

学位論文審査結果の概要

氏名	黄 鵬瑞
学位論文審査委員氏名	主査 中里 博
	副査 丹原 大介
	副査 榊 真
	副査 津田谷 公利
	副査 別宮 耕一
論文題目	The Classical Numerical Range and Its Generalizations (古典数域とその一般化についての研究)
審査結果の概要（2,000字以内）	
審査結果 合格と認める。	
審査経過 平成31年1月31日に第一回審査会を開催し博士学位請求の論文について審査を行い学位請求者の講演並びに質疑を行い論文ならびに関連する学識について審査した。さらに2月8日に博士論文公聴会を開催し最終試験として論文内容につき黄鵬瑞君による講演の後、論文内容並びに関連する学識や研究倫理につき審査し、審査員の全員一致にて合格と判定した。	
審査概要 (1) 論文の主題と学術的な手法 学位論文は、複素正方行列の数域とその一般化の幾何学的な形状の決定ならびに数域を用いて行列の特性を解明することや関連する問題解明に寄与することを目的にしている。平面図形の境界方程式の数式处理的な取り扱いや不等式を用いての数域の境界を解析したことなどが主な研究成果として挙げられる。	
(2) 主題についての学術的背景と論文の独創性 論文の主題である行列の数域やその一般化は、2次形式あるいはエルミット形式の特性量として行列の固有値解析との関係で、百年にわたり研究が続けられている。特に数式処理や数値計算のソフトウェアが普及する1980年代以降急速に研究が盛んになった。論文の第一章で取り扱っている結果についてはランダムな3次の正規行列 N の一般化数域の境界が凸でなく複雑になり、これが三角形になることが N の固有値の条件をうまく選ぶと可能であることを発見したことが最大の特色である。この章は Elsevier 社発行の学術雑誌 (SCI 5-year Impact Factor 1.043) 掲載の論文 [1] に基づいている。また第2章の離散フーリエ変換を用いたユニタリ変換で対称行列になるクラスの発見なども独自の発想がある。この章は、Duke University Press 発行の学術雑誌 (米国数学会の SCI 類似指数は 0.38) 掲載の論文 [3] に基づいている。第3章には、膨大な数式を通じた補間法による境界決定に計算方法の点で工夫がある。この章は、新潟大学発行の数学雑誌 (米国数学会の数値 0.16) に掲載の論文 [2] に基づいている。	

(3) 学位論文の主要な成果とその学術的意義

第一章の主定理では、 3×3 複素対角行列 N の3つの固有値 a, b, c にどんな条件があれば N のユニタリ相似変換の3つの対角要素 a', b', c' の2つの積 $a' b', a' c', b' c'$ の集まりが三角形という凸閉領域になる条件になるかという問題に対して必要十分条件を与えている。例えば0を中心とする円の内接三角形の頂点に a, b, c が位置すれば条件が満たされる。この成果が発表された後、 N の固有値 a, b, c の条件を取り去っても問題の領域が星状図形となることが香港の数学者により証明されるなど課題研究の発展が続いておりその一つの契機にこの章の結果がなっている。

第2章の成果は論文によるほか米国アイオワ州で開催された研究集会でも学位請求者の黄君により発表され行列の数域との関連で関係者より注目された。例えば5のような奇数の次数であれば、巡回的な重み付きシフトを重み a, b, c, b, a と付け、6のような偶数の次数であれば、重みを a, b, c, c, b, a のように付けでできるシフト変換の表示行列のフーリエ変換が、対称行列になることがこの章の主定理よりわかる。対称行列とユニタリ相似な行列を特徴づけ、数域の観点からは典型的と言える複素対称行列の占める位置を解明するという課題を前進させた。

第3章は、目的とする q -数域の境界方程式に登場する2変数非同次40次整数係数多項式(項数253)を数式処理的な計算を並行的に行い求めている。この q -数域は2次元ユークリッド空間の凸集合と見なせるが、それが4次元空間の24次超曲面で囲まれた凸集合の2次元空間への正射影となっていることに基づき最終式の計算を2回実施した後、その因子として問題の40次式が得られる。より直接的な計算を行うと最終的に捨て去る情報に関する計算を行うことになり非効率である。いかに目的に適した計算をするかとの課題に関して具体的な解決策を提示している。

学位論文の基礎となる参考論文

- [1] P.-R. Huang and H. Nakazato, Product of two diagonal entries of a 3-by-3 normal matrix, *Linear Algebra and Its Applications*, 544(2018) 115-140.
- [2] P.-R. Huang and H. Nakazato, The boundary of the q -numerical range of some Toeplitz matrix, *Nihonkai Mathematical Journal*, 27(2016), no.1-2, 155-165.
- [3] P.-R. Huang and H. Nakazato, Cyclic weighted shift matrix with reversible weights, *Annals of Functional Analysis*, in press.