

# 不確実性と設備投資

嶋 恵 一

## 要旨：

投資のサンクコストと収益の不確実性により設備投資の延期にオプション価値が生じる場合、投資を行う  $q$  の下限は 1 にオプション価値を加えたものとなる。このことは、従来の NPV 基準についても変更をもたらし、NPV がゼロを上回る投資プロジェクトについても、それがオプション価値を上回らない限り投資は行われなことを導く。以上をフローレベルで見た場合、設備投資の実施はハードルレートと呼ばれる投資収益の下限と密接な関係を持つ。すなわち、資本の限界収益が資本コストを遥かに上回る水準、すなわちハードルレートを超えない限り投資は行われなことが知られている。投資延期のオプション価値を用いれば、資本コストとハードルレートとの乖離をそのプレミアムとして説明することができる。

本稿は以上の観点に着目し、不確実性が設備投資に及ぼす影響に関する考察を行った。結果は以下のように要約できる。第一に、資本コストにリスクプレミアムを導入すれば、不確実性が  $q$  に及ぼす影響は U 字型となる。第二に、投資の不可逆性の下における投資延期オプションを考慮した場合、NPV や  $q$  などの投資基準はオプション価値の上積みにより修正され、従来よりも高い下限が適用される。また、不確実性と投資基準である投資収益の下限との関係は非単調である。第三に、不確実性はハードルレートに対して単調増加を示す。最後に、投資延期オプションモデルに基づく設備投資の実施確率と不確実性との間には複雑な非線形性が見られる。

キーワード：設備投資、オプション、ハードルレート

## Uncertainty and Investment

Keiichi Shima

## Abstract :

When investment is associated with sunk costs and the stream of future profits are uncertain, an option value of waiting to invest can be included in the valuation of Tobin's  $q$ . This leads to an interpretation that firms invest only if the value of the project exceeds its cost by an amount equal to the option value. The decision to invest is closely related to the 'hurdle rate' that is way higher than the user cost of capital. Greater uncertainty increases the value of option to wait. Option models help to explain the large wedge between the hurdle rate and the user cost of capital.

This paper examines the effect of uncertainty on the investment decision from the point of view of the options literature. Results obtained in this paper are as follows. First, the relationship between uncertainty and  $q$  is U-shaped. Second, with investment irreversibility and the option to wait, the trigger level of NPV or  $q$  to invest is higher than the regular criterion. The relationship between uncertainty and the trigger level is non-monotonic. Third, the hurdle rate monotonically

increases over uncertainty. Finally, the probability that investment will take place within a specified time is a complicated nonlinear function of uncertainty.

**Keywords:** Investment, Options, Hurdle Rate.

## 1 はじめに

新古典派に従えば、設備投資を実施する基準はトービンの $q$ が1を上回ることである。別の見方をすれば、それは投資の限界収益が資本コストを上回ることを意味する。しかしながら、既存の実証結果が示す通り、資本コストや $q$ の変動に対して投資の反応は極めて鈍い。その解釈として、設備投資に伴うリスクの問題がしばしば挙げられる。すなわち、設備投資を実施する判断は将来の不確実性の問題と密接に関わる。以上に焦点を当てたモデルが多く研究者によって提示され、投資の反応の鈍さに関する理論分析が進められてきた。

将来の生産物価格や要素費用は不確実であり、両者に規定される期待収益は同様に不確実となる。設備投資の実施後に収益が劇的に悪化することは十分考えられる(e.g., Bernanke (1983))。その際、投資プロジェクトを事後的に清算することが可能であり、なおかつその費用を回収できるならば、企業は資本ストックの拡大と縮小とを柔軟に行うはずである。しかし、現実には投資プロジェクトの清算は容易でなく、その費用の回収には時として困難が生じる。すなわち、設備投資にはサンクコストが伴うと考えられる(e.g., Pindyck (1988))。設備投資が企業固有の性格を持ち、他企業には転用が難しいことが投資費用をサンクコストとみなす理由として挙げられる。また、資本ストックの転売市場には情報の非対称が存在し、レモンプレミアムが課されることも同様に挙げられる。

サンクコストの存在は投資に不可逆性をもたらす。一方、需要の不確実性によって、投資収益は時間を追って変化する。需要の不確実性の下で、生産物価格などの情報は時間の経過とともに更新されてゆく。もしも設備投資を直ちに実施する必要がなく、そのタイミングを遅らせることができるならば、暫く様子を見ることに大きな意義が見出される。換言すれば、投資の先送りは将来のより好ましい期待収益の下で投資を行うオプションの保有に等しい。ゆえに、投資のタイミングを吟味することに正の価値が存在する。

投資のサンクコストと収益の不確実性とにより設備投資の延期にオプション価値が生じる場合、投資を行う $q$ の下限は1にオプション価値を加えたものとなる。このことは、従来のNPV基準についても変更をもたらし、NPVがゼロを上回る投資プロジェクトについても、それがオプション価値を上回らない限り投資は行われないことを導く。従来の投資基準をフローで見ると、資本の限界収益 $mr$ と資本コスト $uc$ とを比べ、 $mr > uc$ なら投資が行われ、また新規参入も生じうる。反対に、 $mr < uc$ なら操業停止や撤退を企業に促すはずである。しかし現実には、企業は投資を実施すべきか否かの判断に際して、ある水準以上の投資収益を要求することがよく知られている(e.g., Dixit(1992))。

投資収益に要求される下限はハードルレートと呼ばれる。Summers (1987) は、資本の限界収益が資本コストを遥かに上回る水準、すなわちハードルレートを超えない限り投資は行われないことを見出した。その推計によればハードルレートは平均で17% であり、通常の資本コストの3倍以上に相当する。投資延期のオプション価値を用いれば、資本コストとハードルレートとの乖離をそのプレミアムとして説明することができる(e.g., McDonald and Siegel(1986), Dixit and Pindyck(1994))。

以上の観点に着目し、本稿は不確実性が設備投資に及ぼす影響について考察する。2章では投資価値を端的に表わす $q$ に対する不確実性の作用について吟味する。3章ではNPVや $q$ などに基づく従来の投資基準を投資延期のオプションを考慮して修正し、不確実性と投資基準との関係について改めて吟味する。4章ではハードルレートの問題に焦点を当て、不確実性がハードルレートに及ぼす影響を

検討する。5章では設備投資の実施を確率的に捕らえ、不確実性に対するその非線形性について吟味する。

## 2 不確実性と $q$

Abel (1983)、Caballero (1991)、Pindyck (1993) は需要の不確実性に着目し、それが企業の収益性を変化させ設備投資の判断に影響を及ぼすことを検証した。以下ではAbel (1983) の連続時間モデルに基づき、需要の不確実性による $q$ への影響を例示する。

コブダグラス生産関数を用い、収益関数 $f$ を次のように表わす。

$$f = pl^\alpha k^{1-\alpha} - wl \quad (1)$$

ただし、資本 $k$ 、労働 $l$ 、生産物価格 $p$ 、賃金 $w$ である。労働の最適投入は $l^* = \arg \max f$ であり、 $\alpha pl^{\alpha-1} k^{1-\alpha} - w = 0$ を満たす。したがって、

$$l^* = \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{1/(1-\alpha)} k \quad (2)$$

である。(2)を(1)に代入すれば、

$$\begin{aligned} f(l^*, k) &= p \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} k - w \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{1/(1-\alpha)} k \\ &= \left(\frac{\alpha p}{w}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \left[p - w \left(\frac{\alpha p}{w}\right)\right] k \\ &= \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} (1-\alpha) p^{1/(1-\alpha)} k \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\theta = 1/(1-\alpha)$ 、 $h = (\alpha/w)^{\alpha/(1-\alpha)} (1-\alpha)$ とすれば、 $l^*$ の下で収益関数は、

$$f(k) = hp^\theta k \quad (3)$$

と表わされる。すなわち、労働の最適化による収益関数は資本の一次関数となる。資本の平均、限界収益は等しく、いずれも資本水準から独立となる。資本の限界収益は $\partial f(k)/\partial k = hp^\theta$ であり、資本の限界収益は生産物価格に対して凸関数となる。そのため、生産物価格が確率変数のとき、平均を不変に保つ分散の増加は限界収益の期待値を増加させる働きを持つ。Abel (1983) は、価格の不確実性には限界収益の期待値を上昇させ、それを経て資本ストックを増やす効果があることを示した。

以下では(3)の資本の限界収益に基づき $q$ を導く。生産物価格 $p$ を次の幾何ブラウン運動で表わす。

$$dp = \alpha p dt + \sigma p dz \quad (4)$$

$dz$ は標準ウィナー過程の増分であり、価格の変化率はトレンドを持つランダムウォークに従う。ここで $y = \theta \ln p$ とすれば、伊藤のレンマにより、

$$\begin{aligned} dy &= y_p dp + \frac{1}{2} y_{pp} (dp)^2 \\ &= \frac{\theta}{p} (\alpha p dt + \sigma p dz) - \frac{\theta}{2p^2} \sigma^2 p^2 dt \\ &= \theta \left( \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \theta \sigma dz \end{aligned}$$

と表わされる。これより $\theta \ln p_t = \theta \ln p_0 + \theta \left( \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \theta \sigma z$ であり、

$$p_t^\theta = p_0^\theta \exp \left[ \theta \left( \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \theta \sigma z \right] \quad (5)$$

が得られる。ただし、 $z$ は $N(0, t)$ に従う。 $p_t^\theta$ の期待値は、

$$\begin{aligned} E[p_t^\theta] &= p_0^\theta E\left[\exp\left[\theta\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \theta\sigma z\right]\right] \\ &= p_0^\theta \exp\left[\theta\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 t\right] \\ &= p_0^\theta \exp\left[\theta\alpha t + \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma^2 t\right] \end{aligned} \quad (6)$$

となる。時間を通じて一定の資本コストの下では、限界収益の流列の割引評価の期待値から求められる $q$ は分母に不確実性の修正項を含む式として再定義される。資本コストを $\mu$ とする。資本の限界収益(割引流列)の期待値は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^\infty hp_t^\theta e^{-\mu t} dt\right] &= h \int_0^\infty p_0^\theta \exp\left[-\left(\mu - \theta\alpha - \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma^2\right)t\right] dt \\ &= hp_0^\theta / \left(\mu - \theta\alpha - \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma^2\right) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで $p$ を生産物と資本財との相対価格と考え、常に資本財価格を1とする。このとき、(7)は限界 $q$ を表す。 $\partial q / \partial \sigma > 0$ より、不確実性 $\sigma$ の増加は $q$ に対して正の効果をもたらす。もしも $p$ が一定ならば、 $q = hp_0^\theta / \mu$ である。(7)の $q$ はそれを上回る。生産物価格のトレンドや分散の増加には $q$ を増加させる働きがある。以上の定式化では資本減耗を無視したが、正の減耗率を考慮しても議論の本質は変わらない。(7)は、不確実性は既に $q$ の評価に織り込み済みであることを示す。このことは、 $q$ に対する線形の投資関数を推定する場合、説明変数として $q$ とともに不確実性の代理変数を追加することはモデルと整合的ではないことを意味する。

ここで、CAPMを用いれば資本コストを

$$\mu = r + \lambda\rho\sigma \quad (8)$$

と表わすことができる(e.g., Merton(1973))。 $\rho$ は市場ポートフォリオ $m$ と投資収益との相関係数を表わし、また $\lambda = (r_m - r) / \sigma_m$ であり市場ポートフォリオのリスク1単位の価格を表わす。 $r$ は無リスク金利であり、 $\mu$ はリスクに応じた資本コストを表わす。リスクプレミアムを考慮した資本コストの代入により、(7)は次のように修正される。

$$mq = hp_0^\theta / \left(r - \theta\alpha + \lambda\rho\sigma - \frac{1}{2}\theta(\theta - 1)\sigma^2\right) \quad (9)$$

(9)の場合、 $\lambda\rho - \theta(\theta - 1)\sigma < 0$ ならば不確実性の増加は $q$ を増加させる。しかし、 $\lambda\rho - \theta(\theta - 1)\sigma > 0$ であれば不確実性の増加は逆に $q$ を減少させる効果を持つ。すなわち、(9)の修正において $q$ は不確実性 $\sigma$ に対してU字型の関数形状を示す。 $\partial q / \partial \alpha > 0$ であり、 $\rho$ は市場収益との相関であることから、市場と相関が低く、また労働集約的であるほど不確実性の増加が $q$ を増加させる可能性は高いと解釈できる。

### 3 投資延期のオプション

McDonald and Seigel(1986)、Dixit and Pindyck(1994)は、設備投資は不可逆性を持ち、そして投資の実施は延期可能なオプションであることを考慮して、不確実性が投資のタイミングに与える影響を分析した。以下ではDixit and Pindyck(1994)のモデルを用い、投資実施の最適基準について吟味する。

投資価値 $V$ を次の幾何ブラウン運動で表わす。

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz \quad (10)$$

$dz$ は標準ウィナー過程の増分である。そして、投資延期によるオプション価値 $F(V)$ を次のように表わす。

$$F(V) = \max_T E [(V_T - I) e^{-\mu T}] \quad (11)$$

$I$ は投資費用、 $\mu$ は資本コストである。このとき、 $F(V)$ を状態依存請求権(a contingency claim)に基づく無裁定条件で解く。オプション $F(V)$ を1単位保有し、ある単位の資産 $V$ を空売りするポートフォリオ $W$ を考える。ここでは $V$ の空売り単位を $F'$ とし、 $W = F - F'V$ と表わす。後述する通り、これは $W$ から $dz$ の項を消し無リスク資産に退化させるためである。

ここで、コンビニエンスイールド $\delta$ を定義する。 $V$ は $\alpha$ で増加し、それはキャピタルゲインを意味する。配当を $\delta$ とすれば、投資家の要求する資本コスト $\mu$ は $\alpha + \delta$ に一致する。よって、(8)のCAPMによる定式化に従えば、

$$\delta = r + \lambda \rho \sigma - \alpha \quad (12)$$

が成立する。ただし、ここでは $r > \alpha$ を仮定する。

コンビニエンスイールドの定義より、 $W$ の増分は、 $dW = dF - F'dV - \delta F'V dt$ と書ける。伊藤のレンマより、オプション価値の増分は $dF = F'dV + \frac{1}{2}F''(dV)^2$ である。これを用い、ポートフォリオの増分を次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{2}F''(dV)^2 - \delta F'V dt \\ &= \left( \frac{1}{2}F''\sigma^2V^2 - \delta F'V \right) dt \end{aligned} \quad (13)$$

(13)には $dz$ が含まれず無リスクである。従って、右辺は $rW dt$ に等しい。よって、

$$\frac{1}{2}F''\sigma^2V^2 + (r - \delta)F'V - rF = 0 \quad (14)$$

が成立する。

$F(V)$ が満たすべき境界条件は、 $F(0) = 0$ 、 $F(V^*) = V^* - I$ である。一つ目はオプションの本質的価値から、二つ目はバリューマッチング条件から得られる。更に、スムーズペイस्टィング条件により、バリューマッチング条件の微分から、 $F'(V^*) = 1$ が加わる。ここで、解の形式を $F(V) = BV^\beta$ とする。バリューマッチングとスムーズペイस्टィングにより、投資を実施すべき下限 $V^*$ と投資費用との間には次の関係が成り立つ。

$$V^* = \frac{\beta}{\beta - 1}I \quad (15)$$

後に示す解法の通り、 $\beta > 1$ を満たす。このとき、 $I$ の係数は1を上回るため、NPV基準である $V^* - I$ は0を上回る。以上の(15)は設備投資の緩慢性の説明に寄与する。すなわち、

$$\frac{\beta}{\beta - 1}I > V > I \quad (16)$$

の範囲の下で投資は見送られるのである。(16)を $I$ で割り、 $q$ を $V/I$ で表わせば、

$$\frac{\beta}{\beta - 1} > q > 1 \quad (17)$$

が成り立つ。また、バリューマッチング条件に基づけば、

$$V > I + F(V^*) \quad (18)$$

が投資の条件であり、投資のコストは  $I$  のみならずオプション価値  $F(V^*)$  を加えたものとなる。

常微分方程式(14)の解に関して、 $\beta$ は

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + (r-\delta)\beta - r = 0 \quad (19)$$

を満たす。(19)より  $\Theta(\beta) = \sigma^2\beta^2/2 + (r-\delta-\sigma^2/2)\beta - r$  と定義する。 $\Theta(\beta) = 0$  を満たす二つの解は、 $\Theta(0) = -r < 0$  より  $\beta_1 < 0$ 、他方  $\Theta(1) = -\delta < 0$  より  $\beta_2 > 1$  である。オプションの本質的価値に関わる境界条件により、常微分方程式の解は  $\beta > 0$  を満たさなければならない。ゆえに、

$$\beta = \left( \sigma^2/2 - r + \delta + \sqrt{(\sigma^2/2 - r + \delta)^2 + 2r\sigma^2} \right) / \sigma^2 \quad (20)$$

が得られる。ここで、(12)を代入すれば、

$$\beta = 1/2 - (\alpha - \lambda\rho\sigma) / \sigma^2 + \sqrt{(1/2 - (\alpha - \lambda\rho\sigma) / \sigma^2)^2 + 2r/\sigma^2} \quad (21)$$

となる。

不確実性の増加とオプション価値との関係について、 $\beta$  に対する  $\sigma$  の効果により吟味する。(19)が常に成立することから、次式が満たされる。

$$[\sigma(\beta-1) - \lambda\rho]\beta d\sigma + [\sigma^2(\beta-1/2) + \alpha - \lambda\rho\sigma]d\beta = 0$$

若干の計算を経て以上を整理すれば、

$$d\beta/d\sigma = \beta(\lambda\rho - \sigma(\beta-1)) / (\sigma^2\beta/2 + r/\beta) \quad (22)$$

が得られる。よって、 $d\beta/d\sigma$  の符号は確定せず  $\lambda\rho/(\beta-1) \geq \sigma$  により変化する。 $\beta$  は  $\sigma$  に対して逆U字型を示す。ただし、(21)より  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \beta = 1$ 、一方、 $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \beta$  については(19)に(12)を代入し、 $\sigma \rightarrow 0$  で  $\alpha\beta - r = 0$  となるため  $\beta = r/\alpha > 1$  が得られる。

図1は、 $r=.1$ 、 $\lambda=.8$ 、 $\rho=.7$ 、 $\alpha=.05$ を用いた例であり、 $\sigma$ の大きさに対する $\beta$ の変化を表わす。また、 $\partial V^*/\partial \sigma$ はU字型となる。すなわち、不確実性の増加は投資実施を促す収益下限 $V^*$ に対して非単調に作用する。図2は図1と同じパラメータを用い、 $\sigma$ の大きさに対する $V^*$ の変化を示した例である。

以上の特性、及び(9)は、これまでの実証研究から得られた結果への解釈において重要な示唆を与える。Carruth, dickerson and Henley (2000, pp.130-131)は設備投資と不確実性変数と関係に関する先行研究例を要約し、設備投資に対する不確実性の効果が必ずしも頑健には推定されないことを示した。先に通じ、 $V^*$ と不確実性との関係、 $q$ と不確実性との関係のいずれもが非単調である。そのため、投資に対する不確実性の代理変数の推定符号が正か負かによってどの理論と整合するかを突き止めることは難しい。

#### 4 投資収益とハードルレート

以上で示したように、不確実性の増加に対して投資のオプション価値は非単調に変化する。以下では不確実性とハードルレートとの関係について改めて吟味する。

投資のキャッシュフローを次の幾何ブラウン運動で表わす。

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad (23)$$

$dz$ はウィナー過程の増分である。 $y = \ln x$ とすれば、伊藤のレンマにより、 $dy = (\alpha - \sigma^2/2) dt + \sigma dz$ と

図 1：不確実性と  $\beta$

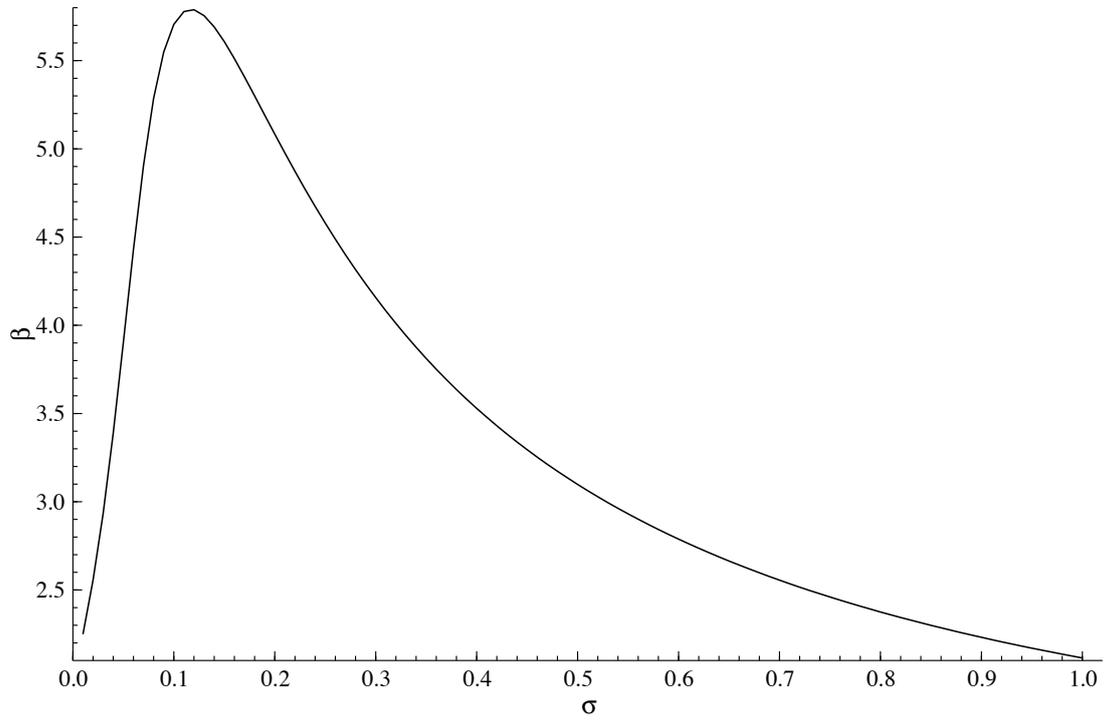
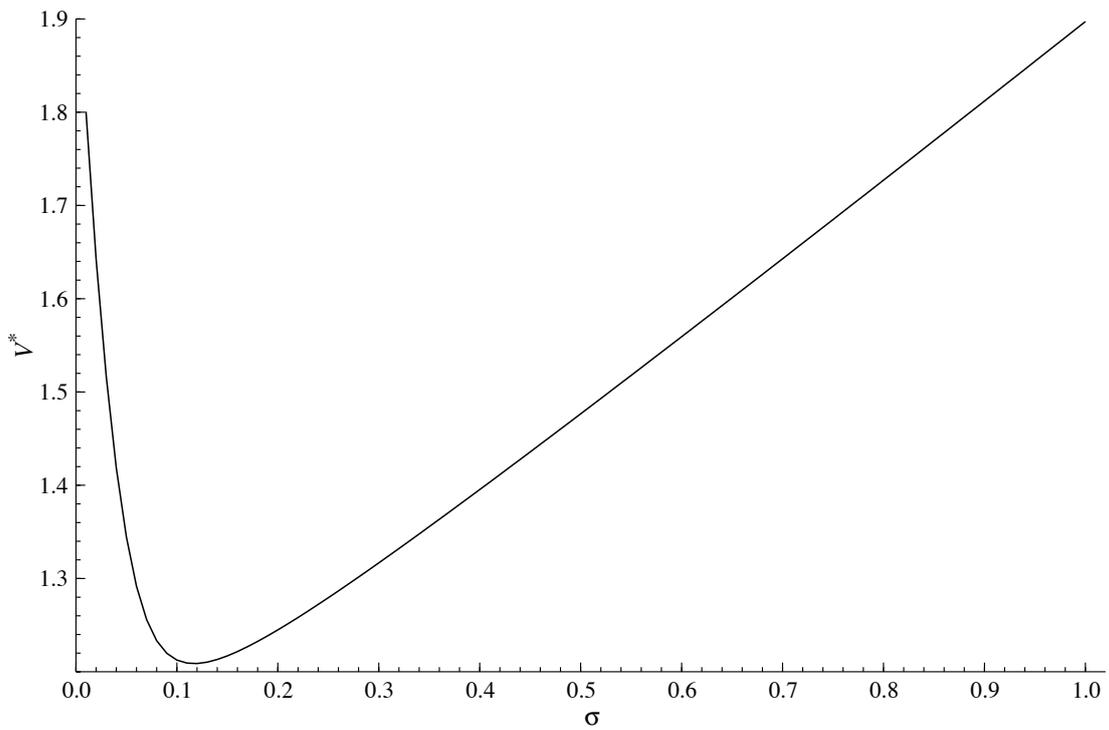


図 2：不確実性と  $V^*$



表わされる。これより  $y_t = y_0 + (\alpha - \sigma^2/2)t + \sigma z$  であり、 $x_t = x_0 \exp((\alpha - \sigma^2/2)t + \sigma z)$  が得られる。ただし  $z$  は  $N(0, t)$  に従い、投資のキャッシュフローの期待値は  $E[x_t] = x_0 \exp(\alpha t)$  となる。よって、投資価値は

$$\begin{aligned} V &= E \left[ \int_0^{\infty} x_t \exp(-(r + \lambda\rho\sigma)t) dt \right] \\ &= x_0 / (r + \lambda\rho\sigma - \alpha) \end{aligned} \quad (24)$$

となる。以上より、NPVベースによる投資の実施基準は

$$x / (r + \lambda\rho\sigma - \alpha) - 1 > 0 \quad (25)$$

である。NPV基準に従えば、投資の条件は  $x > r + \lambda\rho\sigma - \alpha$  となる。

(25)より  $dV/V = dx/x$  が成り立ち、(23)は(10)と一致する。一単位の投資を考え、資本財価格を1とすれば  $V^* = \beta / (\beta - 1)$  となる。このとき、投資のキャッシュフローに対するハードルレートを次のように表わすことができる。

$$x^* = (r + \lambda\rho\sigma - \alpha) \beta / (\beta - 1) \quad (26)$$

これは従来の投資条件の  $\beta / (\beta - 1)$  倍となる。(26)より、不確実性の増加によるハードルレートの変化は次の通りである。

$$\begin{aligned} dx^*/d\sigma &= \lambda\rho\beta / (\beta - 1) + (\alpha - \lambda\rho\sigma - r) / (\beta - 1)^2 d\beta/d\sigma \\ &= (\lambda\rho\beta - (r/\beta + \sigma^2/2) d\beta/d\sigma) / (\beta - 1) \\ &= \beta [\lambda\rho\sigma^2 (\beta - 1) / 2 + (r/\beta + \sigma^2/2) \sigma (\beta - 1)] \\ &\quad / [(\beta - 1) (\sigma^2\beta/2 + r/\beta)] \\ &= \beta\sigma (\lambda\rho\sigma + 2r/\beta + \sigma^2) / (\sigma^2\beta + 2r/\beta) \end{aligned} \quad (27)$$

(27)の右辺は非負である。よって、不確実性の増加はハードルレートを単調に増加させる効果を持つ。

## 5 不確実性と投資実施確率

オプション理論に従えば、設備投資のキャッシュフロー  $x$  がハードルレート  $x^*$  を超えれば投資を実施し、それ未満であれば投資を見送るという行動が導かれる。ハードルレートは投資収益の不確実性の大きさに依存する。投資費用に加え投資を延期するオプション価値をも投資価値によりカバーされて初めて投資の実施は成立する。オプションを保有し続けるか否かの判断は、每期更新されるキャッシュフローの大きさに依存する。

不確実性によるオプション価値の増加はハードルレートを引き上げる効果を持つ。そのため、不確実性と設備投資との間には負の関係が生じると考えられる。設備投資の実施と見送りという行動に着目するならば、投資が実施される確率と不確実性の大きさとの間には負の関係が存在するはずである。しかしながら、Sarkar (2000) は投資の実施確率が不確実性の増加に対して非単調となることを示した。以下ではSarkar (2000) のモデルを用い、両者の関係を吟味する。

資本コストに(8)を用い、投資費用を1とする。また、投資のキャッシュフローは(23)の幾何ブラウン運動に従うと仮定する。このとき、NPVは先の通り(25)で表わされる。 $y = \ln x$  とおくと、伊藤のレンマにより  $y$  は  $(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2, \sigma)$  BM に従う。よって、再び示せば

$$\ln x_t = \ln x_0 + \left( \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma z \quad (28)$$

と表わされる。 $\ln x_t \sim N(\ln x_0 + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$  より、投資のキャッシュフローが(26)のハードルレートを下回る確率は、

$$\Pr[\ln x_t \leq \ln x^*] = \Phi\left(\frac{\ln x^* - \ln x_0 - (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad (29)$$

となる。

ここで、 $M_t = \sup\{\ln x_s, 0 \leq s \leq t\}$  とすると、

$$\begin{aligned} & \Pr[\ln x_t \leq \ln x^*, M_t \leq m] \\ &= \Pr[\ln x_t \leq \ln x^*] - \Pr[\ln x_t \leq \ln x^*, M_t > m] \end{aligned} \quad (30)$$

である。(30)の第二項は鏡像原理(A. 付録を参照)により次のように求められる。

$$\begin{aligned} & \Pr[\ln x_t \leq \ln x^*, M_t > m] \\ &= \exp\left(\frac{2(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\ln \frac{m}{x_0}}{\sigma^2}\right) \Phi\left(\frac{\ln \frac{x^*}{x_0} - 2\ln \frac{m}{x_0} - (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

このとき、 $x^* \uparrow m$  であれば、

$$\begin{aligned} & \Pr[x_t \leq m, M_t > m] \\ &= \left(\frac{m}{x_0}\right)^{2\alpha/\sigma^2-1} \Phi\left(\frac{-\ln \frac{m}{x_0} - (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。よって、 $x_t$  が過去に一度も  $m$  を超えず、 $t$  時点以降に初めて  $m$  を超える確率(オプションのまま持ち続けられる確率)は、

$$\begin{aligned} F[T(m) > t] &= \Phi\left(\frac{\ln \frac{m}{x_0} - (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &\quad - \left(\frac{m}{x_0}\right)^{2\alpha/\sigma^2-1} \Phi\left(\frac{-\ln \frac{m}{x_0} - (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (33)$$

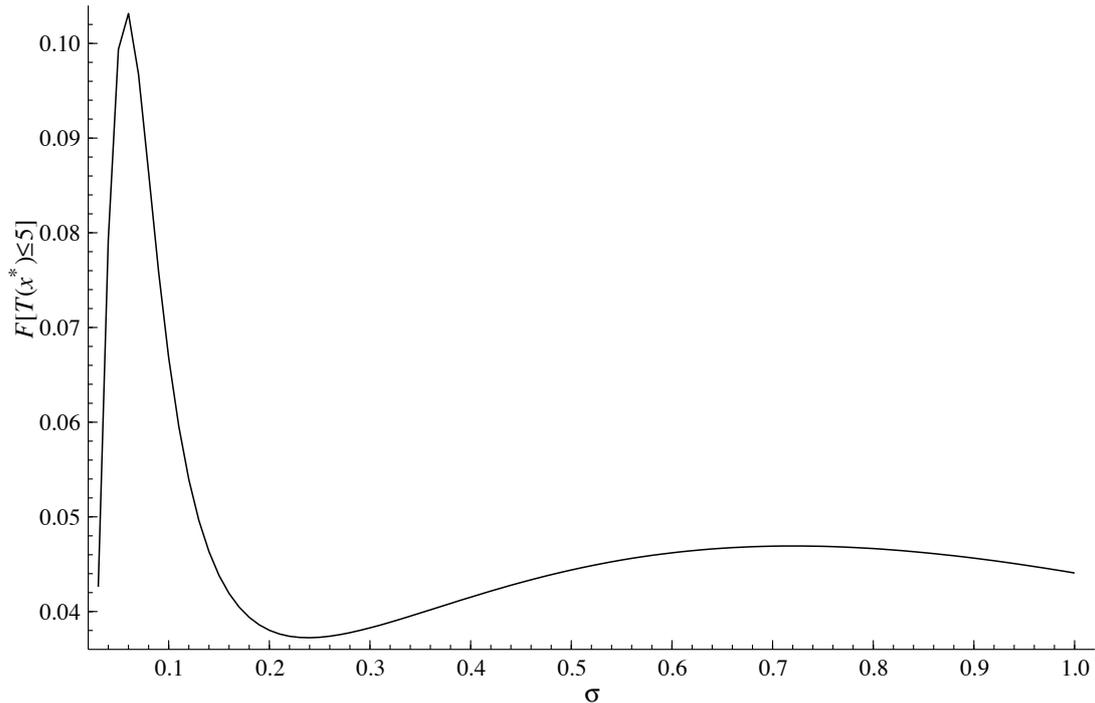
により表わすことができる。これより、 $t$  までに  $m$  に到達しうる確率(投資オプションが行使される確率)は、

$$\begin{aligned} F[T(m) \leq t] &= 1 - F[T(m) > t] \\ &= \Phi\left(\frac{-\ln \frac{m}{x_0} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &\quad + \left(\frac{m}{x_0}\right)^{2\alpha/\sigma^2-1} \Phi\left(\frac{-\ln \frac{m}{x_0} - (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (34)$$

と表わすことができる。(34)はある時間  $t$  までの間において、キャッシュフロー  $x$  がハードルレート  $m(=x^*)$  を超えて企業が投資の実施に踏み切る確率を表わす。

不確実性と投資の実施確率との関係は単調ではなく、両者の関係はパラメータの値に強く依存する。例えば、図3は図1、図2と同じパラメータを用い、更に投資実施を5年以内( $t=5$ )、キャッシュフローの初期値を7%( $x_0=.07$ )とする場合での  $\sigma$  と投資実施確率との関係を示す。この例示はマクロ的に設備投資を増加させるための政策に重要な示唆を与える。設備投資を誘発するためには不確実性の適切なコントロールに着目すべきであり、それを必ずしも消し去るのではなく、投資の発生確率を最も高める水準に導くことが必要であると結論付けられる。

図3：不確実性と投資実施確率



## 6 おわりに

本稿では不確実性が設備投資に及ぼす影響について、いくつかの考察を行った。結果の要約は次の通りである。第一に、資本コストにリスクプレミアムを導入すれば、不確実性が $q$ に及ぼす影響はU字型となる。第二に、投資の不可逆性の下における投資延期オプションを考慮した場合、NPVや $q$ などの投資基準はオプション価値の上積みにより修正され、従来よりも高い下限が適用される。また、不確実性と投資基準である投資収益の下限との関係は非単調である。第三に、不確実性はハードルレートに対して単調増加を示す。最後に、投資延期オプションモデルに基づく設備投資の実施確率と不確実性との間には複雑な非線形性が見られる。

以上のように不確実性と設備投資の実施との関係、またトービンの $q$ との関係には非単調及び非線形性が存在する。設備投資を促進する政策には両者の関係を精密に理解し、適切なパラメータ水準の下での試算が必要である。先進国のデータを用いた実証研究により、設備投資に対する法人税率の切り下げや金利引下げの有効性は乏しいことがしばしば指摘されてきた(e.g., Chirinko(1993))。不確実性の適切なコントロールによる投資刺激策の有効性を検証することを今後の課題としたい。

## 参考文献

- [1] Abel, Andrew B. "Optimal investment under uncertainty," *American Economic Review*, March 1983, 73 (1), pp.229-233.
- [2] Bernanke, Ben S. "Irreversibility, uncertainty, and cyclical investment," *Quarterly Journal of Economics*, February 1983, 98, pp.85-106.
- [3] Caballero, Ricardo J. "On the sign of the investment-uncertainty relationship," *American Economic Review*, March 1991, 81 (1), pp.279-288.
- [4] Carruth, Alan, Dickerson, Andy and Henley, Andrew. "What do we know about investment under uncertainty," *Journal of Economic Surveys*, 2000, 14(2), pp.119-154.
- [5] Chirinko, Robert S. "Business fixed investment spending: modeling strategies, empirical results, and policy implications," *Journal of Economic Literature*, December 1993, 31 (4), pp.1875-1911.

- [6] Dixit, Avinash K. "Investment and hysteresis," *Journal of Economic Perspectives*, Winter 1992, 6(1), pp.107-132.
- [7] Dixit, Avinash K. and Pindyck, Robert S. *Investment and Uncertainty*, Princeton: Princeton University Press, 1994.
- [8] Harrison, J. Michael. *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, New York: John Wiley & Sons, 1985.
- [9] McDonald, Robert and Siegel, Daniel. "The value of waiting to invest," *Quarterly Journal of Economics*, November 1986, 101(4), pp.707-728.
- [10] Merton, Robert C. "An intertemporal capital asset pricing model," *Econometrica*, September 1973, 41(5), pp.867-887.
- [11] Pindyck, Robert S. "Irreversible investment, capacity choice, and the value of the firm," *American Economic Review*, December 1988, 78(5), pp.969-985.
- [12] Pindyck, Robert S. "A note on competitive investment under uncertainty," *American Economic Review*, March 1993, 83(1), pp.273-277.
- [13] Sarkar, Sudipto. "On the investment-uncertainty relationship in a real option model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, February 2000, 24(2), pp.219-225.
- [14] Summers, Lawrence H. "Investment incentives and the discounting of depreciation allowances," in Martin Feldstein ed., *The Effects of Taxation on Capital Accumulation*, Chicago: University of Chicago Press, 1987, pp.295-304.

## A 付録

(34)の導出についてはHarrison(1985, pp.7-14)を参考にした。以下ではその導出に用いられる鏡像原理を含め、簡単に過程を説明する。 $x$ は標準ブラウン運動(0,1)BMに従い、 $x_0 = 0$ を仮定する。 $x$ の上限について

$$M_t = \sup \{x_s, 0 \leq s \leq t\} \quad (\text{A.1})$$

と定義する。 $M$ は $t$ までの過去における $x_s$ の最大値を意味する。 $x_s$ が過去に $m$ を超えたことがなく、最後に $x$ を下回る確率を同時分布で表わせば、

$$F(x, m) = \Pr[x_t \leq x, M_t \leq m] \quad (\text{A.2})$$

と書ける。同時分布確率は、

$$\begin{aligned} F(x, m) &= \Pr[x_t \leq x] - \Pr[x_t \leq x, M_t > m] \\ &= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \Pr[x_t \leq x, M_t > m] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

と書き直せる。

$\Pr[x_t \leq x, M_t > m]$ は、 $x_s$ が過去に $m$ に到達し、最後に $x$ を下回る経路を辿る確率である。鏡像原理を用いれば、この確率は次のように求められる。まず $T < t$ で $x_T = m$ に到達し、その後 $x_t \leq x$ となる確率は

$$\Pr[x_t - x_T \leq x - m, T < t] \quad (\text{A.4})$$

である。これは $x_T = m$ に到達した後、 $(t - T)$ の時間をかけて更に $m - x$ だけ上昇する経路を辿る確率に等しい。

$$\Pr[x_t - x_T \geq m - x, T < t] = \Pr[x_t \geq 2m - x] \quad (\text{A.5})$$

よって、

$$\begin{aligned} \Pr[x_t - x_T \leq x - m, T < t] &= 1 - \Phi\left(\frac{2m - x}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x - 2m}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

が得られる。これは任意の  $T$  について成り立つため、 $\Pr [x_t \leq x, M_t > m]$  に一致する。以上より、

$$F(x, m) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - 2m}{\sqrt{t}}\right) \quad (\text{A.7})$$

が得られる。

ここで、 $T(m)$  初めて  $X_T = m$  となる時点とする。 $M_t < m$  の場合に限り、 $t < T(m)$  が成立する ( $\Pr [T(m) > t] = \Pr [M_t < m]$ )。  $x \uparrow m$  において、

$$\begin{aligned} F(m, m) &= \Pr [x_t \leq m] - \Pr [x_t \leq m, M_t > m] \\ &= \Phi\left(\frac{m}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{-m}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となる。過去に  $m$  に到達したことがなく、最後まで  $m$  に届かない確率を表わす。したがって、 $t$  以降に初めて  $m$  に到達する確率を表わす。

$x$  が標準ブラウン運動ではなく、ドリフトと 1 以外の分散とを持つ場合を考える。

$$x_t = \alpha t + \sigma z \quad (\text{A.9})$$

ただし  $x_0 = 0$  であり、 $z$  は標準ブラウン運動である。このとき、

$$\begin{aligned} \Pr [T(m) > t] &= \Pr [M_t < m] \\ &= \Phi\left(\frac{m - \alpha t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \exp\left(\frac{2\alpha m}{\sigma^2}\right) \Phi\left(\frac{-m - \alpha t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

となる。