

公共財の図形的理論：その算術的説明

赤 城 国 臣

1. はじめに

私的財に関するEdgeworth-Bowleyのボックス・ダイアグラムは、経済学上、余りにも有名である。この思考道具の経済学への導入は、我々の思考過程を容易にしてくれた。F. Trener Dolbear, Jr. (1967) が外部性の議論に導入した三角形ボックス・ダイアグラムも、前者と同様、経済学研究者の思考を容易にしてくれる枠組みであるのは、言うまでもない。そのような思考道具をDolbearは、どのようにして着想したのだろうか？それは、次節で見るように、公共財に関してPaul A. Samuelson (1955) が示した図解の延長線上にある。それゆえ、公共財（それを外部性と置き換えても同じだが）の議論に新たな図形的説明を付加した功績は、Samuelsonに帰せられるべきであろう。

この小論で問うのは、その図解がSamuelson (1954) の説明として適切なのかどうか、整合的なのかどうかである。なぜなら、この論文において陰関数で定式化されている部分が、Samuelson (1955) の図解では、多分に陽表的に説明されていて、両者のトレースが厳密には必ずしも容易ではないからである。

そこで、この小論では、両者を結ぶ輪を示し、この問題の理解に資したいと思う。具体的には、Samuelsonの図解に忠実な数学モデルを展開して、その結果がSamuelson (1954) の数学モデルから導出される結果に等しくなることを示したい。以下、次節では、二人二財モデルに関するSamuelson (1955) の図解を示す。3節では、Samuelson (1954) を二人二財モデルとして展開し、Samuelsonの作図を一部陽表的に理解しても、Samuelson Ruleが得られることを論じよう。

2. Samuelsonの図解

図解に当たって、この経済社会には、Samuelsonが定義する純粋公共財と私的財の二つの財だけが存在するものと仮定する。これら二つの財の量をそれぞれ x と y で表すことにしよう。また、この社会には、 α と β の二人だけがいる。

今、下添え字で、ある経済主体を表そう。純粋公共財の消費量を、経済主体 α と β について x_α と x_β とし、その供給量を x^s とする。Samuelsonは、純粋公共財を各経済主体が等量を同時に消費できる財と定義しているから、

$$x_\alpha = x_\beta = x^s \quad (2 - 1)$$

なる関係がある。また、二人が消費する私的財の量を y_{α} と y_{β} 、その供給量を y^s とすると、私的財では、消費における排除性の性質があるから

$$y_{\alpha} + y_{\beta} = y^s \quad (2 - 2)$$

が成り立っている。

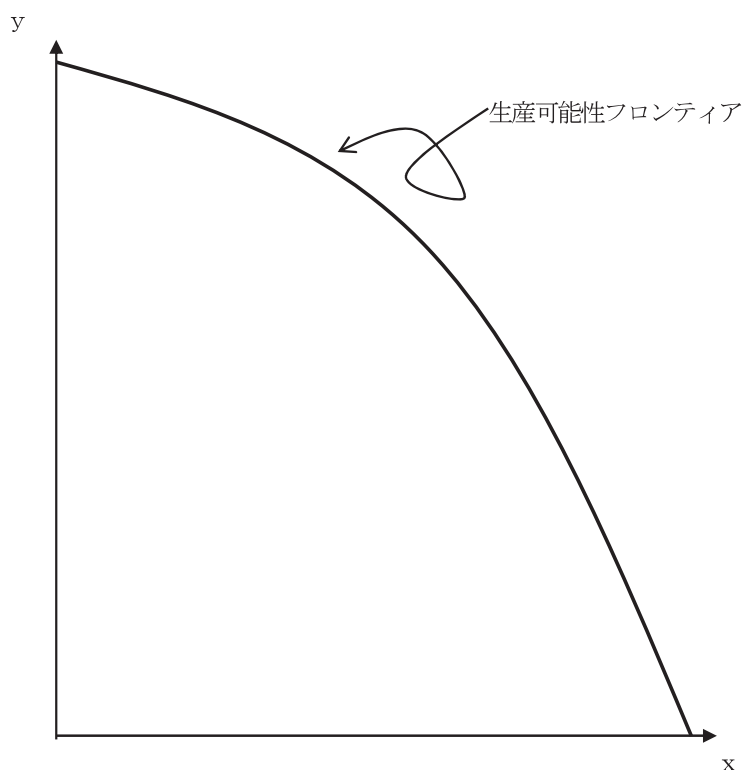


図 2 - 1

Samuelson (1954) は、これら 2 財の生産関係について、「生産可能性フロンティア」を導入し、図 2 - 1 のような形状を採り、原点に凹になるものと仮定している。図 2 - 1 では、横軸に純粋公共財の量を、縦軸には私的財の量を取っている。今、生産可能性フロンティアを次のように表そう。

$$F(x^s, y^s) = 0 \quad (2 - 3)$$

これらの財を消費する消費者 と の効用関数 U を、それぞれ次のように表す。

$$U^{\alpha} = U^{\alpha}(x_{\alpha}, y_{\alpha}) \quad (2 - 4)$$

$$U^{\beta} = U^{\beta}(x_{\beta}, y_{\beta}) \quad (2 - 5)$$

(2 - 5) 式を図に表すと、 の無差別曲線は、図 2 - 2 (a) のような形状となる。また、(2 -

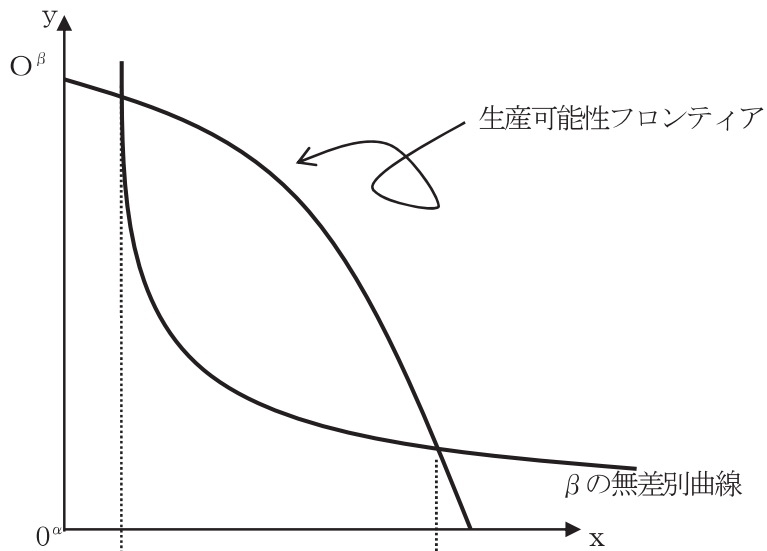


図 2 - 2 (a)

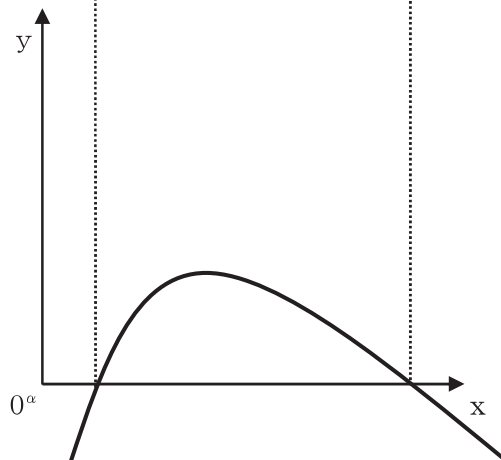


図 2 - 2 (b) α の消費可能性フロンティア

4) 式を図に表しても、 のそれと同様の形状になるものと想定している。

図 2 - 2 (a) では、生産可能性フロンティアと の無差別曲線を同じ図の上に描いている。この図で、任意の純粋公共財の量を所与として、生産可能性フロンティア上の私的財の生産水準から、 の無差別曲線上の私的財の消費量を縦に引いて、 が消費できる私的財の量を求める。引き続き純粋公共財の量を連続的に変化させていって、 が消費できる私的財の量を求め、その結果を図に表したのが、図 2 - 2 (b) 「 の消費可能性フロンティア」である。

解くべき問題は、 α の無差別曲線が α の消費可能性フロンティアに接する点を見出すことである。その接点では、 α の効用水準を所与として α の効用が極大にされているから、接点は、Pareto最適点である。このようにして、公共財の供給に関するPareto最適条件、所謂Samuelson Ruleを得ることができる。すなわち、次式が成り立っている。

$$\alpha \text{ と } \beta \text{ の限界代替率の和} = \text{限界転形率} \quad (2 - 6)$$

ところで、(2 - 3) (2 - 4) (2 - 5) の各式から、限界転形率、 α と β の限界代替率は、それぞれ次のように求めることができる。

$$-\frac{d y}{d x} \Big|_F = \frac{F_x}{F_y} \quad (2 - 7 - 1)$$

$$-\frac{d y}{d x} \Big|_\alpha = \frac{U_x^\alpha}{U_y^\alpha} \quad (2 - 7 - 2)$$

$$-\frac{d y}{d x} \Big|_\beta = \frac{U_x^\beta}{U_y^\beta} \quad (2 - 7 - 3)$$

(2 - 7 - 1) 式の左辺に付したFは、左辺が(2 - 3) 式の限界転形率であることを表している。また、(2 - 7 - 2) と (2 - 7 - 3) 式の左辺に付した α や β は、左辺が(2 - 4) と (2 - 5) 式の限界代替率であることを表している。従って、(2 - 7 - 1) から (2 - 7 - 3) までの式を用いれば、Samuelson Rule (2 - 6) 式は、

$$\frac{U_x^\alpha}{U_y^\alpha} + \frac{U_x^\beta}{U_y^\beta} = \frac{F_x}{F_y} \quad (2 - 8)$$

となる。

最後に、次の点に言及しておきたい。こうして導出された α の消費可能性フロンティアは、 α のある水準の効用の値に対応している。これを図2 - 2 (a) に重ね合わせて考えよう。今、O を α の原点とし、そこから下の方向に私的財の量を、純粹公共財の量を生産可能性フロンティアの湾曲した形状に沿って測ろう。このように測ると、純粹公共財の量は、湾曲した生産可能性フロンティアの点から横軸に垂線を下ろした際に、横軸で読み取る量になっている。このようにO を α の原点として考えると、 α の消費可能性フロンティア上のどの点でも、 α の効用水準は一定なのだから、 α の消費可能性フロンティアを α の無差別曲線と読み直すことができる。ここに、Dolbearの三角形のボックス・ダイアグラム構想の契機が見出せる。

4. 図解の算術的証明

Samuelsonの図解に忠実に、(2 - 3) 式を

$$y^s = f(x^s) \quad (3 - 1)$$

と陽関数で表せば、生産可能性フロンティアの限界転形率は

$$-\frac{d y}{d x}\bigg|_F = \frac{F_x}{F_y} = -f, \quad (3-2)$$

となる。また、(2-5) 式で の効用水準 U を所与とする y を x の関数として

$$y_\beta = \phi(x_\beta; U^\beta) \quad (3-3)$$

と陽表的に表すと、 の限界代替率は、次のようになる。

$$-\frac{d y}{d x}\bigg|_\beta = \frac{U_x^\beta}{U_y^\beta} = -\phi, \quad (3-4)$$

以上から、 の消費可能性フロンティアは、(2-2) (3-1) (3-3) を考慮すると

$$y_\alpha = y^s - y_\beta = f(x^s) - \phi(x_\beta; U^\beta) \quad (3-5)$$

と表される。従って、Samuelson (1955) は、 が解く問題を、実際には (3-5) の条件の下で効用関数 (2-4) を極大にすることと定式化していることになる。今、ラグランジュ乗数を とすると、ラグランジュ関数は

$$V = U^\alpha(x_\alpha, y_\alpha) + \lambda [f(x^s) - \phi(x_\beta; U^\beta) - y_\alpha]$$

と表すことができる。これを解いて整理して、

$$\frac{U_x^\alpha}{U_y^\alpha} - \phi' = -f, \quad (3-6)$$

を得るが、(3-2) (3-4) の両式を考慮すると、(3-6) 式は、

$$\frac{U_x^\alpha}{U_y^\alpha} + \frac{U_x^\beta}{U_y^\beta} = \frac{F_x}{F_y}$$

となり、Samuelson Rule (2-8) 式が得られる。

5. おわりに

以上、小論では、第一にSamuelson (1955) に忠実に定式化して、その図解がSamuelson Ruleの導出に十分であったことを示した。いずれにせよ、Samuelson Ruleは、各経済主体の限界代替率の和が、生産可能性フロンティアの限界転形率に等しくなることである。また論証の過程で、Dolbearの図解がSamuelsonのその延長線上にあると理解されることを示した。

＜参考文献＞

- Dolbear, F. Trener, Jr. , “ On the Theory of Optimal Externality ” , *American Economic Review*, 57(December 1967) , 90 - 103.
- Samuelson, Paul A. , “ The Pure Theory of Public Expenditure ” , *Review of Economics and Statistics*, 36(November 1954) , 387 - 89.
- Samuelson, Paul A. , “ Diagrammatic Exposition of a Theory of Public Expenditure ” , *Review of Economics and Statistics*, 37(November 1955) , 550 - 56.