンズ方程式は (3.2) として書き表される。

$$\beta = \theta - \left(\nu_1 \frac{\theta - l_1}{|\theta - l|^2} + \nu_2 d_2 \frac{\theta - \nu \delta_2 \frac{\theta - l_1}{|\theta - l|^2} - l_2}{|\theta - \nu \delta_2 \frac{\theta - l_1}{|\theta - l|^2} - l_2|^2} \right) \quad (3.2)$$

β 、 β 、 l_1 、 l_2 はそれぞれ光源の位置、像の位置、1番目、2番目のレンズの位置として定義されている。ここで ν_i は各レンズの質量比であり、 $\nu_i \equiv M_i M_{tot}^{-1}$ として定義される。 d_2 、 δ_2 はそれぞれ式 (3.3)、(3.4) となる。

$$d_2 \equiv \frac{D_1 D_{2S}}{D_2 D_{1S}} \quad (3.3)$$

$$\delta_2 \equiv \frac{D_S D_{12}}{D_2 D_{1S}} \quad (3.4)$$

代数学的処理が完了した時に複素変数を使用すると便利である。複素変数を用いた形式では、光源、像、レンズの2次元ベクトルはそれぞれ $w = \beta_x + i\beta_y$ 、 $z = \theta_x + i\theta_y$ 、 $\epsilon_i = l_{ix} + il_{iy}$ として定義される。図 3.1 は多重平面レンズを図示したものである。ここで z は最後に光線をそらす最初のレンズに対応する複素平面上にある。従って z はレンズ像の方向を表す。

複素形式を用いることによって、2平面のレンズ方程式は

$$w = z - \left(\frac{1 - \nu}{z^*} + \frac{\nu d_2}{z^* - \epsilon_2^* - \frac{(1 - \nu)\delta_2}{z}} \right) \quad (3.5)$$

と書き換えられる。アスタリスク「*」は複素共役を表す。また ν_1 と ν を消すために恒等式 $\nu_1 + \nu_2 = 1$ は ν_2 を表すことを用いる。注意すべき点として、複素座標の原点に最初の平面上の質量を置いている。これにより $\epsilon_1 = 0$ となり、単純に $\epsilon \equiv \epsilon_2$ と定義できる。これは最初の質量に関する2番目の質量の射影された相対位置である。レンズ方程式は z だけでなく z^* も含んでいるため、非解析的である。

3.1.2 反復解

質量比はその定義により 1 を超えることはない。これを利用して質量比を使った展開を作る単純な方法を使用する。恒等式 $\sum_i \nu_i = 1$ を利用することによって ν_i を消すことができる。形式解はテイラー級数 (3.6) とし

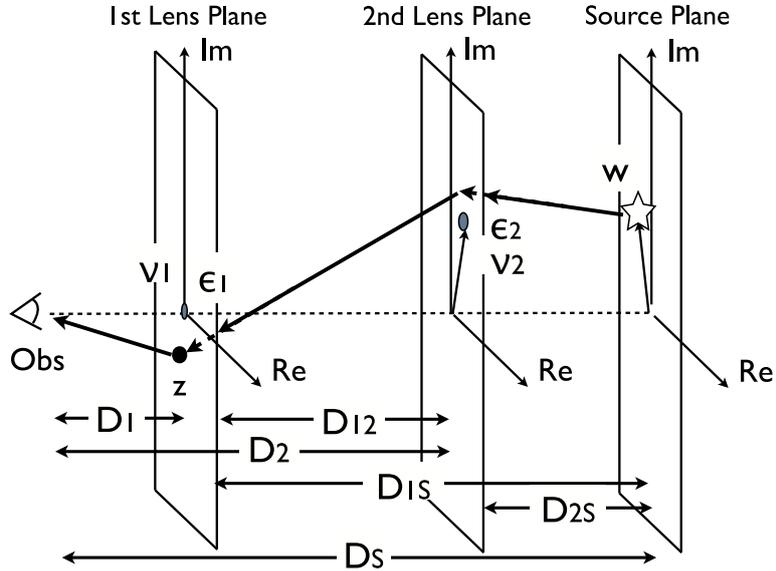


図 3.1: 複素平面上の光源と像の位置は w と z でそれぞれ定義される。N 体レンズは $\epsilon_i (i = 1, \dots)$ で定義される。ここではそれぞれのレンズ平面に対し薄いレンズ近似を適用している。観測者と光源、個々のレンズ間の角径距離は同様に定義される。

て展開される。

$$z = \sum_{p_2=0}^{\infty} \sum_{p_3=0}^{\infty} \cdots \sum_{p_N=0}^{\infty} \nu_2^{p_2} \nu_3^{p_3} \cdots \nu_N^{p_N} z_{(p_2)(p_3)\cdots(p_N)} \quad (3.6)$$

係数 $z_{(p_2)(p_3)\cdots(p_N)}$ は ν_i とは独立である。それぞれの係数 $z_{(p_2)(p_3)\cdots(p_N)}$ を反復し決定していく。

0 次では常に極限 $\nu_1 \rightarrow 1 (\nu_2 = \cdots = \nu_N \rightarrow 0)$ をとることによって単一平面のレンズ方程式が得られる。そのための二つの解を持っている。更に、反復計算のための種となる多重平面レンズ方程式のための他の解を持っている。これらの解を得るためのアルゴリズムは次の節で説明する。上記の逐次近似法は写像が特異点となる caustic 付近ではうまく働かないことに注意する。従って本論文では特異な領域を除いて通常の領域のみに注目する。

3.2 像の位置

3.2.1 2枚のレンズ平面

ν の0次では、2平面のレンズ方程式は単純に (3.7) となる。

$$w = z_{(0)} - \frac{1}{z_{(0)}^*} \quad (3.7)$$

これを書き換えて

$$z_{(0)}z_{(0)}^* - 1 = wz_{(0)}^* \quad (3.8)$$

とする。左辺が実数であるため右辺も実数でなければならない。 $w = 0$ でない限り、ある実数 A を導入して $z_{(0)} = Aw$ と置くことができる。式 (3.8) に $z_{(0)} = Aw$ を代入することによって、2次方程式

$$ww^*A^2 - ww^*A - 1 = 0 \quad (3.9)$$

この式を解くことによって式 (3.10) が得られる。

$$A = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{ww^*}} \right) \quad (3.10)$$
$$\equiv A_{\pm}$$

よって $z_{(0)}$ は $A_{\pm}w$ で与えられる。特に $w = 0$ では、式 (3.8) は $|z_{(0)}| = 1$ となる。しかしこれはアインシュタインリングではない。以下では $w = 0$ の一般的な場合を仮定する。式 (3.5) の分母に関して、 ν を係数とした展開 (3.11) を作る。

$$zz^* - \epsilon^*z - (1 - \nu)\delta_2 \equiv \sum_{p=0}^{\infty} \nu^p f_p \quad (3.11)$$

形式的に式 (3.12)、(3.13)、(3.14) が与えられる。

$$f_0 = z_{(0)}z_{(0)}^* - \epsilon^*z_{(0)} - \delta_2 \quad (3.12)$$

$$f_1 = z_{(0)}z_{(1)}^* + z_{(1)}z_{(0)}^* - \epsilon^*z_{(1)} + \delta_2 \quad (3.13)$$

$$f_2 = z_{(0)}z_{(2)}^* + z_{(1)}z_{(1)}^* + z_{(2)}z_{(0)}^* - \epsilon^*z_{(2)} \quad (3.14)$$

$z_{(0)}$ を $A_{\pm}w$ として選ぶことによって、2平面のレンズ方程式の $O(\nu^2)$ の項は (3.15) となる。

$$z_{(1)} + az_{(1)}^* = b_1 \quad (3.15)$$

a と b_1 はそれぞれ (3.16)、(3.17) である。

$$a \equiv \frac{1}{(z_{(0)}^*)^2} \quad (3.16)$$

$$b_1 \equiv - \left(\frac{1}{z_{(0)}^*} - d_2 \frac{z_{(0)}}{f_0} \right) \quad (3.17)$$

上記の方程式は $z_{(1)}$ に対し線形である。従ってこの方程式は簡単に解くことができ、その解は (3.18) で与えられる。

$$z_{(1)} = \frac{b_1 - ab_1^*}{1 - aa^*} \quad (3.18)$$

次に、2平面のレンズ方程式の $O(\nu^2)$ の項は式 (3.19) となる。

$$z_{(2)} + az_{(2)}^* = b_2 \quad (3.19)$$

b_2 は (3.20) で定義されている。

$$b_2 = az_{(1)}^* + \frac{a(z_{(1)}^*)^2}{z_{(0)}^*} + \frac{d_2}{f_0} \left(z_{(1)} - z_{(0)} \frac{f_1}{f_0} \right) \quad (3.20)$$

この方程式は $z_{(2)}$ に対し線形である。 $z_{(1)}$ と同様に簡単に解くことができ、その解は (3.21) で与えられる。

$$z_{(2)} = \frac{b_2 - ab_2^*}{1 - aa^*} \quad (3.21)$$

次に $O(\nu^3)$ の項について述べる。2平面のレンズ方程式は線形化され (3.22) となる。

$$z_{(3)} + az_{(3)}^* = b_3 \quad (3.22)$$

b_3 は (3.23) で定義されている。

$$b_3 = - \left[a \left\{ a(z_{(1)}^*)^3 - \frac{2z_{(1)}^* z_{(2)}^*}{z_{(0)}^*} - z_{(2)}^* + \frac{(z_{(1)}^*)^2}{z_{(0)}^*} \right\} - \frac{d_2}{f_0} \left\{ z_{(2)} - z_{(1)} \frac{f_1}{f_0} + z_{(0)} \left(-\frac{f_2}{f_0} + \frac{f_1^2}{f_0^2} \right) \right\} \right] \quad (3.23)$$

この方程式も今まで同様簡単に解くことができ、その解は (3.24) で与えられる。

$$z_{(3)} = \frac{b_3 - ab_3^*}{1 - aa^*} \quad (3.24)$$

上記では2平面のレンズ方程式(3.5)中の最後の項が発散しないというやや一般的な場合を考慮した。最後の項の分母が消える残りの場合を考える。これは式(3.25)と表される。

$$zz^* - (1 - \nu)\delta_2 = \epsilon^* z \quad (3.25)$$

左辺が実数であるから右辺も実数でなければならない。上記の方程式に $z = k\epsilon$ を代入すると2次方程式(3.26)が導かれる。

$$k^2 - k - \frac{(1 - \nu)\delta_2}{\epsilon\epsilon^*} \quad (3.26)$$

これを解くと解(3.27)、(3.28)が得られる。

$$z_+ \equiv \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 4\nu_1\delta_2\epsilon(\epsilon^*)^{-1}}}{2} \quad (3.27)$$

$$z_- \equiv \frac{\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 + 4\nu_1\delta_2\epsilon(\epsilon^*)^{-1}}}{2} \quad (3.28)$$

これらは有効な繰り込みとして ν で展開されない。分母中の展開を回避する理由は以下の通りである。 ν の展開が分母の中で行われた場合、レンズ方程式中で3次極(もしくはそれ以上の極)を見るだろう。これはより複雑な反復に結びつくだろう。従って、これを回避するために分母は展開しない。

分母の0次が単一平面のレンズ方程式のレンズオブジェクトの位置であることに注目すべきである。一方で現在のケースでの0次はレンズポジションではなく平面間のセパレーションによる補正を加えたレンズポジションの近くを表す。

$z_{(0)} = z_{\pm}$ の特殊な場合を考える。この場合、式(3.5)の分母に関して z_{\pm} 周りで展開して式(3.29)を得る。

$$zz^* - \epsilon^* z - (1 - \nu)\delta_2 \equiv \sum_{p=0}^{\infty} \nu^p g_p \quad (3.29)$$

形式的に式(3.30)、(3.31)、(3.32)が得られる。

$$\begin{aligned} g_0 &= z_{\pm}z_{\pm}^* - \epsilon^* z_{\pm} - (1 - \nu)\delta_2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$g_1 = z_{\pm}z_{(1)}^* + z_{(1)}z_{\pm}^* - \epsilon^* z_{(1)} \quad (3.31)$$

$$g_2 = z_{\pm}z_{(2)}^* + z_{(1)}z_{(1)}^* + z_{(2)}z_{\pm}^* - \epsilon^* z_{(2)} \quad (3.32)$$

g_p は z_p と z_p^* ($p = 1, 2, \dots$) に対し線形である。 ν の項が方程式(3.30)に現れることに注意する。なぜなら分母は当然2次方程式として取り扱われるからである。

ν の最低次では、レンズ方程式は単純に (3.33) となる。

$$w = z_{\pm} - \frac{1}{z_{\pm}^*} - \frac{d_2}{g_1} \quad (3.33)$$

これは $z_{\pm(1)} + a_{\pm}z_{\pm(1)}^* = b_{\pm 1}$ の形式をとり、直ちに解 (3.34) を与える。

$$z_{\pm(1)} = \frac{b_{\pm 1} - ab_{\pm 1}^*}{1 - a_{\pm}a_{\pm}^*} \quad (3.34)$$

a_{\pm} と b_{\pm} はそれぞれ

$$a_{\pm} = \frac{z_{\pm}}{z_{\pm}^* - \epsilon^*} \quad (3.35)$$

$$b_{\pm 1} = -\frac{d_2 z_{\pm}}{(z_{\pm}^* - \epsilon^*)(w - z_{\pm} + \frac{1}{z_{\pm}^*})} \quad (3.36)$$

である。次のオーダーでは、複素形式のレンズ方程式は (3.37) となる。

$$0 = z_{\pm(1)} + az_{\pm(1)}^* + \frac{1}{z_{\pm}^*} - \frac{d_2}{g_1} \left(z_{\pm(1)} - z_{\pm} \frac{g_2}{g_1} \right) \quad (3.37)$$

これを解くと解 (3.38) が得られる。

$$z_{\pm(2)} = \frac{b_{\pm 2} - ab_{\pm 2}^*}{1 - a_{\pm}a_{\pm}^*} \quad (3.38)$$

$b_{\pm 2}$ は

$$b_{\pm 2} = -\frac{1}{z_{\pm}^* - \epsilon^*} \times \left((g_1)^2 \frac{z_{\pm(1)} + az_{\pm(1)}^* + \frac{1}{z_{\pm}^*} - \frac{d_2 z_{\pm(1)}}{g_1}}{d_2 z_{\pm}} + z_{\pm(1)} z_{\pm(1)}^* \right) \quad (3.39)$$

同様にして、 $z_{\pm(3)}$ が得られる。

表 3.1 は反復で得られた数値計算例とそれらの収束を表す。

$z_{\pm(1)}$ は 2 枚のレンズ平面間のセパレーションによる効果のオーダー評価を与える。このような効果は z_+ と z_- による反復表現を含む δ_2 によって特徴付けられる。

3.2.2 3 枚以上のレンズ平面

2 枚のレンズ平面での上記の手続きは任意の枚数の平面でうまく働くようには見えない。なぜなら 5 次以上の多項式は Galois によって示されたように代数的に解くことができない [29]。

表 3.1: 2 平面レンズによる像の位置の例。ここでは $\nu_1 = 9/10, \nu_2 = 1/10, \epsilon = 3/2, w = 2, D_1/D_S = 2/5, D_2/D_s = 3/5$ としている。摂動法による計算結果 (0th,1st,2nd,3rd) は数値的にレンズ方程式を解いて得られたもの (Num) と良い一致を示している。同パラメータでレイトレーシング法 (Ray) は数値を与える。

Image	1	2	3	4
0th	2.414213	-0.424213	1.780776	-0.280776
1st	2.434312	-0.390217	1.731605	-0.276050
2nd	2.430981	-0.388781	1.732327	-0.275043
3rd	2.431474	-0.388781	1.732190	-0.274861
Num	2.431396	-0.388766	1.73220	-0.274833
Ray	2.432	-0.393	1.732	-0.279

しかしながら展開パラメータを持っているため反復法によって単なる像の位置である根を構築することはできる。単純な例として3平面のレンズでの反復法について説明する。3平面のレンズ方程式を書き下すことができる。

最初に ν の項を無視する。これにより3平面のレンズ方程式が2平面のレンズ方程式となる。2平面レンズ方程式の像の位置を示す4つの関数を構築するための方法は既に知っている。2平面の場合と似た方法で3平面のレンズ方程式に摂動像の位置を代入することができる。 $O(\nu_3)$ の補正を加えた4つの位置はこのようにして得られる。4つの線形順序根を使うことによって、 $O(\nu_3^2)$ での4つの像の位置を得ることができる。このように、再帰的に高いオーダーの根を得ることができる。

他の像の位置は3平面のレンズ方程式の最後の項の分母から来る。分母は係数は異なるが2平面のレンズ方程式と同じ形式をとる。従って4つの異なる解を摂動的に構築することができる。これら4つの根を元に更なる反復に使用することで、3平面のレンズ方程式を摂動的に満たす4つの根を構築することができる。

よって計8個の像の位置は摂動的に求められる。この方法は4平面のレンズシステムでも同様に使うことができる。

最初に4平面のレンズ方程式の ν_4 の項を無視する。これにより4平面のレンズ方程式は3平面のレンズ方程式になる。 $N = 3$ については、上で

議論されているように8個の像が現れる。従って、 ν_4 の項から8個の像の位置の反復表現を反復して得ることができる。次に4平面のレンズ方程式の ν_4 の項の分母を見る。分母の根の求め方は3平面のレンズ方程式の時の方法と基本的に同じである。このようにして8個以上の根が反復計算のための種として得られる。光源とレンズパラメータの関数として計 $8 + 8 = 16$ 個の像の位置が摂動的に構築される。

5枚以上の平面での反復法を段階的に行う。これにより光源とレンズの関数として像の位置が摂動的に得られる。

二つの像は caustic 付近では一つに融合する。今回の研究では像が融合しない通常の領域のみを考える。従ってレンズ方程式の分母の0は縮退しているのではなく別個であるということである。

3.3 N体レンズによる像

像の位置の明確な表現を求める代わりに、この章では任意の枚数の平面でのレンズ像を摂動的に実現するための方法を議論する。そのためのヒントは前の章で表されている。

$N = 2$ では、摂動的に得られる像の数は4つである。帰納法によって少なくとも 2^N 個の像がNレンズ平面にどのように実現されるかを示す(caustic 付近を除く)。

$N = p$ で少なくとも 2^p の像が実現されると仮定する。caustic 付近を議論していないため縮退していないことに注意する。ここですべきことは、 $N = p + 1$ で少なくとも 2^{p+1} 個の像が実現されることを示すことである。

$p + 1$ 枚のレンズ平面を考える。最初にレンズ方程式の $(p + 1)$ 番目の質量項を無視する。これにより方程式は $N = p$ でのそれと同じになる。 $N = p$ という仮定により、 $(p + 1)$ 番目の質量項を無視した方程式は最低でも 2^p の根を持つ。

次に、 $(p + 1)$ 番目の質量は新たな摂動源と考えられる。 ν_{p+1} を備えた分数の分母は 2^p の0を持つ。この多項式は z 及び $*$ が混じり合っているため因数分解することができないことに注意する。これらの0次根を種として同数の像の位置を導く。

反復法では補助的な解法を除外しないので、合計少なくとも $2^p + 2^p = 2^{p+1}$ の根が実現される。帰納法によって、caustic 付近を除いた任意のNの多重平面レンズ方程式では少なくとも 2^N 個の像が実現される方法を

理解した。像の位置を構築する上記の方法は、像の数の不等式 $\leq 2^N$ がシャープであり、また下限値が実際に達成されることを意味する。逆にトレースされた光線がレンズオブジェクトにあたり光源平面に届かない閉塞点はいくつかの像が閉塞点付近を調査することにより発見されるという事実によりその役割を果たす。

最後に、二つ注意点を述べる。最初の注意点は数値計算法 [30] との比較についてである。現在の方法は像の位置を解析的な表現で与える。これには二つのメリットがある。一つは計算時間の短縮、もう一つはパラメータの依存性が明らかであること。しかしながら非常に長い表式になるというデメリットもある。二つ目の注意点は多重根を作る点である。テイラー法はテイラー級数が収束することを仮定している一方で多重根では発散する。従って像が融合する場合テイラー法を使って問題を解くことは難しいだろう。

3.4 数値計算

ここではテイラー展開法の誤差を調べるために簡単なレイトレーシング計算を行う。表 3.1 はテイラー展開とレイトレーシング、両方の結果が一致することを示している。特に、イメージ No.2,4 は数%ずれているが、イメージ No1,3 はよく一致していることに注目する。これはイメージ No2,4 に対応する光線がイメージ No1,3 と比較してレンズにより近いところを通過するためである。

次にテイラー展開による計算誤差が増大する横断面や平面間の間隔、質量比を調査するために様々なレンズパラメータを使ってテストを行う。図 3.2 はレンズパラメータを数値的に変化させた時の精度を表す。様々なパラメータでの各イメージの相対誤差は

$$\Delta \equiv \left| \frac{z_{Taylor} - z_{Num}}{z_{Num}} \right| \quad (3.40)$$

で定義される。 z_{Taylor} はテイラー展開法によって得られた根を、 z_{Num} はレンズ方程式を数値的に解くことによって得られた根を、それぞれ意味する。 Δ_{Max} は (2 平面レンズの)4 つの像の中で最大の誤差を表す。パラメータ値は表 3.1 と同じ値を用いる。図に示されるように、テイラー展開法は広い範囲において精度が高い。しかし場合によってはうまく機能しない (例として、質量比が大きい、caustics 付近に光源がある等)。

この計算法の破綻を定量化するために、 $D_{Max} = 0.01(1\%)$ を閾値とする。計算法が破綻する横断面の値はおおよそ $\pi \times 0.2^2 \sim 0.1$ (主要なレンズの方向付近)、 $\pi \times 1^2 \sim 3$ (2番目のレンズの方向付近) である。もし閾値が1%未満なら二つの断面は合一される。角度はアインシュタイン半径によって規格化されることに注意する。計算法が破綻する質量比の値は0.3である。レンズ間のセパレーションはどの値でもテイラー展開法は破綻しないと思われる。

3.5 結果と考察

この章では光源とレンズパラメータの関数として多重重力レンズによる像の位置を決定する体系的な試みを行った。結果、caustics 付近を除いた、多重重力レンズ方程式を解くためのテイラー級数展開の方法を示した。

像の数の下限値はN体レンズでは 2^n であるが、今回研究した摂動法ではそれらの像がどのように表されるかを直接示した (caustics を除く)。

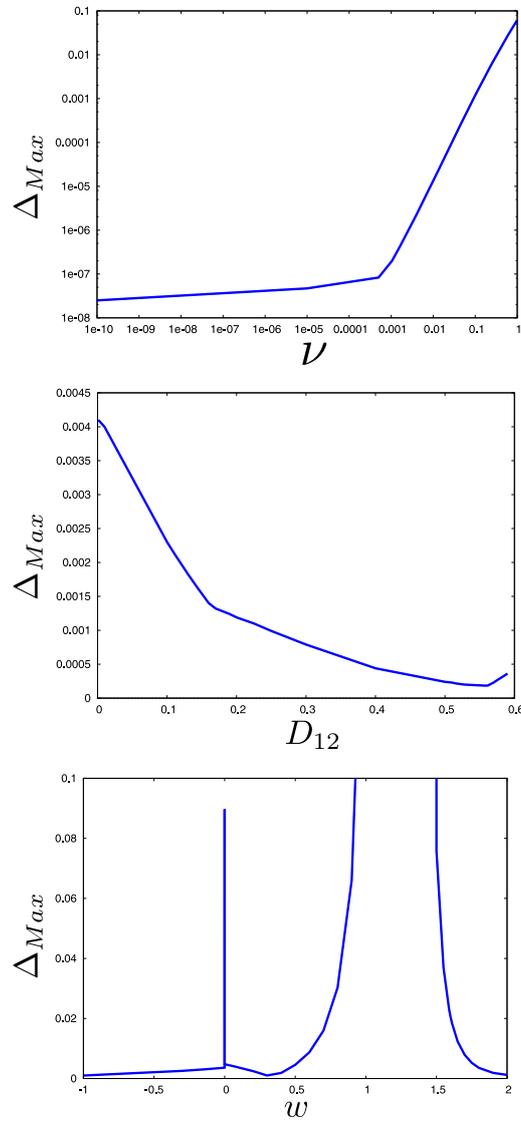


図 3.2: 異なるパラメータでのテイラー展開法の精度の数値テスト。比較のための参照モデルとして、モデルパラメータを $\nu_1 = 9/10, \nu_2 = 1/10, \epsilon = 3/2, w = 2, D_1/D_S = 2/5, D_2/D_S = 3/5$ と選ぶ。上段: 質量比 $\nu \equiv \nu_2$ を変化させたグラフ。中段: レンズ間の距離 D_{12} を変化させたグラフ。下段: 光源の位置 w を実軸に沿って変化させたグラフ。また縦軸は 4 つの像の相対誤差 Δ_{Max} を意味する。

第4章 新奇な物質による重力レンズシア

この章では負の質量等の新奇な物質が引き起こす、凹レンズに類似される斥力レンズの重力レンズシアについて述べる。

4.1 重力レンズシア

4.1.1 $\varepsilon > 0$ の場合

重力レンズシアについて述べる。まず $\varepsilon > 0$ の場合から始める。先程も述べたが、 $n > 1$ の時、物質 (もしくはエネルギー) は新奇である必要がない。アインシュタインリング半径で規格化されたベクトル形式のレンズ方程式は式 (4.1)、(4.2) と表される。

$$\hat{\beta} = \hat{\theta} - \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}^{n+1}} \quad (\hat{\theta} > 0) \quad (4.1)$$

$$\hat{\beta} = \hat{\theta} + \frac{\hat{\theta}}{(-\hat{\theta})^{n+1}} \quad (\hat{\theta} < 0) \quad (4.2)$$

それぞれの変数は $\hat{\beta} \equiv \beta/\theta_E$ 、 $\hat{\theta} \equiv \theta/\theta_E$ として定義されている。また $\theta \equiv b/D_L$ である。 $\hat{\beta}$ と $\hat{\theta}$ はこれらの変数のベクトルである。また $\hat{\beta}$ と $\hat{\theta}$ はそれぞれのベクトルの大きさである。 $\hat{\theta} > 0$ では常に像が一つ存在し、他の像は $\hat{\theta}$ に現れる。

ヤコビ行列 $A_{ij} \equiv \partial\beta^i/\partial\theta_j$ によって一般的に定義されるレンズシアについて述べる。簡単な計算によって、 $\hat{\theta}$ での増光行列は式 (4.3) となる。

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\hat{\theta}^{n+1}} + (n+1)\frac{\hat{\theta}_x\hat{\theta}_x}{\hat{\theta}^{n+3}} & (n+1)\frac{\hat{\theta}_x\hat{\theta}_y}{\hat{\theta}^{n+3}} \\ (n+1)\frac{\hat{\theta}_x\hat{\theta}_y}{\hat{\theta}^{n+3}} & 1 - \frac{1}{\hat{\theta}^{n+1}} + (n+1)\frac{\hat{\theta}_y\hat{\theta}_y}{\hat{\theta}^{n+3}} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

A_{ij} を対角化する。固有値を λ_{\pm} と定義する。

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

x、y 座標はそれぞれ $(\hat{\theta}_i) = (\hat{\theta}, 0)$ 、 $(\hat{\beta}_i) = (\hat{\beta}, 0)$ となるように動径、接線方向を選ぶ。従って動径方向の歪み因子は $1/\lambda_-$ 、接線方向の歪み因子は $1/\lambda_+$ となる。

最初に主要な像 ($\hat{\theta} > 0$) の場合を調べる。式 (4.1) を使うことによって式 (4.5)、(4.6) が得られる。

$$\lambda_+ = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\theta}} = 1 - \frac{1}{\hat{\theta}^{n+1}} \quad (4.5)$$

$$\lambda_- = \frac{d\hat{\beta}}{d\hat{\theta}} = 1 + \frac{n}{\hat{\theta}^{n+1}} \quad (4.6)$$

式 (4.5)、(4.6) を得るために、いくつかの段階を経る。最初にヤコビ行列の計算、次に行列の対角化である。注目すべき点として、今回の軸対称の場合では複雑な計算を行わずに式 (4.5)、(4.6) が得られる点である。これには座標の選び方も関係している。 $\hat{\beta}$ と $\hat{\theta}$ の微小変化はそれぞれ $(d\hat{\theta}_i) = (d\hat{\theta}, \hat{\theta}d\phi)$ 、 $(d\hat{\beta}_i) = (d\hat{\beta}, \hat{\beta}d\phi)$ である。 ϕ は方位角である。軸対称のために $\hat{\theta}$ 、 $\hat{\beta}$ は方位角に依存しない。これは局所座標中では非対角項が消えることを意味する。従って式 (4.5)、(4.6) はすぐさま得られる [66]。

$n > -1$ の時に限り、 $\lambda_- > \lambda_+$ である。従って、主要な像は常に接線方向に歪む。さらに $n=0.5, 1, 2, 3$ として計算された κ 、 λ_+ 、 λ_- をグラフ化した図 (4.1) を見ると、これら 4 つのケースでは λ_- は常に λ_+ より大きい。コンバージェンス κ は $n=5$ では正、 $n=2, 3$ では負である。シュバルツシルトレンズに対応する $n=1$ では $\kappa = 0$ となる。

式 (4.5)、(4.6) からコンバージェンス κ とシア γ はそれぞれ式 (4.7)、(4.8) となる。

$$\kappa = 1 - \frac{\lambda_+ + \lambda_-}{2} = \frac{1 - n}{2} \frac{1}{\hat{\theta}^{n+1}} \quad (4.7)$$

$$\gamma = \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2} = -\frac{1 + n}{2} \frac{1}{\hat{\theta}^{n+1}} \quad (4.8)$$

次に 2 番目の像について述べる。式 (4.2) を用いると、 $n > 1$ のときに限り $\lambda_- > \lambda_+$ となる。従って 2 番目の像も主要な像と同様、接線方向に歪む。 $n=2$ かつ $\varepsilon > 0$ での像の歪みを表した図が図 4.2 である。これを見ると接線方向に歪んだ像のペアがあることがわかる。

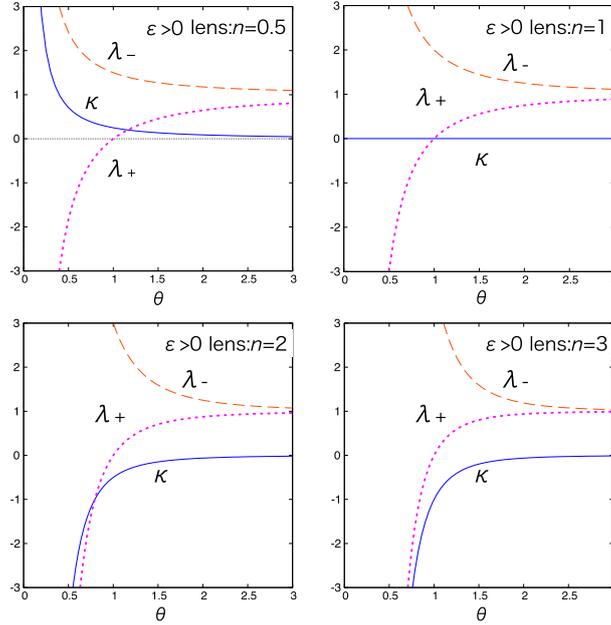


図 4.1: $\varepsilon > 0$ での κ と λ_+ , λ_- 。それぞれ実線 (青)、点線 (紫)、破線 (オレンジ) で表されている。横軸はアインシュタインリング半径で規格化された像の位置 θ 。左上: $n=0.5$ 右上: $n=1.0$ 左下: $n=2$ 右下: $n=3$

最後に指数 n の依存性について述べる。ジャイアントアークのように像が著しく歪む場合、アインシュタインリングの近くにその像は現れる。この時、式 (4.5)、(4.6) は式 (4.9)、(4.10) として展開される。

$$\lambda_+ = (n+1)(\hat{\theta}-1) - \frac{(n+1)(n+2)}{2}(\hat{\theta}-1)^2 + \mathcal{O}((\hat{\theta}-1)^3) \quad (4.9)$$

$$\lambda_- = (n+1) - n(n+1)(\hat{\theta}-1) + \mathcal{O}((\hat{\theta}-1)^2) \quad (4.10)$$

ここで恒等式 $\hat{\theta} = 1 + (\hat{\theta}-1)$ を使っている。動径方向の歪みに対する接線方向の歪みの比率 (アークの形状) は式 (4.11) となる。

$$\frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \frac{1}{\hat{\theta}-1} + \left(1 - \frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(\hat{\theta}-1) \quad (4.11)$$

この式から、像の位置 $\hat{\theta}$ を固定すると、像の歪みは n が増大するとともに小さくなっていくことを表している。

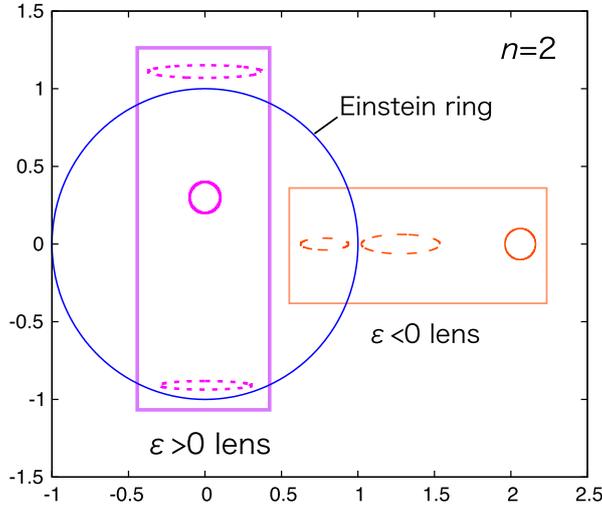


図 4.2: 引力 ($\varepsilon > 0$) と斥力 ($\varepsilon < 0$)、それぞれの場合のレンズイメージの数値計算。破線で表されている。ここでは $n=2$ としている。光源は実線の丸で表されている。

4.1.2 $\varepsilon < 0$ の場合

次に $\varepsilon < 0$ の場合について述べる。アインシュタインリング半径で規格化されたベクトル形式のレンズ方程式は式 (4.12)、(4.13) と表される。

$$\hat{\beta} = \hat{\theta} + \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta}^{n+1}} \quad (\hat{\theta} > 0) \quad (4.12)$$

$$\hat{\beta} = \hat{\theta} + \frac{\hat{\theta}}{(-\hat{\theta})^{n+1}} \quad (\hat{\theta} < 0) \quad (4.13)$$

一般性を損なうことなく $\hat{\beta} > 0$ と仮定すると、式 (4.13) は $\hat{\theta} < 0$ を満たす解を持たず、一方で式 (4.12) は最大でも二つの正の解を持つ。図 4.3 は像の出現パターンは三つあることを示している。像がただ一つだけ現れるパターンはインパクトパラメータがある特定の値をとったときのみである。

インパクトパラメータが大きいパターンでは二つの像がレンズに対し同じ方向に現れるが、小さいパターンでは像は現れない。単一の像のパターンは特定の値となるようにインパクトパラメータの極限をとることによって議論することができるため、二つの像のパターンに注目する。

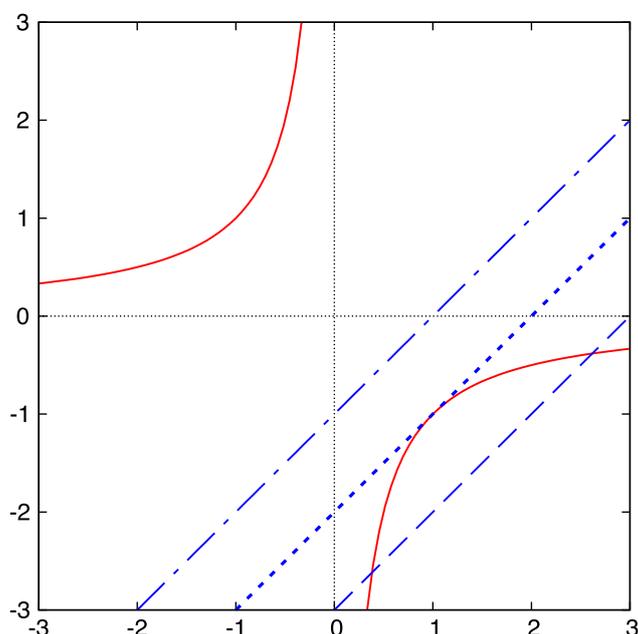


図 4.3: 斥力レンズモデル ($\varepsilon < 0$)。実曲線は $1/\hat{\theta}^n$ を、直線は $\hat{\theta} - \hat{\beta}$ をそれぞれ表す。二つの線の交点はレンズ方程式の解である像の位置に対応する。直線は以下の三種である： $\hat{\beta}$ が小さくて像が出現しない直線 (鎖線)、ある特定の $\hat{\beta}$ では単一の像 (点線)、 $\hat{\beta}$ が大きくて像が二つ出現する直線 (破線)。二つの像はレンズオブジェクトに対し同じ方向に現れる。

式 (4.12) を使うことによって式 (4.14)、(4.15) を得る。

$$\lambda_+ = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\theta}} = 1 + \frac{1}{\hat{\theta}^{n+1}} \quad (4.14)$$

$$\lambda_- = \frac{d\hat{\beta}}{d\hat{\theta}} = 1 - \frac{n}{\hat{\theta}^{n+1}} \quad (4.15)$$

この式は $n > -1$ において $\lambda_- < \lambda_+$ を表す。従って両方の像はいつも動径方向に歪む。図 4.4 は $n=0.5, 1, 2, 3$ の時の κ と λ_+ 、 λ_- を図示したものである。

これら 4 つのケースから、 λ_+ は常に λ_- より大きくなる。 κ は $n=0.5$ で負となり、 $n=2, 3$ では正となる。(負の質量を持つ) シュバルツシルトレンズに対応する $n=1$ では $\kappa = 0$ となる。

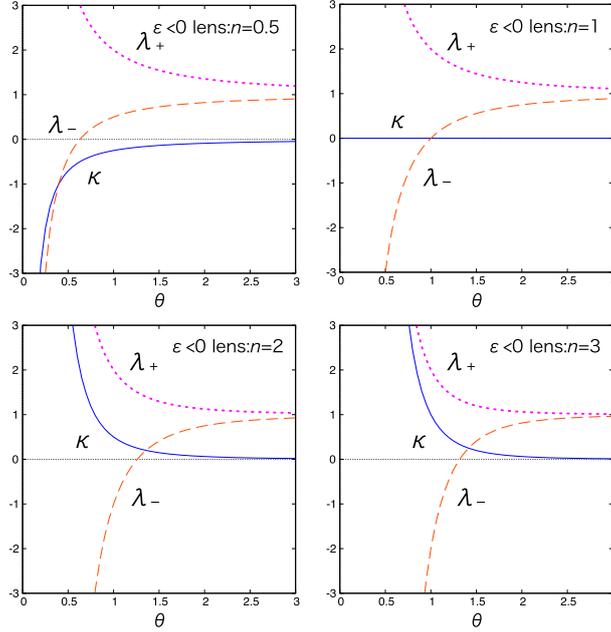


図 4.4: $\varepsilon < 0$ での κ と λ_+ 、 λ_- 。それぞれ実線(青)、点線(紫)、破線(オレンジ)で表されている。横軸はアインシュタインリング半径で規格化された像の位置 θ 。左上： $n=0.5$ 右上： $n=1.0$ 左下： $n=2$ 右下： $n=3$

式(4.14)、(4.14)はシア(4.16)を与える。

$$\gamma = \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2} = \frac{1+n}{2} \frac{1}{\hat{\theta}^{n+1}} \quad (4.16)$$

次に $\varepsilon > 0$ の時と同様に指数 n の依存性について調べる。 $\varepsilon < 0$ では像が著しく歪む場合、(4.15)より $\hat{\theta} n^{1/(n+1)}$ にその像は現れる。この時、式(4.14)、(4.15)は式(4.17)、(4.18)として展開される。 $N = n^{1/(n+1)}$ として、

$$\lambda_+ = \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{n+1}{N^{n+2}}(\hat{\theta} - N) + \mathcal{O}((\hat{\theta} - N)^2) \quad (4.17)$$

$$\lambda_- = \frac{n+1}{N}(\hat{\theta} - N) - \frac{1}{2} \frac{(n+1)(n+2)}{N^2}(\hat{\theta} - N)^2 + \mathcal{O}((\hat{\theta} - N)^3) \quad (4.18)$$

ここで恒等式 $\hat{\theta} = N + (\hat{\theta} - N)$ を使っている。接線方向の歪みに対する動径方向の歪みの比率(アーケの形状)は式(4.19)となる。

$$\frac{\lambda_+}{\lambda_-} = \frac{1}{N^n} \frac{1}{\hat{\theta} - N} + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\hat{\theta} - N) \quad (4.19)$$

この式から、像の位置 $\hat{\theta}$ を固定すると、像の歪みは n が増大するととも

に小さくなっていくことを表している。

斥力による重力レンズはボイドのような質量分布を持つ時空構造によって引き起こされるだろう。上記の計算は背景時空が平坦(ミンコフスキー)であると仮定している。宇宙論的な状況を考慮する場合、重力ポテンシャルと質量密度はフリードマンルメートル背景時空に基づいた宇宙論的摂動アプローチ中のスカラー摂動と密度コントラストに対応するだろう [102]。この宇宙論的な対応では $\kappa < 0$ となる現在のモデルは、局所質量密度が宇宙の平均密度以下、もしくは密度コントラストが負となるような、コズミックボイドと呼ばれる低密度領域に対応すると考えられる。その領域を通過する光に働く重力は、球状のボイドの中心での曲がり角が負であるため、斥力 ($\varepsilon < 0$) として解釈されるだろう。従って、コズミックボイドは $\kappa < 0$ かつ $\varepsilon < 0$ のケースに相当すると考えられる。宇宙の平均密度による正のコンバージェンスは宇宙論的距離の中で考慮されることに注意する。銀河団中と比べボイドの中にはごく少数の銀河しか存在しない。従って、トレーサーとして銀河を使用することによりボイド内部の重力を調査するのは難しいと言える。重力レンズシミュレーションはボイド研究をするための一つの手段となるだろう。

この章を終える前に、レンズの位置を知らずとも接線方向の歪みと動径方向の歪みが区別できるかについて述べる。普通レンズ天体は銀河のような直接視認できるレンズ天体をのぞいて直接観測することはできない。特に、この章で議論されたような新奇なレンズモデルはその傾向が顕著であろう。上記の計算では、2次元座標の原点にレンズオブジェクトの中心をおいている。結果動径方向と接線方向はうまく決定することができる。動径方向に歪んだ像のペア ($\varepsilon < 0$) では、互いに直線上に並んで存在している。接線方向に歪んだ像のペア ($\varepsilon > 0$) では、互いに平行に並んで存在している。従って、直列に並んだ像を観測することによって接線方向と動径方向の歪みを識別することができる。図 4.2 をみると動径方向に歪んだ像のペアを確認できる。

4.2 結果と考察

この章では修正重力理論やエキゾチック物質、エネルギーから着想を得た重力レンズモデルを議論した。漸近的平坦かつ静的、球対象な距離の逆 n べきに依存した時空を使うことによって、弱場近似、薄いレンズ近似中では、光に対し引力が働くレンズモデルは接線方向の歪みを、一

方光に対し斥力が働くレンズモデルは動径方向の歪みをそれぞれ発生させることがわかった。

宇宙論と関連づけると、コズミックボイドは $\kappa < 0$ かつ $\varepsilon < 0$ の場合に相当し、この時像は接線方向ではなく動径方向に歪む。宇宙論シミュレーション中の現実的なボイドを伝搬する光を研究することは重要である。なぜなら今回用いたモデルは単純な法則に従ったものだからである。



図 4.5: 重力レンズシアのシミュレーション。左: 引力型 ($\varepsilon > 0$) レンズ、右: 斥力型 ($\varepsilon < 0$) レンズ

第5章 新奇な物質によるマイクロレンズイメージの光中心

5.1 マイクロレンズイメージの光中心

5.1.1 光中心

光中心について述べる。どのような $\varepsilon > 0, \varepsilon < 0$ でも、像の位置は $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ で定義される。対応する増光率は A_1, A_2 で定義される。一般性を損なわず、 $\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2$ とすることができる。質量分布の中心のアナロジーとして、重力マイクロレンズソースの光分布の重心位置は

$$\hat{\theta}_{pc} = \frac{A_1 \hat{\theta}_1 + A_2 \hat{\theta}_2}{A_{tot}} \quad (5.1)$$

で与えられる。 A_{tot} はトータルの増光率 $A_1 + A_2$ である。対応するスカラーは $\hat{\theta}_{pc} \equiv (A_1 \hat{\theta}_1 + A_2 \hat{\theta}_2) A_{tot}^{-1}$ として定義される。重心がレンズ中心に対し光源と同じ方向に置かれるとすると、 $\hat{\theta}_{pc}$ は正となる。

光源位置に対する像の重心の相対的置換は

$$\delta = \hat{\theta}_{pc} - \hat{\beta} \quad (5.2)$$

として表される。以下、これを centroid shift と呼ぶ。対応するスカラーは $\delta \hat{\theta}_{pc} \equiv \hat{\theta}_{pc} - \hat{\beta}$ として定義される。 $\delta \hat{\theta}_{pc}$ は $\hat{\theta}_{pc} > \hat{\beta}$ の時、正である。

レンズと光源軌道の関係を考慮すると、 $\hat{\beta}$ の時間依存性は

$$\hat{\beta} = \sqrt{\hat{\beta}_0^2 + (t - t_0)^2 / t_E^2} \quad (5.3)$$

と表される。 $\hat{\beta}_0$ は光源軌道のインパクトパラメータであり、 t_0 は最近接時の時間である。光源は等速直線運動すると仮定されている。 $t_0 = 0$ とする。 r_E はアインシュタイン半径を横切る時間で、

$$t_E = R_E / v_r \quad (5.4)$$

によって与えられる。 v_T は光源と観測者に対するレンズの横断速度である。以下の数値計算では、時間はアインシュタインリング半径を横切る時間によって規格化されている。

数値計算図では xy 座標を使っている。レンズ中心を座標原点、光源運動の方向を x 軸、それとは垂直の方向を y 軸としている。

5.1.2 数値計算: $\varepsilon > 0$ の場合

$\varepsilon > 0$ の数値計算結果について述べる。図 5.1 は $\varepsilon > 0$, $\hat{\beta}_0 = 0.3, 3.0$ の時の像の光中心の軌道を表している。図 5.2 は光中心の残差を表している。一例として、 $\hat{\beta}_0 = 0.3$ では新奇なレンズモデルによる光中心の残差の垂直成分の最大値は、それぞれ $0.2(n = 0.5), 0.14(n = 1), 0.07(n = 3), 0.02(n = 10)$ である。 $\hat{\beta}_0 = 3.0$ では、 $0.5(n = 0.5), 0.3(n = 1), -0.01(n = 3), -0.02(n = 10)$ となる。これはつまり、大きな n の新奇なモデルによるレンズは Schwarzschild レンズ ($n = 1$) よりも相対的に弱くなることを示している。大きな n では光中心の変位が押さえられる。これは曲がり角が距離の逆 n べきに依存するためである。

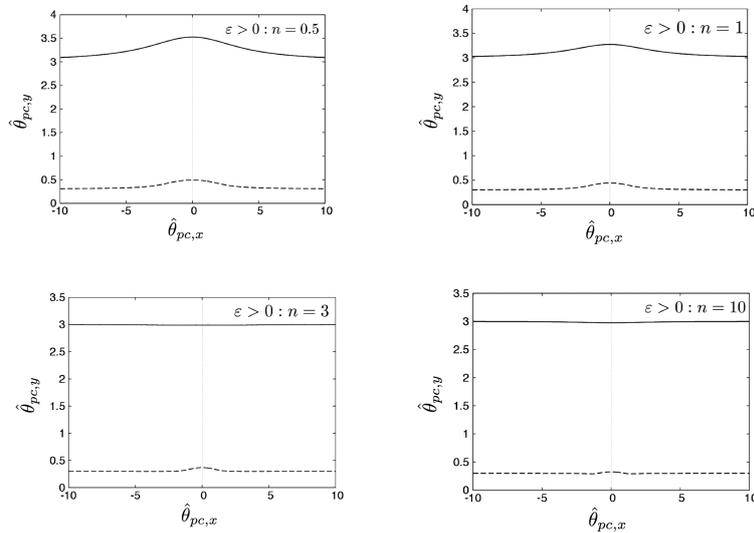


図 5.1: $\varepsilon > 0$ (凸型引力モデル) での光中心の軌道。実線と破線はそれぞれ $\hat{\beta}_0 = 3, \hat{\beta}_0 = 0.3$ に対応する。光源の直線運動にそった横軸は $\hat{\theta}_{pc,x}$ 、縦軸は $\hat{\theta}_{pc,y}$ である。左上: $n = 1$ 、右上: $n = 2$ 、左下: $n = 3$ 、右下: $n = 10$ 。

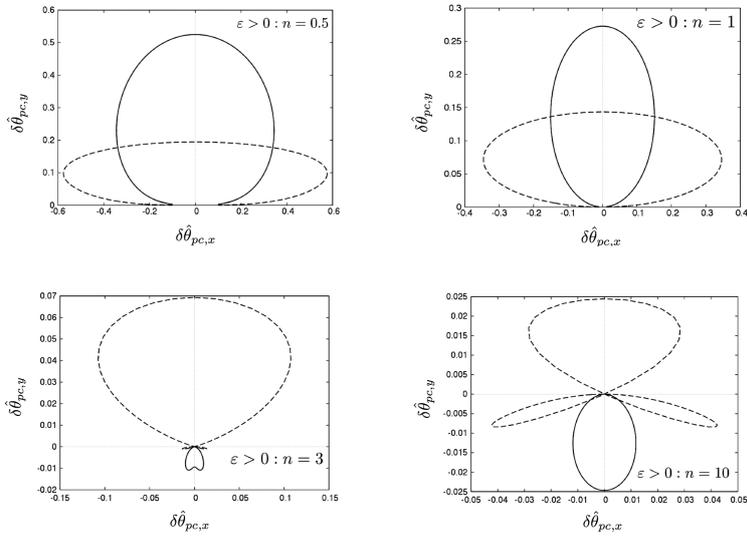


図 5.2: $\varepsilon > 0$ (凸型引力モデル)での光中心の残差 $\delta\hat{\theta}_{pc}$ 。実線と破線はそれぞれ $\hat{\beta}_0 = 3, \hat{\beta}_0 = 0.3$ に対応する。光源の直線運動にそった横軸は $\delta\hat{\theta}_{pc,x}$ 、縦軸は $\delta\hat{\theta}_{pc,y}$ である。左上: $n = 1$ 、右上: $n = 2$ 、左下: $n = 3$ 、右下 $n = 10$ 。

他の特徴は $n > 2$ では軌道が蝶結びの形になることである。このような複雑な軌道は天文観測での新奇なレンズの証拠になるだろう。インパクトパラメータが大きくなる場所ではこの軌道は消えるだろう。これは部分的に A_2 が $n = 1$ の場合と比較して大きくなるからである。

光中心と光源が一致するのは、シュバルツシルトの場合だと無限遠である。

5.1.3 数値計算 $\varepsilon < 0$ case

次に $\varepsilon < 0$ の数値計算結果について述べる。図 5.5 は $\varepsilon < 0$ モデルの光中心を図示したものである。 $\varepsilon < 0$ モデルのレンズでは β が小さいところで像が現れないために、曲線が消えていることに注意する。そのような特定のイベントは天文学では食として解釈されてしまうだろう。

図 (5.6) は $\varepsilon < 0$ モデルの光中心の残差である。 $\varepsilon > 0$ モデルとは違って蝶ネクタイ型は現れない。光中心の残差はこのモデルで働く力が斥力であるため常に負であることに注意する。レンズ天体が目に見えない場合、負の残差と正の残差を区別するのは難しいであろう。

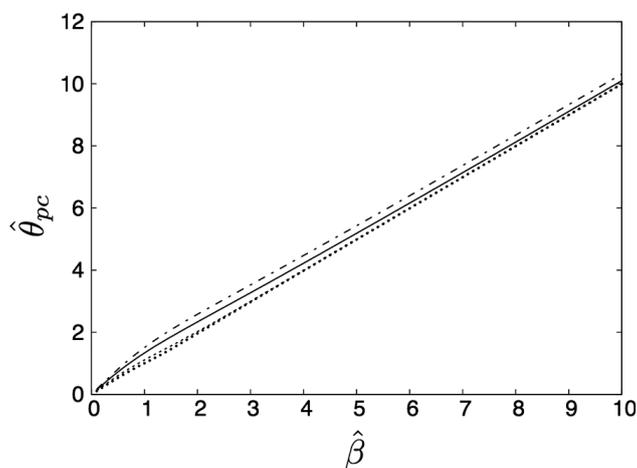


図 5.3: $\varepsilon > 0$ (凸タイプ引力モデル)での光中心 $\hat{\delta}_{pc}, \hat{\beta}$ 。鎖線、実線、破線、点線はそれぞれ $n = 0.5, 1, 3, 10$ に対応する。横軸はアインシュタイン半径で規格化された光源の位置 $\hat{\beta}$ 、縦軸は $\hat{\theta}_{pc}$ である。

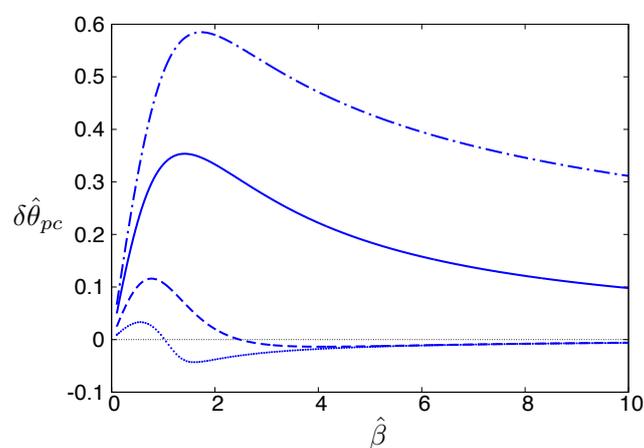


図 5.4: $\varepsilon > 0$ (凸タイプ引力モデル)での光中心の残差 $\delta\hat{\theta}_{pc}, \hat{\beta}$ 。鎖線、実線、破線、点線はそれぞれ $n = 0.5, 1, 3, 10$ に対応する。横軸はアインシュタイン半径で規格化された光源の位置 $\hat{\beta}$ 、縦軸は $\delta\hat{\theta}_{pc}$ である。

斥力モデルの光中心の残差の軌道は図 5.6 で図示されている通り光源の移動方向に対し垂直に延びる。一方 Schwarzschild レンズのような引力モデルの軌道は図 5.4 で図示されている通り楕円に変形する。図 5.4 と 5.6 は各 n 及び $\hat{\beta}_0$ の斥力モデルによる光中心の残差が対応する $\varepsilon > 0$ のそれと同等であることを示す。

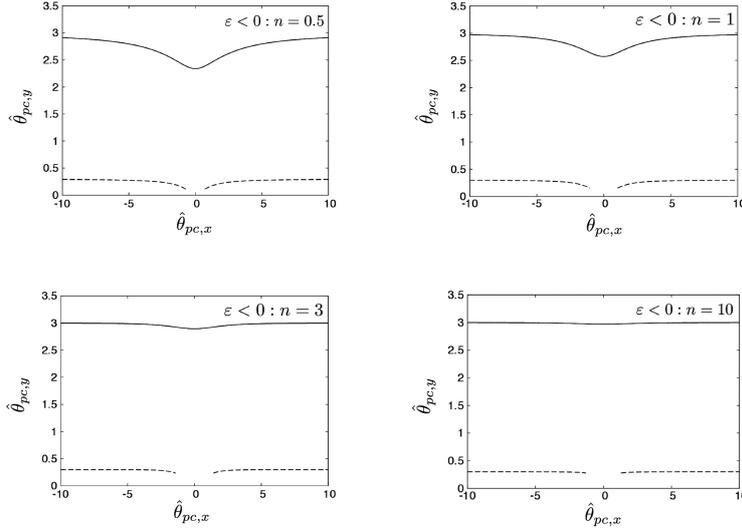


図 5.5: $\varepsilon < 0$ (凹型斥力モデル) での光中心の軌道。実線と破線はそれぞれ $\hat{\beta}_0 = 3, \hat{\beta}_0 = 0.3$ に対応する。光源の直線運動にそった横軸は $\hat{\theta}_{pc,x}$ 、縦軸は $\hat{\theta}_{pc,y}$ である。破線は $\hat{\beta}$ の小さいところでは現れない。これはその範囲では像が現れないためである。左上: $n = 1$ 、右上: $n = 2$ 、左下: $n = 3$ 、右下 $n = 10$ 。

5.1.4 パラメータ概算

アインシュタインリング半径の定義式

$$\theta_E = \left(\frac{\varepsilon D_{LS}}{D_S D_L^n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (\theta > 0)$$

$$\theta_E = \left(\frac{|\varepsilon| D_{LS}}{D_S D_L^n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (\theta < 0)$$

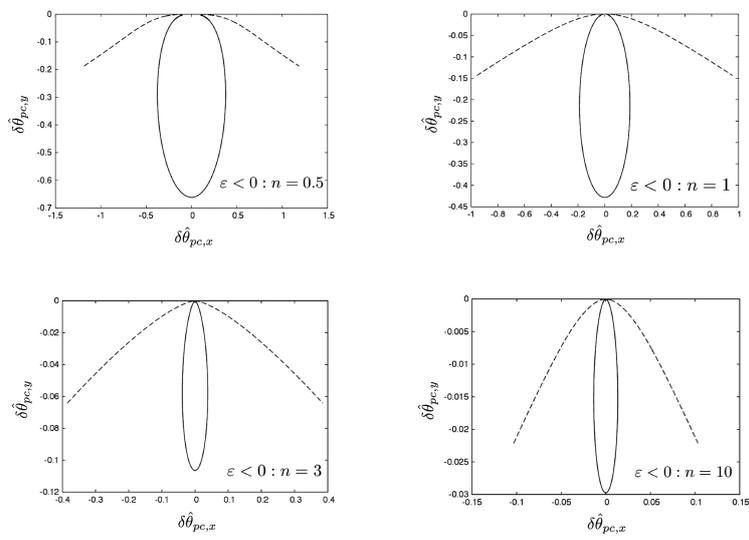


図 5.6: $\varepsilon < 0$ (凹型斥力モデル)での光中心の残差 $\delta\hat{\theta}_{pc}$ 。実線と破線はそれぞれ $\hat{\beta}_0 = 3, \hat{\beta}_0 = 0.3$ に対応する。光源の直線運動にそった横軸は $\delta\hat{\theta}_{pc,x}$ 、縦軸は $\delta\hat{\theta}_{pc,y}$ である。破線は $\hat{\beta}$ の小さいところでは閉じていない。これはその範囲では像が現れないためである。左上: $n = 1$ 、右上: $n = 2$ 、左下: $n = 3$ 、右下 $n = 10$ 。

より、

$$\begin{aligned}\frac{|\bar{\varepsilon}|}{R_E^n} &= \frac{D_S R_E}{D_{LS} D_L} \\ &= \frac{D_S \theta_E}{D_{LS}}\end{aligned}\quad (5.5)$$

$D_L, D_S, D_{LS}, R_E = D_L \theta_E$ は観測可能量、 $\bar{\varepsilon}, n$ はモデルパラメータである。 $\bar{\varepsilon}/R_E^n$ は曲がり角の典型的なサイズと同等である。

(5.5) の右辺は観測可能量であり無次元量である。従って、(5.5) は観測から $|\bar{\varepsilon}|/R_E^n$ を研究することを可能にする。表 5.1, 5.2 はバルジと LMC レンズのアイنشユタイン半径と横断時間、モデルパラメータの表である。Gaia や JASMINE 等の天文学宇宙ミッションはマイクロアークセカンド程度の精度 ($R_E > 10^{-11}$ [km]) を持っていることが期待されている。ミッション年数は大雑把に数年程度である。このことから表 5.1 は制限 $|\bar{\varepsilon}|/R_E^n < 10^{-7}$ (Bulge) を、表 5.2 は制限 $|\bar{\varepsilon}|/R_E^n < 10^{-8}$ (LMC) を与える。結果として制限は $10^{-11} < |\bar{\varepsilon}|/R_E^n < 10^{-7}$ で与えられる。

大きな n のモデルの光中心の残差は複雑な曲線を描く。数値計算より $\varepsilon > 0, n > 2$ のモデルは蝶ネクタイ型である。図 5.7 は $n = 2.0, 2.1, 2.2, 2.3$ の数値計算結果である。この図より蝶ネクタイ型は $n > 2$ で現れることがわかる。様々なパラメータ値の数値計算より、ループと結び目の最大値はそれぞれ 3 と 1 である。

5.2 結果と考察

この章では新奇な物質・エネルギーや修正重力理論に基づいた距離の逆 n ベキ時空による重力レンズモデルの光中心とその残差を求めた。 n が大きくなると光中心の残差は蝶ネクタイのような曲線を描く。

蝶ネクタイ型のような特徴的な形は天文観測での局所的なダークマターエネルギー、マターの探査 (もしくは制限) の為に使用されるだろう。Gaia や JASMINE 等の天文学宇宙ミッションは、ミッション年数を数年程度と仮定した時、マイクロアークセカンド程度の精度 ($10^{-11} < |\bar{\varepsilon}|/R_E^n < 10^{-7}$) を持っていることが期待されている。凹面タイプの斥力モデルでの光中心は光源の運動方向とは垂直に歪む。一方 Schwarzschild のような凸面タイプのモデルでは接線方向に歪む。有効な力が斥力であるため斥力モデルによる光中心は常に負である。目に見えないレンズオブジェクトにつ

表 5.1: Bulge と LMC のレンズのアイシュタイン半径とモデルパラメータ。 θ_E はアイシュタイン半径角、 R_E はアイシュタイン半径、 $\bar{\varepsilon}, n$ はモデルパラメータ。 Bulge では $D_S = 8kpc, D_L = 4kpc$ 、 LMC では $D_S = 50kpc, D_L = 25kpc$ 。

$\theta_E(mas)$	Bulge		LMC	
	$R_E(km)$	$\frac{\bar{\varepsilon}}{R_E^n}$	$R_E(km)$	$\frac{\bar{\varepsilon}}{R_E^n}$
10^{-3}	6.0×10^5	1.0×10^{-11}	3.7×10^6	1.0×10^{-11}
10^{-2}	6.0×10^6	1.0×10^{-10}	3.7×10^7	1.0×10^{-10}
10^{-1}	6.0×10^7	1.0×10^{-9}	3.7×10^8	1.0×10^{-9}
1	6.0×10^8	1.0×10^{-8}	3.7×10^9	1.0×10^{-8}
10	6.0×10^9	1.0×10^{-7}	3.7×10^{10}	1.0×10^{-7}
10^2	6.0×10^{10}	1.0×10^{-6}	3.7×10^{11}	1.0×10^{-6}
10^3	6.0×10^{11}	1.0×10^{-5}	3.7×10^{12}	1.0×10^{-5}

表 5.2: Bulge 及び LMC レンズでのアイシュタイン半径横断時間。 t_E はアイシュタイン半径横断時間。 Bulge の場合、 $D_S = 8kpc, D_L = 4kpc$ 、 LMC の場合、 $D_S = 50kpc, D_L = 25kpc$ 。 速度 v_T は $220km/s$ 。 この表ではアイシュタイン半径はアイシュタイン半径横断時間の定義から $R_E = v_T \times t_E$ として計算される。

$t_E(day)$	$R_E(km)$	$\frac{\bar{\varepsilon}}{R_E^n} [Bulge]$	$\frac{\bar{\varepsilon}}{R_E^n} [LMC]$
10^{-3}	1.9×10^4	3.1×10^{-13}	5.0×10^{-14}
10^{-2}	1.9×10^5	3.1×10^{-12}	5.0×10^{-13}
10^{-1}	1.9×10^6	3.1×10^{-11}	5.0×10^{-12}
1	1.9×10^7	3.1×10^{-10}	5.0×10^{-11}
10	1.9×10^8	3.1×10^{-9}	5.0×10^{-10}
10^2	1.9×10^9	3.1×10^{-8}	5.0×10^{-9}
10^3	1.9×10^{10}	3.1×10^{-7}	5.0×10^{-8}

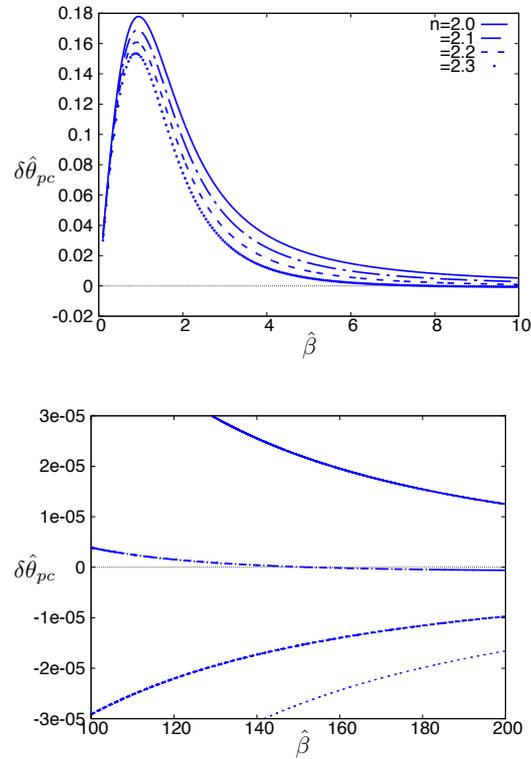


図 5.7: $\epsilon > 0$ (凸タイプ斥力モデル)での光中心 $\delta\hat{\theta}_{pc}$, $\hat{\beta}$ 。実線、鎖線、破線、点線はそれぞれ $n = 2.0, 2.1, 2.2, 2.3$ に対応する。横軸はアインシュタイン半径で規格化された光源の位置 $\hat{\beta}$ 、縦軸は $\delta\hat{\theta}_{pc}$ である。上: $\hat{\beta} \in [0, 10]$ 。下: $\hat{\beta} \in [100, 200]$

いては負の光中心は正の光中心とはほとんど区別できない。このことにより、位置天文学では斥力モデルを調査するのは比較的難しいだろう。

第6章 重力凹レンズによる光の 負の時間の遅れ

ここでは重力凹レンズによる光の到達時間の遅れについて述べる。時間の遅れによるパルサータイミングの変化についても同様である。結果としてまず、時間の遅れの符号と曲がり角の符号は同じであることを示す。また時間の遅れはパラメータ n の増加に伴い減少する。さらに、銀河中で観測可能なパルサータイミングのパラメータ範囲について議論する。

6.1 時間の遅れとパルス周波数変移

6.1.1 光のシグナルの時間の遅れ

$ds^2 = 0$ を光のシグナルに適用することによって、軌道方程式は

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{r^n}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{r^n}\right) \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{r^n}\right)\right] + O(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (6.1)$$

として与えられる。インパクトパラメータ b は最近接距離 r_0 と

$$b^2 = \frac{r_0^2}{1 - \frac{\varepsilon_1}{r_0^n}} \quad (6.2)$$

として関連づけられる。光源 (S) からレシーバー (R) までの光子の飛行時

間は

$$\begin{aligned}
 t(S \rightarrow R) &\equiv \int_{r_S}^{r_R} dt \\
 &= \int_{r_S}^{r_R} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{\frac{r_0^2}{r^2} \varepsilon_1 \left(1 - \frac{r_0^n}{r^n}\right)}{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} - \frac{\tilde{\varepsilon}}{r^n}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \\
 &\quad + O(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

となる。ここで $\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ である。光子の経路については図 6.1 を参照する。

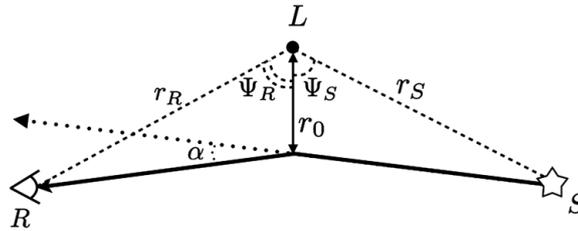


図 6.1: 信号を発する光源と信号を受け取る観測者、レンズの配置の概略図。それぞれ S,R,L で表されている。光源と観測者に対応する角度はそれぞれ Ψ_S, Ψ_R に対応する。

その飛行時間から平坦時空の時間を引くことによって時間の遅れは

$$\delta t = \frac{1}{r_0^{n-1}} \int_{\Psi_S}^{\Psi_R} \left(\frac{\varepsilon_1 (1 - \cos^n \Psi)}{\sin^2 \Psi} + \tilde{\varepsilon} \cos^{n-2} \Psi \right) d\Psi \tag{6.4}$$

として与えられる。 Ψ_R と Ψ_S はそれぞれ、レンズからレシーバーへの方向、レンズから光源への方向に対応する。一般の n では式 6.4 の積分は必ずしも初等関数で表されるとは限らない。従って数値計算が必要となる。しかしながら n が整数である場合、三角関数のべきの積分は可能で

ある [91]。 $n = 1$ では式 (6.4) は

$$\delta t_1 = \varepsilon_1 \left[\frac{r_R}{\chi_R} + \frac{r_S}{\chi_S} - \left(\frac{r_0}{\chi_R} + \frac{r_0}{\chi_S} \right) \right] + \tilde{\varepsilon} \left[2 \ln \frac{(r_R + \chi_R)(r_S + \chi_S)}{r_0^2} \right] \quad (6.5)$$

となる。これは Schwarzschild 時空に等しい $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ となる場合シャピロの遅れの公式と一致する。ここで $x_R \equiv \sqrt{r_R^2 - r_0^2}$, $x_S \equiv \sqrt{r_S^2 - r_0^2}$ である。 $n = 2$ では

$$\delta t_2 = \frac{\varepsilon_1 + \tilde{\varepsilon}}{r_0} \left(\arccos \frac{r_0}{r_R} + \arccos \frac{r_0}{r_S} \right) \quad (6.6)$$

として与えられる。次に n が偶数の場合 ($n = 2p$) を考える。 p は正の整数である。この時

$$\begin{aligned} \delta t_{2p} = & \frac{\varepsilon_1}{r_0^{2p-1}} \left\{ -\cot \Psi_R + \frac{\cos^{2p+1} \Psi_R}{\sin \Psi_R} \right. \\ & + \frac{(2p-1)!!}{(2p-2)!!} \sin \Psi_R \sum_{r=0}^{P-1} \frac{(2p-2r-2)!!}{(2p-2r-1)!!} \cos^{2p-2r-1} \Psi_R \\ & - \cot \Psi_S + \frac{\cos^{2p+1} \Psi_S}{\sin \Psi_S} \\ & \left. + \frac{(2p-1)!!}{(2p-2)!!} \sin \Psi_S \sum_{r=0}^{P-1} \frac{(2p-2r-2)!!}{(2p-2r-1)!!} \cos^{2p-2r-1} \Psi_S \right\} \\ & + \frac{\tilde{\varepsilon}}{r_0^{2p-1}} \frac{(2p-3)!!}{(2p-2)!!} \left\{ \sin \Psi_R \sum_{r=0}^{P-2} \frac{(2p-2r-4)!!}{(2p-2r-3)!!} \cos^{2p-2r-3} \Psi_R \right. \\ & \quad + \Psi_R \\ & \quad + \sin \Psi_S \sum_{r=0}^{P-2} \frac{(2p-2r-4)!!}{(2p-2r-3)!!} \cos^{2p-2r-3} \Psi_S \\ & \quad \left. + \Psi_S \right\} \quad (6.7) \end{aligned}$$

が得られる。 $(2p-1)!!$ は $(2p-1)(2p-3)\cdots 1$ を意味する。

次に $n = 2p+1$ の場合を考える。この時

$$\begin{aligned}
\delta t_{2p+1} = & \frac{\varepsilon_1}{r_0^{2p}} \left\{ -\cot \Psi_R + \frac{\cos^{2p+2} \Psi_R}{\sin \Psi_R} \right. \\
& + \frac{(2p)!!}{(2p-1)!!} \sin \Psi_R \sum_{r=0}^p \frac{(2p-2r-1)!!}{(2p-2r)!!} \cos^{2p-2r} \Psi_R \\
& - \cot \Psi_S + \frac{\cos^{2p+2} \Psi_S}{\sin \Psi_S} \\
& \left. + \frac{(2p)!!}{(2p-1)!!} \sin \Psi_S \sum_{r=0}^p \frac{(2p-2r-1)!!}{(2p-2r)!!} \cos^{2p-2r} \Psi_S \right\} \\
& + \frac{\tilde{\varepsilon}}{r_0^{2p} (2p-1)!!} \left\{ \sin \Psi_R \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(2p-2r-3)!!}{(2p-2r-2)!!} \cos^{2p-2r-2} \Psi_R \right. \\
& \left. + \sin \Psi_S \sum_{r=0}^{p-1} \frac{(2p-2r-3)!!}{(2p-2r-1)!!} \cos^{2p-2r} \Psi_S \right\} \quad (6.8)
\end{aligned}$$

が得られる。

ここまで積分は近似なしで計算してきた。天文学的なシチュエーションでは光の最近接距離はレンズから光源、観測者までの距離よりも遙かに小さい。従ってこの場合、 $r_S/r_0 \rightarrow \infty, r_R/r_0 \rightarrow \infty$ とする極限をとることができる。これより $\Psi_R \rightarrow \pi/2, \Psi_S \rightarrow -\pi/2$ が導かれる。よって上記の表式は簡略化することができる。 $n = 2p$ では

$$\delta t_{2p} = \pi \frac{(2p-3)!! (2p-1)\varepsilon_1 + \tilde{\varepsilon}}{(2p-2)!! r_0^{2p-1}} \quad (6.9)$$

が得られる。 $n = 2p+1$ では

$$\delta t_{2p+1} = 2 \frac{(2p-2)!! 2p\varepsilon_1 + \tilde{\varepsilon}}{(2p-1)!! r_0^{2p}} \quad (6.10)$$

が得られる。 $\cos(\pm\pi/2) = 0$ であるため、式(6.7)、(6.8)の多くの項は式(6.9)、(6.10)において寄与しない。その一方で $[\cos \Psi]^0 = 1$ であることに注意する。表式(6.9)、(6.10)は、 r_R と r_S が大きい場合、時間の遅れ δt は $n\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ と $r_0^{-(n-1)}$ に比例することを示唆する。時間の遅れの符号が光の曲がり角の符号と同じであることを注意する。 $\varepsilon > 0$ での時間の遅れ δ_t は r_0 を除いて至る所で r_0 の下方への凸関数である。その一方で、 $\varepsilon < 0$ での時間の遅れ δ_t は上方への凸関数である。図6.2はrレンズ天体に対するシグナルの放射源の運動を概略的に表している。放射源及びレ

レンズ天体は短時間の観測の中で直線運動しているものと仮定する。これにより $r_0(t) = \sqrt{r_{min}^2 + v^2 t^2}$ ととることができる。ここで v は視線方向に対するレンズと光源間の相対速度の横軸成分である。 r_{min} は r_0 の最小値であり、 $t = 0$ は一般性を損なわず $r_0 = r_{min}$ の通過時間として選ばれる。6.3 左図は $n = 1, 2, 3, 4$ での正の時間の遅れの曲線を表している。6.3 右図は $\varepsilon < 0$ での負の時間の遅れに対応する。

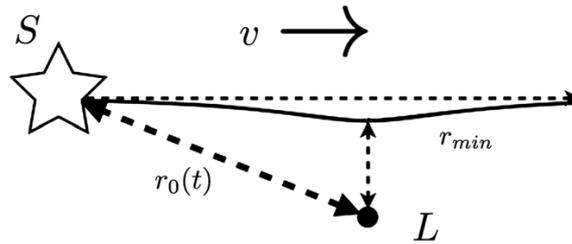


図 6.2: レンズ (L) に対する光源 (S) の運動の概略図。それらの位置は天球面上に射影されている。実線はレンズ平面上に射影された、レンズの影響を受けた光源の運動を表す。レンズの影響を受けない光源の運動は点線で表されている。光の最近接距離は時間の関数であり、 $r_0(t)$ で定義される。その最小値は r_{min} とする。

6.1.2 パルス周波数変移

次に、時間の遅れによって引き起こされたパルス周波数変移について述べる (図 6.4 参照)。大抵の天文学的なシチュエーションでは観測者は光の放射の正確な時間を知ることはできない。複数の像の到達時間差は測定可能であるにも関わらず、単一の像の時間の遅れは直接測定できない [102]。光信号の往復時間は Voyager や Cassini のような探査機によって直接測定可能であることに注目する。一方で、光信号の放射源がレンズ天体に対して運動する場合、時間の遅れによって引き起こされる周波数シフトは直接観測可能となる [87]。

時間の遅れによるパルス周波数変移 y は

$$y \equiv -\frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{d(\delta t)}{dt} \quad (6.11)$$

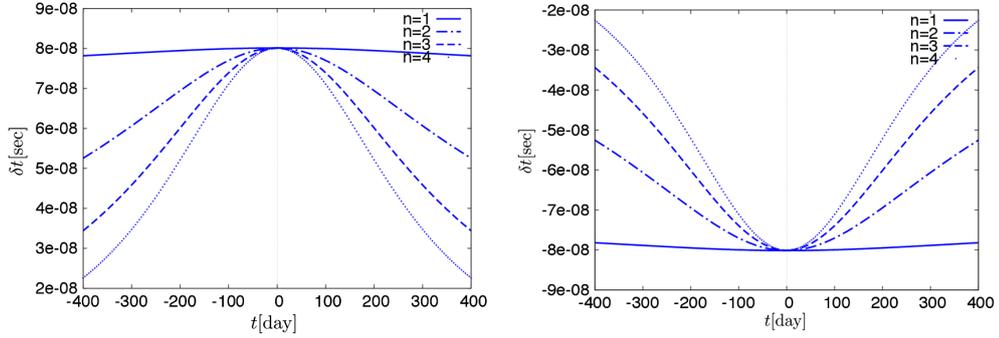


図 6.3: $\varepsilon > 0$ (左), $\varepsilon < 0$ (右) での時間の遅れ。実線、鎖線、破線、点線はそれぞれ $n = 1, 2, 3, 4$ に対応する。横軸は時間 t (日)、縦軸は時間の遅れ δt (秒) を意味する。ここでは $r_{min} = 40[AU]$ 、 $v = 200[km/s]$ を仮定している。レンズは $n = 1$ で $10M_{\odot}$ ブラックホールを仮定している。他の n のパラメータは時間の遅れのピークの高さを揃えるように選択した。

として定義される。 ν_0 は光の固有パルス周波数を表し、 $\nu(t)$ は時刻 t で観測された固有パルス周波数を意味する。図 6.4 が示すように、光源がレンズに近づいた場合 $y < 0$ となり、離れた場合 $y > 0$ となる。 y の表式は整数 n では簡略化されるが、一般的には長くなる。まず式 (6.7)、(6.8) を時間に対して微分する。ここで

$$\frac{d\Psi_I}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{r_I^2 - r_0^2}} \frac{dr_0}{dt} \quad (6.12)$$

を使う。 $I = R, S$ である。次に $\Psi_R \rightarrow \pi/2$ と $\Psi_S \rightarrow -\pi/2$ という極限をとる。

$n = 2p$ ではパルス周波数変移は

$$y_{2p} = \frac{\pi (2p-1)!!}{c (2p-2)!!} \frac{\varepsilon}{r_0^{2p+1}} v^2 t \quad (6.13)$$

で与えられる。 $n = 2p+1$ では

$$y_{2p+1} = \frac{2 (2p)!!}{c (2p-1)!!} \frac{\varepsilon}{r_0^{2p+2}} v^2 t \quad (6.14)$$

となる。

図 6.5 左は $n = 1, 2, 3, 4$ での $\varepsilon > 0$ のパルス周波数変移を表している。この図は各 n での y の振る舞いを見るためにピーク位置が揃うよう、適

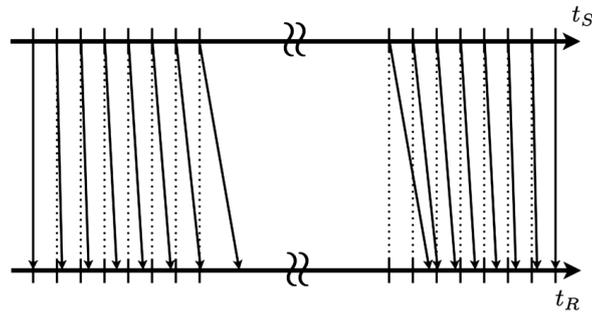


図 6.4: 時間の遅れによるパルス周波数変移を模した図。二つある水平軸のうち、上の水平軸は光源の時計で測定された時間を表す t_S に、もう一方はレシーバーで測定された時間を表す t_R にそれぞれ対応する。二つある上の水平軸から下の水平軸を結ぶ線は、点線が時間の遅れがない場合に、実線はある場合にそれぞれ対応する。光のシグナルは同じ時間感覚で発せられるとする。この時、シグナルの固有パルス周波数は一定である。光源がレンズ天体に接近している場合、各シグナルの時間の遅れは増加していく。従って観測されるパルス周波数は固有パルス周波数よりも低い。逆に光源がレンズ天体から離れていく場合、各シグナルの時間の遅れは減少し、従って観測されるパルス周波数は固有パルス周波数よりも高い。

切な r_0 の値を設定した。パルス周波数変移曲線は n が増加するとともにより急速に落ちこむ。これは n の増加とともに重力ポテンシャルがより速く減少するためである [式 (2.74) 参照]。方程式 (6.13)、(6.14) は大きい $|t|$ では $y \propto t/r_0^{n+1} \propto t^{-n}$ となることを示唆している。

6.1.3 パルサータイミング法

時間の遅れの測定には二つの観測量がある。一つは図 6.3 左と図 6.5 左の曲線の高さに対応する時間の遅れの振幅である。もう一つは図 6.3 右と図 6.5 右の曲線の幅に対応する継続時間である。表式 (6.9)、(6.10) は時間の遅れの大きさが

$$\delta t \sim \frac{1}{c} \varepsilon r_0^n \quad (6.15)$$

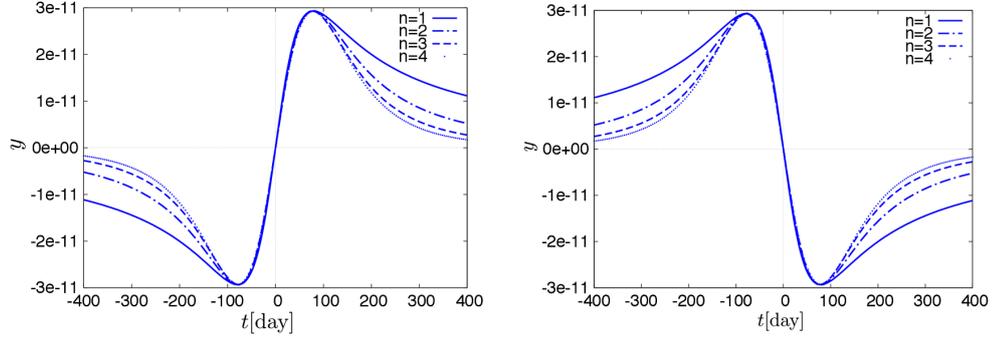


図 6.5: 図 6.3 に対応する $\varepsilon > 0$ (左), $\varepsilon < 0$ (右) でのパルス周波数変移。曲線のピークを $n = 1$ にあわせている。

で与えられることを示す。継続時間の大きさはおよそ

$$T_{td} \sim \frac{\delta t}{\left(\frac{d(\delta t)}{dt}\right)} \sim \frac{r_0}{v} \quad (6.16)$$

で与えられる。新規な物質の運動には確立された理論がないので、 v は銀河の典型的な回転速度のオーダーを持つものとする。現在のパルサータイミング測定はおおのこのパルサーに対し、年数回行われている。タイミング到着分散の二乗平均平方根の残差はパルサーに依存しており、ほぼ $100 - 1$ ナノ秒 (ns) である。最近接の適切な値は

$$r_0 \sim 40AU \left(\frac{T_{td}}{1year}\right) \left(\frac{v}{200km/s}\right) \quad (6.17)$$

である。新奇なレンズのポテンシャルはおよそ

$$\frac{\varepsilon}{r_0^n} \left(\sim 10^{-11} \frac{\delta t}{100ns}\right) \quad (6.18)$$

である。これはパルス周波数変移 $y \sim 10^{-15}$ に対応する。この精度はすでにミリ秒パルサーで得られている [92,93]。新奇なレンズモデルの数密度に与える制限を考える。レンズ天体が体積 $v \sim \pi r_0^2 D_S$ の円筒内に侵入したとき、一つのイベントが検知されるだろう。有効的なサーベイの大きさは観察されたパルサーの数 N_{zp} とパルサータイミングプロジェクトのトータルの継続時間 T_{pt} の両方に比例する。従って、レンズ天体の数密

度は

$$\Omega_L < 10^3 pc^{-3} \left(\frac{40AU}{r_0} \right)^2 \left(\frac{1kpc}{D_S} \right) \left(\frac{10year}{T_{pt}} \right) \quad (6.19)$$

と制限される。この制限はとても小さく見えるが、興味深い。なぜなら $n > 1$ では無限遠方で質量 0 であり、新奇な物質は星の運動や銀河の回転等の観測により制限されるとは思えないからである。

6.2 結果と考察

距離の逆 n べき時空のレンズモデルでの光の到着時間の遅れ及びパルス周波数変移を調査した。重力凸レンズによる時間の遅れはレンズモデルがたとえエリスワームホールのように負のコンバージェンスを持つものであっても正になるだろう。一方、重力凹レンズによる時間の遅れはレンズモデルのコンバージェンスが正であっても負になるであろう。

Janis-Newman-Winicour 計量を使用することによって、Virbhadra と Keeton [36]、DeAndrea と Alexander [89] は強い裸の特異点 (どのような光子球によっても覆われない特異点のこと) によって負の時間の遅れが引き起こされることを示した。このことから負の時間の遅れには強重力場が必要であると考えられた。しかし、様々な時空モデルを元にした今回の研究から、負の時間の遅れは弱場でも引き起こされることが示された。最後に先行研究 [?, 70, 90] との比較について言及する。彼らは負のコンバージェンスと密接に関連するレンズ効果中に奇妙な特徴を発見した。一方でこの論文では、コンバージェンスが正であっても負の時間の遅れが重力凹レンズによって引き起こされることを示した。

第7章 結論

この論文では、多体の重力レンズの解析的研究と一般的な計量による重力レンズとそれに伴う現象、または観測への応用について議論した。

研究1：多体系による重力場中の光の軌道方程式に対する摂動解法の構築

研究2：Schwarzschild 時空やワームホールと呼ばれる時空間トンネルのような構造を持った時空、またそれらをさらに一般化した計量を用いた重力レンズに関する物理量の計算とそれらを発見する手法の立案

研究3：木星質量程度のダークマターハローによるマイクロレンズ効果と観測可能性の議論

研究1では高次の方程式である多数の天体による重力場中の光の軌道方程式を、ある一つの天体とそれ以外の天体との質量比が微量であるとしてテイラー展開することで、摂動解を導いた。研究1の特色として、複数のレンズ天体間同士の視線方向の距離を違うものとして計算することに成功したことと、レンズ方程式を天体の質量比を展開パラメータとして摂動的に解いたことが挙げられる。本研究の前には複数のレンズ天体が同じ距離にあるとした計算しか行われていなかった。またこの研究は、解析的手法により光の経路を与え、かつ、モデルのパラメータ依存性を明らかにしたという点で特徴的である。今後の研究として現在の最新の数値計算結果と比較することが挙げられる。

研究2では質量等の時空構造を特徴付けるパラメータを ε 、計量と呼ばれる2点間の距離を表す量において平坦時空からのずれを空間の中心からの距離 r の関数として r^{-n} と表し、パラメータやパラメータ依存性に任意性を持たせた時空構造を仮定し、重力レンズに関する物理量を求めた。結果として、光の曲がり角、像の変形、増光曲線、光中心、時間の遅れといった観測可能量を得た。この時空は、Schwarzschild 時空とエリスワームホールの計量の成分がそれぞれ距離の-1乗、-2乗であることから推定

し考案された。研究2の特色は、Schwarzschild時空やワームホール、またはボイド等を含んだ計量を用いて重力レンズに関する物理量を計算することで様々な時空の性質を包括的に扱うことができるという点である。今後の研究として、重力レンズシミュレーションはより現実的な天体を対称として研究することが、光中心は正と負の光中心の区別が、それぞれ挙げられる。

謝辞

学院博士後期課程における研究活動及び本論文の執筆にあたり、浅田秀樹教授には適切で丁寧な指導並びに議論をしていただきました。心より深謝の意を表します。また、院生ゼミ等を通じて様々な助言を頂きました仙洞田雄一助教に感謝いたします。

上記以外の研究室の皆様とも数多くの議論を行い、励まし合い、研究を有意義に進めることが出来ましたことを嬉しく思っています。改めて感謝の言葉を述べさせていただきます。本当にありがとうございました。

付録A ダークマターハロー

ここではダークハローによる光の曲がりと増光について議論する。

A.1 ダークマターハローの密度分布

ハローや銀河のように点として見なせない広がった天体をレンズ物体とした重力レンズを考える際よく用いられるレンズモデルは SIS 又はコア入り SIS である。しかしこれらのレンズモデルではダークハローを再現することはできない。なぜならダークハローの密度分布は中心に近づくに従い密度の変化が急になり、SIS のような単純なモデルではそれを表現することはできないからだ。よって、本論文では SIS 以外の密度分布を用いることにする。

ダークハローの密度分布として有力視されているものの一つに NFW プロファイルと呼ばれる密度分布がある。

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{1.5} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^{1.5}} \quad (\text{A.1})$$

また近年では高精度の N 体計算より、中心付近のべきがさらにきつくなったモデルも考案されている。本論文ではべきをパラメータ化した密度分布である generalized NFW を用いる。この密度プロファイルは次式で与えられる。

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^\gamma \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^{3-\gamma}} \quad (\text{A.2})$$

A.2 重力レンズ

A.2.1 質量面密度

Σ

ダークマターハローの表面密度を求める。表面密度は式 (A.2) を視線方向に積分することにより得られる。

この積分は $\alpha = 0, 1, 2$ の時積分を計算することができる。

Σ

$\theta < 1$

$$\Sigma = 2\rho_s r_s \left\{ \frac{2}{(1-\theta^2)^{\frac{3}{2}}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} - \frac{1}{1-\theta^2} \right\} \quad (\text{A.3})$$

$\theta > 1$

$$\Sigma = 2\rho_s r_s \left\{ -\frac{2}{(\theta^2-1)^{\frac{3}{2}}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\theta-1}{\theta+1}} + \frac{1}{\theta^2-1} \right\} \quad (\text{A.4})$$

$\theta < 1$

$$\Sigma = 2\rho_s r_s \left\{ \frac{\pi}{2\theta} - \frac{2}{\sqrt{1-\theta^2}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} \right\} \quad (\text{A.5})$$

$\theta > 1$

$$\Sigma = 2\rho_s r_s \left\{ \frac{\pi}{2\theta} - \frac{2}{\sqrt{\theta^2-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\theta-1}{\theta+1}} \right\} \quad (\text{A.6})$$

A.2.2 レンズ方程式

レンズ方程式

レンズ方程式に (A.2) を代入すると、
 $\gamma = 1$ では

$$\begin{aligned}
\beta &= \theta - A \left\{ \frac{1}{\theta} \log \frac{\theta}{2} + \frac{2}{\theta \sqrt{1-\theta^2}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} \right\} \\
&= \theta - \left(\frac{\sqrt{3} D_{OL} \theta_E}{r_s} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\theta} \log \frac{\theta}{2} + \frac{2}{\theta \sqrt{1-\theta^2}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} \right\} \quad (\text{A.7}) \\
&\hspace{15em} \text{for } 0 \leq \theta \leq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \theta - A \left\{ \frac{1}{\theta} \log \frac{\theta}{2} + \frac{2}{\theta \sqrt{\theta_I^2 - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\theta-1}{\theta+1}} \right\} \\
&= \theta - \left(\frac{\sqrt{3} D_{OL} \theta_E}{r_s} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\theta} \log \frac{\theta}{2} + \frac{2}{\theta \sqrt{\theta_I^2 - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\theta-1}{\theta+1}} \right\} \quad (\text{A.8}) \\
&\hspace{15em} \text{for } \theta \geq 1
\end{aligned}$$

$\gamma = 2$ では

$$\begin{aligned}
\beta &= \theta - A \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\theta} \log \frac{\theta}{2} + \frac{2\sqrt{1-\theta^2}}{\theta} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} \right\} \\
&= \theta - \left(\frac{\sqrt{3} D_{OL} \theta_E}{r_s} \right)^2 \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\theta} \log \frac{\theta}{2} + \frac{2\sqrt{1-\theta^2}}{\theta} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}} \right\} \quad (\text{A.9}) \\
&\hspace{15em} \text{for } 0 \leq \theta \leq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \theta - A \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\theta} \log \frac{\theta}{2} - \frac{2\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\theta - 1}{\theta + 1}} \right\} \\
&= \theta - \left(\frac{\sqrt{3} D_{OL} \theta_E}{r_s} \right)^2 \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\theta} \log \frac{\theta}{2} - \frac{2\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\theta - 1}{\theta + 1}} \right\} \\
&\hspace{25em} \text{(A.10)} \\
&\hspace{25em} \text{for } \theta \geq 1
\end{aligned}$$

また

$$A = \frac{16\pi G \rho_s}{c^2} \frac{D_{OL} D_{LS}}{D_{OS}} r_s \quad \text{(A.11)}$$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL} D_{OS}}} \quad \text{(A.12)}$$

である。

A.3 ダークマターハローの光度曲線

次にダークハローの光度曲線を求める。対称としている天体は木星質量程度のコンパクトハローである。光源を LMC 内の星とし、観測者からレンズまでの距離を $1/\sqrt{3}[Gpc]$ とする時、光度曲線は図 (A.1) で与えられる。

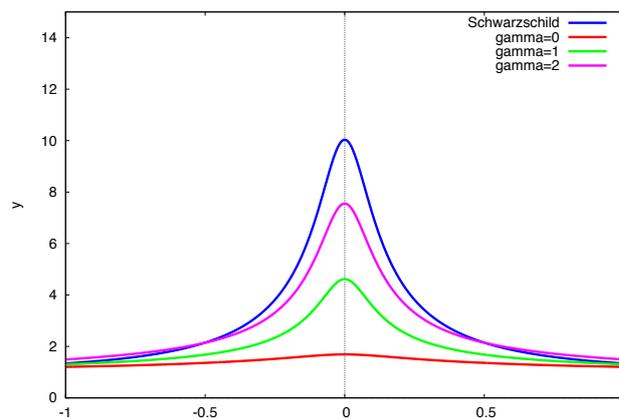


図 A.1: 木星質量程度の Schwarzschild レンズとコンパクトハローによる光度曲線。

参考文献

- [1] B.Paczynski, Ap.J. 304, (1986), 1-5.
- [2] P. Schneider, Extragalactic Astronomy And Cosmology: An Introduction (Springer-Verlag, Heidelberg, 2006), p. 329.
- [3] S. Weinberg, Cosmology (Oxford University Press, Oxford, 2008), p. 433.
- [4] A. Refregier, Annu. Rev. Astron. Astrophys. 41 (2003), 645.
- [5] J. P. Beaulieu et al., Nature 439 (2006), 437.
- [6] I. A. Bond et al., Astrophys. J. 606 (2004), L155.
- [7] A. Gould and A. Loeb, Astrophys. J. 396 (1992), 104.
- [8] S. Mao and B. Paczynski, Astrophys. J. 374 (1991), 37L.
- [9] P. Schneider and A. Weiss, Astron. Astrophys. 164 (1986), 237.
- [10] B. S. Gaudi et al., Science 319 (2008), 927.
- [11] R. Reyes et al., Nature 464 (2010), 256.
- [12] H. Asada, Astron. Astrophys. 390 (2002), L11.
- [13] H. Asada, T. Hamana and M. Kasai, Astron. Astrophys. 397 (2003), 825.
- [14] H. Asada, Mon. Not. R. Astron. Soc. 394 (2009), 818.
- [15] A. O. Petters, H. Levine and J. Wambsganss, Singularity theory and gravitational lensing (Birkh auser, Boston, 2001), p. 445.

- [16] R. R. Bourassa, R. Kantowski and T. D. Norton, *Astrophys. J.* 185 (1973), 747.
- [17] R. R. Bourassa and R. Kantowski, *Astrophys. J.* 195 (1975), 13.
- [18] U. Borgeest, *Astron. Astrophys.* 128 (1983), 162.
- [19] I. Bray, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 208 (1984), 511.
- [20] T. Schramm, *Astron. Astrophys.* 231 (1990), 19.
- [21] H. J. Witt, *Astron. Astrophys.* 236 (1990), 311.
- [22] D. Khavinson and G. Neumann, *Proc. Amer. Math. Soc.* 134 (2006), 1077.
- [23] D. Khavinson and G. Neumann, *Not. Amer. Math. Soc.* 55 (2008), 666.
- [24] S. H. Rhie, [astro-ph/0103463](#).
- [25] S. H. Rhie, [astro-ph/0305166](#).
- [26] R. Blandford and R. Narayan, *Astrophys. J.* 310 (1986), 568.
- [27] H. Yoshida, K. Nakamura and M. Omote, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 358 (2005), 39.
- [28] K. Tomita, H. Asada and T. Hamana, *Prog. Theor. Phys. Suppl. No.* 133 (1999), 155.
- [29] B. L. van der Waerden, *Algebra I* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1966), p. 165.
- [30] S. Hilbert, J. Hartlap, S. D. M. White and P. Schneider, *Astron. Astrophys.* 499 (2009), 31.
- [31] S. Frittelli, T.P.Kling, and E.T.Newman, *Phys. Rev.D* 61, 064021 (2000).
- [32] K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, *Phys. Rev. D* 62, 084003 (2000).
- [33] K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, *Phys. Rev. D* 65, 103004 (2002).

- [34] E. F. Eiroa, G. E. Romero, and D. F. Torres, *Phys. Rev. D* 66, 024010 (2002).
- [35] V. Perlick, *Phys. Rev. D* 69, 064017 (2004).
- [36] K. S. Virbhadra and C. R. Keeton, *Phys. Rev. D* 77, 124014 (2008).
- [37] H. G. Ellis, *J. Math. Phys. (N.Y.)* 14, 104 (1973).
- [38] M. S. Morris and K. S. Thorne, *Am. J. Phys.* 56, 395 (1988).
- [39] M. S. Morris, K. S. Thorne, and U. Yurtsever, *Phys. Rev. Lett.* 61, 1446 (1988).
- [40] M. Visser, *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking* (AIP, New York, 1995).
- [41] L. Chetouani and G. Clement, *Gen. Relativ. Gravit.* 16, 111 (1984).
- [42] G. Clement, *Int. J. Theor. Phys.* 23, 335 (1984).
- [43] M. Safonova, D. F. Torres, and G. E. Romero, *Phys. Rev. D* 65, 023001 (2001).
- [44] A. A. Shatskii, *Astron. Rep.* 48, 525 (2004).
- [45] K. K. Nandi, Y. Z. Zhang, and A. V. Zakharov, *Phys. Rev. D* 74, 024020 (2006).
- [46] F. Abe, *Astrophys. J.* 725, 787 (2010).
- [47] Y. Toki, T. Kitamura, H. Asada, and F. Abe, *Astrophys. J.* 740, 121 (2011).
- [48] N. Tsukamoto, T. Harada, and K. Yajima, *Phys. Rev. D* 86, 104062 (2012).
- [49] N. Tsukamoto and T. Harada, *Phys. Rev. D* 87, 024024 (2013).
- [50] C. Yoo, T. Harada, and N. Tsukamoto, *Phys. Rev. D* 87, 084045 (2013).
- [51] T. K. Dey and S. Sen, *Mod. Phys. Lett. A* 23, 953 (2008).

- [52] A. Bhattacharya and A. A. Potapov, *Mod. Phys. Lett. A* 25, 2399 (2010).
- [53] K. Nakajima and H. Asada, *Phys. Rev. D* 85, 107501 (2012).
- [54] G. W. Gibbons and M. Vyska, *Classical Quantum Gravity* 29, 065016 (2012).
- [55] S. Capozziello, V. F. Cardone, and A. Troisi, *Phys. Rev. D* 73, 104019 (2006).
- [56] Z. Horvath, L. A. Gergely, D. Hobill, S. Capozziello, and M. De Laurentis, *Phys. Rev. D* 88, 063009 (2013).
- [57] S. Mendoza, T. Bernal, X. Hernandez, J.C. Hidalgo, and L.A. Torres, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 433, 1802 (2013).
- [58] H. Asada, *Prog. Theor. Phys.* 125, 403 (2011).
- [59] T. Kitamura, K. Nakajima, and H. Asada, *Phys. Rev. D* 87, 027501 (2013).
- [60] R. Takahashi and H. Asada, *Astrophys. J.* 768, L16 (2013).
- [61] H. Bondi, *Rev. Mod. Phys.* 29, 423 (1957).
- [62] M. Jammer, *Concepts of Mass in Classical and Modern Physics* (Harvard University, Cambridge, MA, 1961).
- [63] M. Jammer, *Concepts of Mass in Contemporary Physics and Philosophy* (Princeton University, Princeton, NJ, 1999).
- [64] J. G. Cramer, R. L. Forward, M. S. Morris, M. Visser, G. Benford, and G. A. Landis, *Phys. Rev. D* 51, 3117 (1995).
- [65] T. Piran, *Gen. Relativ. Gravit.* 29, 1363 (1997).
- [66] この簡略化はあまり知られていない。参考文献 [[102]] でもこれについて触れておらず、ヤコビ行列の非対角成分の明示的な計算を行っているのみである。

- [67] Z. Horvath, L. Gergely, and D. Hobill, *Classical Quantum Gravity* 27, 235006 (2010).
- [68] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, and V. Rezanian, *Phys. Lett. B* 487, 1 (2000).
- [69] G. Gibbons and H. Kodama, *Prog. Theor. Phys.* 121, 1361 (2009).
- [70] K. Izumi, C. Hagiwara, K. Nakajima, T. Kitamura, and H. Asada, *Phys. Rev. D* 88, 024049 (2013).
- [71] M. A. Walker, *Astrophys. J.* 453, 37 (1995).
- [72] M. Miyamoto and Y. Yoshii, *Astron. J.* 110, 1427 (1995).
- [73] M. Hosokawa, K. Ohnishi, and T. Fukushima, *Astron. J.* 114, 1508 (1997).
- [74] N. Safizadeh, N. Dalal, and K. Griest, *Astrophys. J.* 522, 512 (1999).
- [75] Y. Jeong, C. Han, and S. Park, *Astrophys. J.* 511, 569 (1999).
- [76] G. F. Lewis and X. R. Wang, *Prog. Theor. Phys.* 105, 893 (2001).
- [77] H. Asada, *Astrophys. J.* 573, 825 (2002).
- [78] C. Han and C. Lee, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 329, 163 (2002).
- [79] C. Claudel, K. S. Virbhadra, and G. F. R. Ellis, *J. Math. Phys.* 42, 818 (2001).
- [80] K. S. Virbhadra, *Phys. Rev. D* 79, 083004 (2009).
- [81] K. S. Virbhadra, D. Narasimha, and S. M. Chitre, *Astron. Astrophys.* 337, 1 (1998).
- [82] M. Visser, *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking* (AIP, New York, 1995).
- [83] N. Tsukamoto, T. Kitamura, K. Nakajima, and H. Asada, *Phys. Rev. D* 90, 064043 (2014).

- [84] B. Kleihaus, J. Kunz, and E. Radu, *Phys. Rev. Lett.* 106, 151104 (2011).
- [85] P. Kanti, B. Kleihaus, and J. Kunz, *Phys. Rev. D* 85, 044007 (2012).
- [86] C. M. Will, *Living Rev. Relativity* 9, 3 (2006).
- [87] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, *Nature (London)* 425, 374 (2003).
- [88] H. Asada, *Phys. Lett. B* 661, 78 (2008).
- [89] J. P. DeAndrea and K. M. Alexander, *Phys. Rev. D* 89, 123012 (2014).
- [90] T. Kitamura, K. Izumi, K. Nakajima, C. Hagiwara, and H. Asada, *Phys. Rev. D* 89, 084020 (2014).
- [91] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th ed. (Academic Press, New York, 2007), p. 151.
- [92] G. Hobbs et al., *Classical Quantum Gravity* 27, 084013 (2010).
- [93] N. Yunes and X. Siemens, *Living Rev. Relativity* 16, 9 (2006).
- [94] M. A. Walker, *Astrophys. J.* 453, 37 (1995).
- [95] M. Miyamoto and Y. Yoshii, *Astron. J.* 110, 1427 (1995).
- [96] M. Hosokawa, K. Ohnishi, and T. Fukushima, *Astron. J.* 114, 1508 (1997).
- [97] N. Safizadeh, N. Dalal, and K. Griest, *Astrophys. J.* 522, 512 (1999).
- [98] Y. Jeong, C. Han, and S. Park, *Astrophys. J.* 511, 569 (1999).
- [99] G. F. Lewis and X. R. Wang, *Prog. Theor. Phys.* 105, 893 (2001).
- [100] H. Asada, *Astrophys. J.* 573, 825 (2002).
- [101] C. Han and C. Lee, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 329, 163 (2002).
- [102] P. Schneider, J. Ehlers, and E.E. Falco, *Gravitational Lenses* (Springer, New York, 1992).