

Tangent developable の局所型の分類

教育学研究科 教科教育専攻 数学教育専修

15GP207 阿部太郎

1 イントロダクション

本論文では tangent developable とよばれる空間内の曲面について、この曲面の局所型を調べた。ここで、tangent developable は可展面の一種である。可展面とは、大雑把に言えば、平らな紙を折ることをせずに、曲げることのみによって得られる曲面のことである。例えば、円柱が挙げられる。円柱は、長方形の紙を曲げ、両端を留めることで得られる。同様に、円錐は扇形の紙を曲げ、両端を留めることにより得られる。

最初に、本論文の主定理である tangent developable の局所型の分類について述べる。詳しい定義や証明等はセクション 3 において扱う。まず、tangent developable の定義を与える。

定義 1.1. $I \subset \mathbb{R}$ を開集合、 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を曲率 $\kappa(t) \neq 0$ の空間曲線とする。また、 $B(t)$ を $\gamma(t)$ の従法線ベクトルとする。このとき、 $F : I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(t, x) = (x - \gamma(t)) \cdot B(t)$$

により定義する。 γ の tangent developable とは、空間曲線 γ の接触平面 $F = 0$ の envelope のことをいう。

定理 3.2 より tangent developable は以下の集合で表される。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \text{ となる } t \in I \text{ が存在する} \right\} \\ &= \{x(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda T(t) \mid \tau(t) \neq 0 \text{ なる } t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &\quad \cup \{x(t, \lambda, \mu) = \gamma(t) + \lambda T(t) + \mu N(t) \mid \tau(t) = 0 \text{ なる } t \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &\quad (\text{ただし } T(t) \text{ は } \gamma(t) \text{ の単位接線ベクトル, } N(t) \text{ は } \gamma(t) \text{ の主法線ベクトル,} \\ &\quad \tau(t) \text{ は } \gamma(t) \text{ の捩率である}). \end{aligned}$$

[1] では単位速度曲線 γ に対し、tangent developable 内の後退点の集合に現れる局所型について調べている。本論文では単位速度とは限らない空間曲線 γ に対し、tangent developable の局所型について調べた。主結果は以下の通りである。

定理 1.2. γ, F は定義 1.1 の通りとする。また、 $x \in \mathbb{R}^3$ を 1 つ固定したとき $F_x : I \rightarrow \mathbb{R}$ を $F_x(t) = F(t, x)$ で定める。このとき次が成立する。

(1) $x \in \mathcal{D}_F$ に対し、 F_x の特異点型は下の表の通りになる。

	$\tau(t) \neq 0$	$\tau(t) = 0$			
		$\tau'(t) \neq 0$	$\tau'(t) = 0$		
			$\tau''(t) \neq 0$	$\tau''(t) = 0$	
				$\tau'''(t) \neq 0$	$\tau'''(t) = 0$
$\mu \neq 0$	—	A_1 型	A_2 型	A_3 型	$A_{\geq 4}$ 型
$\mu = 0, \lambda \neq 0$	A_1 型	A_2 型	A_3 型	A_4 型	$A_{\geq 5}$ 型
$\mu = \lambda = 0$	A_2 型	A_3 型	A_4 型	$A_{\geq 5}$ 型	

表は例えば次のように読む. $\tau(t) = 0, \tau'(t) \neq 0$ なる $t \in \mathbb{R}$ と $\mu \neq 0$ なる $\mu \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ で定まる $x = x(t, \lambda, \mu) \in \mathcal{D}_F$ に対し, F_x はこの $t \in \mathbb{R}$ で A_1 型である ((1, 2) 成分).

(2) (1) の表の (2, 1), (3, 1), (1, 2) 成分でのみ F は F_x の versal unfolding になる. すなわちそのような $x \in \mathcal{D}_F$ の近傍では \mathcal{D}_F は平面 (A_1 型) または cuspidal edge (A_2 型) と局所的に微分同相である.

例として helix を挙げる.

例 1.3 (helix). $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ とする. すると, $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0), \gamma'''(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$ である. ここから,

$$\begin{aligned}\gamma' \times \gamma'' &= (\sin t, -\cos t, 1) \\ (\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' &= \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\ \|\gamma' \times \gamma''\|^2 &= \sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 2\end{aligned}$$

となる. 定理 2.44 より,

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0\end{aligned}$$

が成り立つ. 定理 1.2 より,

$\mu = 0, \lambda = 0$ のとき, つまり $x = \gamma(t)$ では F_x は A_2 型で, この $x \in \mathcal{D}_F$ の近傍では \mathcal{D}_F は cuspidal edge になる.

$\mu = 0, \lambda \neq 0$ のとき, つまり, $x = \gamma(t) + \lambda T(t)$ では F_x は A_1 型で, この $x \in \mathcal{D}_F$ の近傍では \mathcal{D}_F は平面に微分同相になる. (図 1)

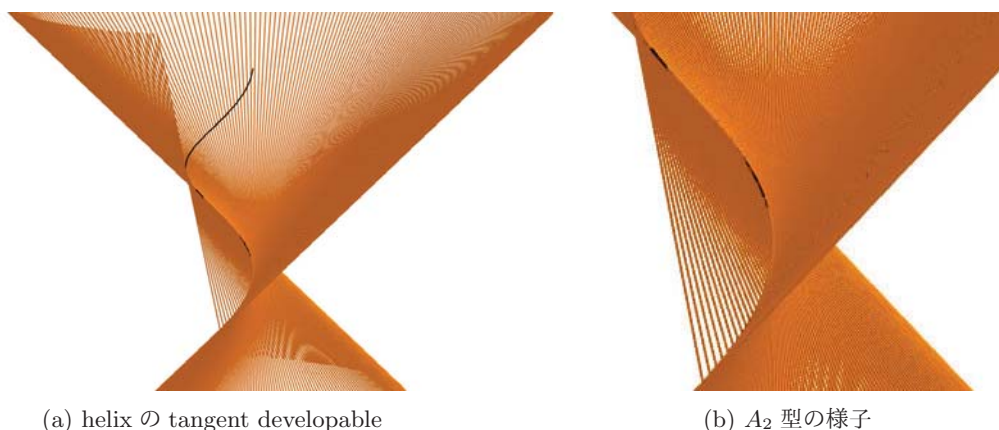


図 1

2 準備

2.1 多様体と接空間

2.1.1 多様体

定義 2.1. $f : (\mathbb{R}^n, u) \rightarrow \mathbb{R}^p$ で f は点 u を含む \mathbb{R}^n のある開集合 U で定義される写像を表すとする. $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ とおく. f_i の全ての階における偏導関数が存在し, かつ U 上連続であるとき, f をなめらかであるという.

f がなめらかであるとき,

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_1^3}, \dots$$

等, 全てが存在し, かつ連続となる. そして,

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1}$$

というように全ての階における偏導関数は偏微分の順序によらないことが知られている.

定義 2.2 (ヤコビ行列). f を定義 2.1 のようななめらかな写像, $v \in U$ とする. このとき,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{各偏微分は } v \text{ における偏微分係数とする.})$$

を v における f のヤコビ行列という. これを表現行列とする線形写像 $Df(v) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ を v における f の微分という.

定義 2.3 (微分同相). $U, V \subset \mathbb{R}^m$ とする. 写像 $\phi : U \rightarrow V$ が

- (1) ϕ は全単射
 - (2) ϕ と ϕ^{-1} がともになめらか
- をみたすとき ϕ を微分同相という.

定理 2.4 (逆関数定理). U_1 を \mathbb{R}^m の開集合, $\phi : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ をなめらかな写像, $u \in U_1$ とする. u における ϕ のヤコビ行列が正則行列であるとき, 開集合 $U \subset U_1$ が存在して ($u \in U$), $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ は微分同相になる.

ϕ を u における局所微分同相写像とよぶ.

例 2.5. $m = 1$, $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ とする. (U は \mathbb{R} の開集合, つまり u を含む開区間.) ϕ のヤコビ行列は 1×1 行列になるので, この行列が正則行列となるための必要十分条件は, ヤコビ行列が 0 でないことである. よって, ϕ が局所微分同相となるための必要十分条件は $\phi'(u) \neq 0$ となることである.

$\mathbb{R}^{n+q} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ において, U を $w = (u_1, \dots, u_n, 0, \dots, 0)$ を含む開集合, $U \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ を W とする. この W を連結にとる. 写像 $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ に対し, $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ を微分同相とする.

定義 2.6 (パラメータ付き n 次元多様体). $M = \phi(W)$ を \mathbb{R}^{n+q} におけるパラメータ付き n 次元多様体とよぶ. そして, $\gamma = \phi|W$ を M のパラメータ写像とよぶ. 整数 q を \mathbb{R}^{n+q} における M の余次元とよぶ. γ をうめ込みともよぶ. また M は \mathbb{R}^{n+q} のうめ込まれた部分多様体ともよばれる.

$\gamma(x_1, \dots, x_n) = \phi(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ であるので

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}(w) = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(w) \quad (1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n+q)$$

を得る. よって w における γ のヤコビ行列は, w における ϕ のヤコビ行列の最初の n 列から成ることになり, その結果 γ のヤコビ行列のランクは n になる.

2.1.2 正則値

定義 2.7. $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ で f は \mathbb{R}^m のある開集合で定義される写像を表すとする. 線形写像 $Df(x)$ が全射であるとき, \mathbb{R}^m の点 x を f の正則点, f を x において沈め込みであるという. また, $f(x) = c$ となる f の (定義域内の) すべての x が正則点となるような点 $c \in \mathbb{R}^p$ を f の正則値とよぶ.

線形写像 $Df(x)$ のランクが $\min(m, p)$ よりも小さくなる点 $x \in \mathbb{R}^m$ を臨界点とよぶ. また, x が臨界点である $f(x) \in \mathbb{R}^p$ を臨界値とよぶ.

定理 2.8 (陰関数定理). 写像 $f: (\mathbb{R}^{n+q}, (a, b)) \rightarrow \mathbb{R}^q$ は $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{n+q}$ の近傍で定義され, $f(a, b) = c$ が成り立つとする. \mathbb{R}^{n+q} における座標を $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q)$ と書き,

$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial y_q} \end{pmatrix}$ を考える. この行列が $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+q}$ で正則であるならば, 以下をみたすような

\mathbb{R}^n における a の近傍 A , \mathbb{R}^q における b の近傍 B が存在する.

任意の $x \in A$ に対し, $f(x, g(x)) = c$ をみたす B の点 $g(x)$ が一意的に存在する.

さらに, 写像 $g: A \rightarrow B$ はなめらかになる.

証明. $F: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, (a, b)) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ を $F(x, y) = (x, f(x, y))$ で定義する. F を座標表示すると,

$$\begin{aligned} & F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) \\ &= (F_1(x_1, \dots, y_q), F_2(x_1, \dots, y_q), \dots, F_{n+q}(x_1, \dots, y_q)) \end{aligned}$$

となる. すると,

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, y_q) &= x_1 \\ &\vdots \\ F_n(x_1, \dots, y_q) &= x_n \\ F_{n+1}(x_1, \dots, y_q) &= f_1(x_1, \dots, y_q) \\ F_{n+q}(x_1, \dots, y_q) &= f_q(x_1, \dots, y_q) \end{aligned}$$

である. (a, b) での F のヤコビ行列をみると,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_q} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial F_{n+q}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n+q}}{\partial x_n} & \frac{\partial F_{n+q}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_{n+q}}{\partial y_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O \\ (a, b) \text{ における } f \text{ のヤコビ行列} \end{pmatrix}$$

である. 仮定から, (a, b) で $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial y_q} \end{pmatrix}$ は正則なので, (a, b) での F のヤコビ行列は正則. よつ

て, 逆関数定理より, (a, b) の近傍で定義されるなめらかな逆写像 H を F がもつことになる. F の表示より, あるなめらかな写像 h に対して, H は $H(x, y) = (x, h(x, y))$ とかける. ここで, 点 (a, b) の近傍として $F|_{A \times B}$ がなめらかな逆写像をもつように $A \times B$ をとってくる. よつて, $(x, y) \in A \times B$ に対し,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c \\ \Leftrightarrow F(x, y) &= (x, c) \\ \Leftrightarrow (x, y) &= H(x, c) = (x, h(x, c)) \end{aligned}$$

が成立する.

以上より, y は $h(x, c)$ によって一意的に定まり, そして, $g(x) = h(x, c)$ はなめらかな写像になる. □

この定理が示していることは, 行列 $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)$ が (a, b) で正則ならば, x_1, \dots, x_n のなめらかな写像として, y_1, \dots, y_q に関して局所的に $f(x, y) = c$ を解くことができる, ということである.

別の考え方としては, x_1, \dots, x_n をパラメータとして, (a, b) の近傍で集合 $f^{-1}(c)$ をパラメータ付けられる, ということである.

今, $f: (\mathbb{R}^m, v) \rightarrow \mathbb{R}^q$ を v において沈め込み, つまり $Df(v)$ が全射であるとし, $c = f(v)$ とする. v の近傍で $f^{-1}(c)$ が \mathbb{R}^m のパラメータ付き $(m - q)$ 次元多様体であることを示す.

まず, $Df(v)$ が全射より, v における f のヤコビ行列のランクが q であるので, この行列の独立な q 個の列を選んでくる. 簡単のために, このような例として最後の q 個の列をとってくることにする (これは \mathbb{R}^m の座標を置換することで可能). $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ とし ($n = m - q \geq 0$), $v = (a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ と書くと, 陰関数定理の仮定が (a, b) で成り立つ.

$g: A \rightarrow B$ を定理 2.8 のようにとる. すると, 任意の $x \in A$ に対し, $f(x, g(x)) = c$ が成り立つ.

次に $\psi : A \times B \rightarrow \mathbb{R}^m$ を $\psi(x, y) = (x, y - g(x))$ で定義し, $\psi : A \times B \rightarrow U = \psi(A \times B)$ が微分同相であることを確認する. まず, ψ は決め方から全単射である. $\psi(x, y) = (x, y - g(x))$ について, g がなめらかな写像なので ψ もなめらかな写像である. ここで $\phi = \psi^{-1}$ とすると, $\phi(x, y) = (x, y + g(x))$ となり, これもなめらかな写像である. よって, $\psi : A \times B \rightarrow U$ は微分同相である.

また, $f(x, g(x)) = c$ より, $g(x) = y$ のときに $(x, y) \in f^{-1}(c)$ が成り立つ. このとき, $\psi(x, y) = \psi(x, g(x)) = (x, 0)$ である. よって, ψ は $A \times B$ の範囲にある $f^{-1}(c)$ を定義域, $\{\mathbb{R}^n \times \{0\}\} \cap U$ を値域とする写像であることがわかる.

以上のことから以下を得る.

命題 2.9. $f : (\mathbb{R}^m, v) \rightarrow \mathbb{R}^q$ は v において沈め込みであるとし, $f(v) = c$ とする. このとき, $f^{-1}(c) \cap V$ が \mathbb{R}^m においてパラメータ付き $(m - q)$ 次元多様体となるような \mathbb{R}^m における v の近傍 V が存在する.

もし c が $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ の正則値であれば, すべての $v \in f^{-1}(c)$ に対して, 上の結果が成り立つ (すなわち $f^{-1}(c)$ はなめらかな $(m - q)$ 次元多様体となる).

例えば, $m = 2, q = 1, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ とする. $\frac{\partial f}{\partial x}$ または $\frac{\partial f}{\partial y}$ が $(a, b) \in f^{-1}(c)$ において 0 とならないような (a, b) の近傍で $f^{-1}(c)$ はパラメータ付き 1 次元多様体となる. もし $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ ならば, y を $f^{-1}(c)$ の局所パラメータとして使える. もし $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ ならば, x を $f^{-1}(c)$ の局所パラメータとして使える.

2.1.3 接空間

定義 2.10. $v \in \mathbb{R}^m$ とする. $x \in \mathbb{R}^n$ とし, v を始点とするベクトルを x_v , または $(x_1, x_2, \dots, x_n)_v$ とかく. また, 0 を \mathbb{R}^n の原点としたとき, x_0 のことを単に x とかく.

定義 2.11 (接空間, 接ベクトル). v を始点とするすべてのベクトルの集合, つまり $\{x_v \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ を \mathbb{R}_v^n と表し, v の接空間とよぶ. また, x_v を v の接ベクトルとよぶ.

定義 2.12. $f : (\mathbb{R}^n, u) \rightarrow (\mathbb{R}^p, v)$ によって u と $f(u) = v$ を含む開集合において定義される写像を表すとする. u における f の接写像は線型写像 $Tf(u) : \mathbb{R}_u^n \rightarrow \mathbb{R}_v^p$ であり, 表現行列は u における f のヤコビ行列である. よって, 任意の $x_u \in \mathbb{R}_u^n$ に対し, $Tf(u)(x_u) = (Df(u)(x))_v$ が成り立つ.

ここで, 定義 2.6 のように, U を \mathbb{R}^{n+q} の開集合, $W = U \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$, $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+q}$, $M = \phi(W)$ を \mathbb{R}^{n+q} におけるパラメータ付き n 次元多様体とする. すると W は \mathbb{R}^n の部分集合とみなせる. $\gamma = \phi|_W, w \in W$ とする.

定義 2.13. 接写像 $T\gamma(w) : \mathbb{R}_w^n \rightarrow \mathbb{R}_v^{n+q}$ の像を点 $v = \gamma(w)$ での M の接空間 M_v と定める.

ここで, τ_j を w における γ のヤコビ行列の j 列目である, ベクトル $\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial \gamma_{n+q}}{\partial x_j}\right)$ を表すものとする. すると, τ_1, \dots, τ_n が微分係数 $D\gamma(w) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ の像を張ることになる. 同様にして, $(\tau_1)_v, \dots, (\tau_n)_v$ は接写像 $T\gamma(w) : \mathbb{R}_w^n \rightarrow \mathbb{R}_v^{n+q}$ の像を張ることになり, 結果として接空間 M_v

を張ることになる。

最後に、正則値の逆像として現れるパラメータ付き多様体の接平面について調べる。 $f : (\mathbb{R}^{n+q}, v) \rightarrow (\mathbb{R}^q, c)$ に対し、 c を f の正則値とする。すると、 v の近傍 V において、 $M = f^{-1}(c)$ はパラメータ付き n 次元多様体となる。 \mathbb{R}^{n+q} の開集合 U と $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+q}$ を定義 2.6 のようにとり、 $\phi(W) = f^{-1}(c) \cap V$ 、 $\phi(w) = v$ とする。また、 $\gamma = \phi|_W$ とする。すると、任意の $x \in W$ に対して $f(\gamma(x)) = c$ となる。チェインルールを使うと、接写像の合成 $Tf(v) \circ T\gamma(w)$ は $Tf(v) \circ T\gamma(w) = T(f \circ \gamma)(w)$ よりゼロ写像となる。よって、 $\text{im}(T\gamma(w)) \subset \ker(Tf(v))$ が成り立つ。しかし、これら二つのベクトル空間は定義 2.6 と定義 2.7 より次元 n をもっている。したがってこの空間は等しい。以上から、次の命題を得る。

命題 2.14. 点 v 上での $M = f^{-1}(c)$ の接空間は線型写像 $Tf(v) : \mathbb{R}_v^{n+q} \rightarrow \mathbb{R}_c^q$ の核となる。すなわち $M_v = \{y_v : y \in \ker Df(v)\}$ である。

2.2 Envelopes

定義 2.15. $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ をなめらかな写像とする。 t, x_1, \dots, x_r を座標としてとり、パラメータが t である $x = (x_1, \dots, x_r)$ の関数の族として F を考える。

関数 $F(t, x)$ によって $F_t : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ を定める。ここで、すべての t に対して、 0 は F_t の正則値とする。命題 2.9 より、各点の近傍において $C_t = F_t^{-1}(0)$ はパラメータ付き $(r-1)$ 次元多様体となる。

F のヤコビ行列は

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial F}{\partial x_r} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \quad \frac{\partial F_t}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial F_t}{\partial x_r} \right)$$

であり、仮定から $F^{-1}(0)$ における (t, x) に関して、最後の r 個の成分すべてが 0 になることはない。よって、 $F^{-1}(0)$ は \mathbb{R}^{r+1} においてパラメータ付き r 次元多様体となる。

$F^{-1}(0)$ には (t, x) を通る接空間が存在し、 $\ker DF(t, x)$ に平行となる。このとき、

$$\begin{aligned} & \text{接空間が } t \text{ 軸に平行} \\ & \Leftrightarrow (1, 0, \dots, 0) \in \ker DF(t, x) \\ & \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。

$r = 2$ のとき、 \mathbb{R}^3 における集合 $F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ の (x_1, x_2) -平面への射影は一般には包絡線になる。このことを一般的に定義する。

定義 2.16. 関数族 F の envelope または discriminant は以下の集合によって表されるものである。

$$\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^r \mid F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \text{ となるような } t \in \mathbb{R} \text{ が存在する.}\}$$

$x \in \mathcal{D}_F$ で $F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ であるならば、 t は x に対応しているという。

定義 2.17 (後退点). 族 F の後退点集合は以下の集合によって表されるものである.

$$\mathcal{R}_F = \{x \in \mathbb{R}^r \mid F(t, x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \text{ となるような } t \in \mathbb{R} \text{ が存在する.}\}$$

2.3 A_k 型とジェット

2.3.1 A_k 型

$U_i \subset \mathbb{R}$ を開集合, $t_i \in U_i$, $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ をなめらかな関数とする ($i = 1, 2$).

定義 2.18 (右同値). U_i の開部分集合 V_i ($t_i \in V_i$), 微分同相写像 $h : V_1 \rightarrow V_2$ と定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$h(t_1) = t_2 \text{ かつ 任意の } t \in V_1 \text{ で } f_1(t) = f_2(h(t)) + c$$

が成り立つときに, f_1 と f_2 は t_1 と t_2 で右同値であるという.

定義から f_1 は f_2 の変数変換に定数を加えた形で表される. また, $f_1(t) - f_2(h(t)) = c$ と, $h(t_1) = t_2$ から $c = f_1(t_1) - f_2(t_2)$ が成り立つ.

例 2.19. $f_1(t) = t^2$, $f_2(t) = -t^2$, $t_1 = t_2 = 0$ とする. 定義 2.18 をみたく h がとれたとすると, 任意の 0 に近い t に対して,

$$t^2 = -(h(t))^2$$

が成り立つ. しかしこれは $t = h(t) = 0$ の時しか成り立たない. よって f_1 と f_2 は 0 で右同値ではない. しかし, $t_1 = t_2 = 1$ では f_1 と f_2 は右同値になる. 実際に, $h(t) = \sqrt{2-t^2}$, $c = 2$ とすると, $h(t_1) = t_2$ となる近傍で

$$\begin{aligned} f_1(t) &= -(\sqrt{2-t^2})^2 + 2 \\ &= -(h(t))^2 + 2 \\ &= f_2(h(t)) + c \end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 2.20. $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ をなめらかな関数, $k \geq 0$ とする. $f^{(p)}(t_0) = 0$ ($1 \leq p \leq k$) かつ $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ のとき, $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(t) = \pm t^{k+1}$ とすると, f は g に対して右同値になる. ただし, g の $+$ は $f^{(k+1)}(t_0)$ が正の場合に, $-$ は $f^{(k+1)}(t_0)$ が負の場合に対応する.

この定理の証明には次の補題を用いる.

補題 2.21 (アダマールの補題). $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ をなめらかな関数, $f^{(p)}(t_0) = 0$ ($1 \leq p \leq k$) とする. すると t_0 の近傍に含まれる任意の t に対して, $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1} f_1(t_0)$ をみたく関数 $f_1 : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する. さらに $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ ならば $f_1(t_0) \neq 0$ となる.

定理 2.20 の証明. $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ より $f_1(t_0) \neq 0$ が成立. そこで, $h(t) = (t - t_0) \left(\pm f_1(t) \right)^{\frac{1}{k+1}}$ (\pm は $f_1(t_0)$ の符号と一致) とする. すると, $h(t_0) = 0$. また, $h'(t) = \left(\pm f_1(t) \right)^{\frac{1}{k+1}} \pm (t - t_0) \frac{1}{k+1} \left(\pm f_1(t) \right)^{\frac{-k}{k+1}} f_1'(t)$ より, $h'(t_0) = \left(\pm f_1(t_0) \right)^{\frac{1}{k+1}} > 0$ である. よって h は t_0 の近傍において微分同相である. さらに, g を定理 2.20 のようにとると,

$$\begin{aligned} g(h(t)) &= \pm (h(t))^{k+1} \\ &= \pm \left((t - t_0)^{k+1} (\pm f_1(t)) \right) \\ &= (t - t_0)^{k+1} f_1(t) = f(t) - f(t_0) \end{aligned}$$

ただし, 2 行目から 3 行目への等号が成立するのは $f_1(t_0)$ と $f^{(k+1)}(t_0)$ の符号が一致するときである. そこで, $f_1(t_0)$ と $f^{(k+1)}(t_0)$ の符号が一致することを確認する. $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^{k+1} f_1(t_0)$ より, ライプニッツルールを用いると,

$$\begin{aligned} f'(t) &= (k+1)(t - t_0)^k f_1(t) + (t - t_0)^{k+1} f_1'(t) \\ &\vdots \\ f^{(k+1)}(t) &= (k+1)! f_1(t) + ((t - t_0) \text{ を含む項}) \end{aligned}$$

を得る. よって, $f^{(k+1)}(t_0) = (k+1)! f_1(t_0)$ となるので $f_1(t_0)$ と $f^{(k+1)}(t_0)$ の符号は一致する. 以上から,

$$g(h(t)) = f(t) - f(t_0) \Leftrightarrow f(t) = g(h(t)) + f(t_0)$$

となるので f は g に対して右同値となる. □

補題 2.21 の証明. $t_0 = f(t_0) = 0$ として証明する. $f: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $f^{(p)}(0) = 0$ ($1 \leq p \leq k$) とする. 証明したいことは, 関数 f_1 が存在して, 0 の近くの t に対して

$$f(t) = t^{k+1} f_1(t)$$

が成り立つことである. ($f^{(k+1)}(0) \neq 0 \Rightarrow f_1(0) \neq 0$ は定理 2.20 の証明と同様の計算により $f^{(k+1)}(0) = (k+1)! f_1(0)$ から成り立つ.)

k についての帰納法で示す.

$k = 0$ のとき.

$f(0) = 0 \Rightarrow f(t) = t f_1(t)$ をいえばよい.

$$\int_0^1 \frac{d}{du} f(tu) du = \left[f(tu) \right]_0^1 = f(t) - f(0) = f(t)$$

より

$$f(t) = \int_0^1 \frac{d}{du} f(tu) du = \int_0^1 f'(tu) \cdot t du = t \int_0^1 f'(tu) du.$$

ここで $f_1(t) = \int_0^1 f'(tu) du$ とすると, f_1 はなめらかな関数で $f(t) = t f_1(t)$ が成り立つ.

$k = s$ まで成立していると仮定し, $k = s + 1$ で成立することを示す.

$f^{(p)}(0) = 0$ ($1 \leq p \leq s+1$) とする. $f^{(0)}(0) = 0$ より $f(t) = tf_2(t)$ と, あるなめらかな関数 f_2 を使って表される. またライプニッツルールより $f_2^{(p)}(0) = 0$ ($1 \leq p \leq s$) を得る. よって帰納法の仮定から, あるなめらかな関数 f_1 が存在して $f_2(t) = t^{s+1}f_1(t)$ と表される. よって, $f(t) = tf_2(t) = t^{s+2}f_1(t)$ と表される. \square

定義 2.22 (A_k 型). $k \geq 0$ に対して $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ は $g(t) = \pm t^{k+1}$ と右同値であるとする. このとき f は t_0 において A_k 型である, もしくは t_0 において A_k 特異点をもつという. また $f^{(p)}(t_0) = 0$ ($1 \leq p \leq k$) をみたすときは f は $A_{\geq k}$ 型であるという. その場合は, ある $l (\geq k)$ に対して f は A_l 型であるか, もしくは, 全ての階の f の導関数が t_0 において 0 になるかのどちらかが考えられる.

2.3.2 ジェット

定義 2.23 (k -ジェット). k を 1 以上の整数とする. 点 t_0 における f の k -ジェットは k 次までのテイラー級数で, 定数項を消去したもので得られる多項式のことである. すなわち,

$$j^k f(t_0) = tf'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + \cdots + \frac{1}{k!} t^k f^{(k)}(t_0)$$

のことである.

2つの k -ジェットが同値であるということは, それらが多項式として恒等的に等しいときのことをいう.

ジェットの中に定数項を含めた方がよいときは $f(t_0) + j^k f(t_0)$ で t_0 における f の定数項を含んだ k -ジェットを示す.

k -ジェットの定義から明らかに,

$$\begin{aligned} & f \text{ は } t = t_0 \text{ で } A_k \text{ 型である} \\ \Leftrightarrow & j^k f(t_0) = 0, \quad j^{k+1} f(t_0) \neq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. ($k = 0$ の場合も f が $t = t_0$ で A_0 型である $\Leftrightarrow f'(t_0) \neq 0 \Leftrightarrow j^1 f(t_0) \neq 0$ なので, $j^0 f(t_0)$ を 0 と考えれば成立する.)

例 2.24 (2つの関数の和, 積についての k -ジェット). 2つの関数の和についての k -ジェットは

$$\begin{aligned} & j^k (f + g)(t_0) \\ &= t(f + g)'(t_0) + \frac{t^2}{2!} (f + g)''(t_0) + \cdots + \frac{1}{k!} t^k (f + g)^{(k)}(t_0) \\ &= t(f'(t_0) + g'(t_0)) + \frac{t^2}{2!} (f''(t_0) + g''(t_0)) + \cdots + \frac{1}{k!} t^k (f^{(k)}(t_0) + g^{(k)}(t_0)) \\ &= tf'(t_0) + \frac{t^2}{2!} f''(t_0) + \cdots + \frac{1}{k!} t^k f^{(k)}(t_0) + tg'(t_0) + \frac{t^2}{2!} g''(t_0) + \cdots + \frac{1}{k!} t^k g^{(k)}(t_0) \\ &= j^k f(t_0) + j^k g(t_0) \text{ より,} \\ & j^k (f + g)(t_0) = j^k f(t_0) + j^k g(t_0) \text{ が成り立つ.} \end{aligned}$$

2つの関数の積についての k -ジェットは

$$\begin{aligned}
j^k(fg)(t_0) &= t(fg)'(t_0) + \frac{t^2}{2!}(fg)''(t_0) + \cdots + \frac{t^k}{k!}(fg)^{(k)}(t_0) \\
&= t\left((f'g)(t_0) + (fg')(t_0)\right) + \frac{t^2}{2!}\left((f''g)(t_0) + 2(f'g')(t_0) + (fg'')(t_0)\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{t^k}{k!}\left((f^{(k)}g)(t_0) + k(f^{(k-1)}g')(t_0) + \cdots + (fg^{(k)})(t_0)\right) \\
&= g(t_0)\left(tf'(t_0) + \frac{t^2}{2!}f''(t_0) + \cdots + \frac{t^k}{k!}f^{(k)}(t_0)\right) \\
&\quad + f(t_0)\left(tg'(t_0) + \frac{t^2}{2!}g''(t_0) + \cdots + \frac{t^k}{k!}g^{(k)}(t_0)\right) \\
&\quad + \frac{t^2}{2!} \cdot \binom{2}{1}(f'g')(t_0) + \frac{t^3}{3!}\left(\binom{3}{1}(f''g')(t_0) + \binom{3}{2}(f'g'')(t_0)\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{t^k}{k!}\left(\binom{k}{1}(f^{(k-1)}g')(t_0) + \cdots + \binom{k}{k-1}(f'g^{(k-1)})(t_0)\right) \\
&= g(t_0)j^k f(t_0) + f(t_0)j^k g(t_0) + \frac{t^2}{2!} \cdot \binom{2}{1}(f'g')(t_0) \\
&\quad + \frac{t^3}{3!}\left(\binom{3}{1}(f''g')(t_0) + \binom{3}{2}(f'g'')(t_0)\right) + \cdots \\
&\quad + \frac{t^k}{k!}\left(\binom{k}{1}(f^{(k-1)}g')(t_0) + \cdots + \binom{k}{k-1}(f'g^{(k-1)})(t_0)\right)
\end{aligned}$$

より, 上式の3項目以降を(*)とおくと,

$$\begin{aligned}
(*) &= g'(t_0)\left(\frac{t^2}{2!}\binom{2}{1}f'(t_0) + \frac{t^3}{3!}\binom{3}{1}f''(t_0) + \cdots + \frac{t^k}{k!}\binom{k}{1}f^{(k-1)}(t_0)\right) \\
&\quad + g''(t_0)\left(\frac{t^3}{3!}\binom{3}{2}f'(t_0) + \frac{t^4}{4!}\binom{4}{2}f''(t_0) + \cdots + \frac{t^k}{k!}\binom{k}{2}f^{(k-2)}(t_0)\right) + \cdots \\
&\quad + g^{(k-2)}(t_0)\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\binom{k-1}{k-2}f'(t_0) + \frac{t^k}{k!}\binom{k}{k-2}f''(t_0)\right) + g^{(k-1)}(t_0)\frac{t^k}{k!}\binom{k}{k-1}f'(t_0) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} g^{(j)}(t_0)\left(\frac{t^{j+1}}{(j+1)!}\binom{j+1}{j}f'(t_0) + \cdots + \frac{t^k}{k!}\binom{k}{j}f^{(k-j)}(t_0)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} g^{(j)}(t_0)\left(\frac{t^{j+1}}{(j+1)!}(j+1)f'(t_0) + \cdots + \frac{t^k}{k!} \cdot \frac{k!}{(k-j)!j!}f^{(k-j)}(t_0)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} g^{(j)}(t_0)\left(\frac{t^{j+1}}{j!}f'(t_0) + \cdots + \frac{t^k}{(k-j)!j!}f^{(k-j)}(t_0)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{t^j}{j!}g^{(j)}(t_0)\left(tf'(t_0) + \cdots + \frac{t^{k-j}}{(k-j)!}f^{(k-j)}(t_0)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=tg'(t_0)\left(tf'(t_0)+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(t_0)\right)+\cdots \\
&\quad +\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}g^{(k-2)}(t_0)\left(tf'(t_0)+\frac{t^2}{2!}f''(t_0)\right)+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}g^{(k-1)}(t_0)tf'(t_0)
\end{aligned}$$

を得る. 一方で,

$$\begin{aligned}
&(f(t_0)+j^k f(t_0))(g(t_0)+j^k g(t_0)) \\
&=g(t_0)j^k f(t_0)+f(t_0)j^k g(t_0)+f(t_0)g(t_0)+j^k f(t_0)j^k g(t_0) \\
&=g(t_0)j^k f(t_0)+f(t_0)j^k g(t_0)+f(t_0)g(t_0) \\
&\quad +\left(\left(tf'(t_0)+\frac{t^2}{2!}f''(t_0)+\cdots+\frac{1}{k!}t^k f^{(k)}(t_0)\right)\left(tg'(t_0)+\frac{t^2}{2!}g''(t_0)+\cdots+\frac{1}{k!}t^k g^{(k)}(t_0)\right)\right) \\
&=g(t_0)j^k f(t_0)+f(t_0)j^k g(t_0)+f(t_0)g(t_0) \\
&\quad +tg'(t_0)\left(tf'(t_0)+\frac{t^2}{2!}f''(t_0)+\cdots+\frac{1}{k!}t^k f^{(k)}(t_0)\right) \\
&\quad +\frac{t^2}{2!}g''(t_0)\left(tf'(t_0)+\frac{t^2}{2!}f''(t_0)+\cdots+\frac{1}{k!}t^k f^{(k)}(t_0)\right)+\cdots \\
&\quad +\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}g^{(k-2)}(t_0)\left(tf'(t_0)+\frac{t^2}{2!}f''(t_0)+\cdots+\frac{1}{k!}t^k f^{(k)}(t_0)\right) \\
&\quad +\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}g^{(k-1)}(t_0)\left(tf'(t_0)+\frac{t^2}{2!}f''(t_0)+\cdots+\frac{1}{k!}t^k f^{(k)}(t_0)\right) \\
&\quad +\frac{t^k}{k!}g^{(k)}(t_0)\left(tf'(t_0)+\frac{t^2}{2!}f''(t_0)+\cdots+\frac{1}{k!}t^k f^{(k)}(t_0)\right)
\end{aligned}$$

である. 以上をまとめると次が成り立つ

$$\begin{aligned}
j^k(fg)(t_0) &= (\text{積}(f(t_0)+j^k f(t_0))(g(t_0)+j^k g(t_0))) \text{ の} \\
&\quad \text{定数項と } k+1 \text{ 次以上の項を消去した多項式).
\end{aligned}$$

例 2.25 (合成関数の k -ジェット). 0 における $\exp(\sin t)$ の 4 -ジェットを求める. $y = \exp u$, $u = \sin t$ とする. $u = 0$ における $\exp u$ の k -ジェットを求めると,

$$1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots + \frac{u^k}{k!}$$

である. $t = 0$ における $\sin t$ の 3 -ジェットは

$$t - \frac{1}{6}t^3$$

である. これを $\exp u$ の k -ジェットに代入すると, $t = 0$ における $\exp(\sin t)$ の 4 -ジェットは

$$1 + \left(t - \frac{1}{6}t^3\right) + \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{6}t^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(t - \frac{1}{6}t^3\right)^3 + \frac{1}{24}\left(t - \frac{1}{6}t^3\right)^4$$

の定数項と 5 次以上の項を消去したもの, つまり,

$$\begin{aligned}
&t + \frac{1}{2}t^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)t^4 \\
&=t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4
\end{aligned}$$

となる. 直接計算すると,

$$\begin{aligned}
(\exp(\sin t))' &= \cos t \cdot \exp(\sin t) \\
(\exp(\sin t))'' &= -(\sin t)\exp(\sin t) + (\cos^2 t)\exp(\sin t) \\
(\exp(\sin t))''' &= -(\cos t)\exp(\sin t) - (\sin t \cos t)\exp(\sin t) + 2 \cos t(-\sin t)\exp(\sin t) \\
&\quad + (\cos^3 t)\exp(\sin t) \\
(\exp(\sin t))^{(4)} &= (\sin t)\exp(\sin t) - (\cos^2 t)\exp(\sin t) - (\cos^2 t \sin^2 t)\exp(\sin t) \\
&\quad - (\sin t \cos^2 t)\exp(\sin t) - 2(\sin^2 t \cos^2 t)\exp(\sin t) \\
&\quad - 2(\cos^2 t \sin t)\exp(\sin t) - 3(\cos^2 t \sin t)\exp(\sin t) \\
&\quad + (\cos^4 t)\exp(\sin t) \\
&= (\sin t)\exp(\sin t) - (\cos^2 t)\exp(\sin t) - 6(\sin t \cos^2 t)\exp(\sin t) \\
&\quad - (\cos^2 t - \sin^2 t)\exp(\sin t) + (\cos^4 t)\exp(\sin t) - 2\exp(\sin t)
\end{aligned}$$

より, 0 における $\exp(\sin t)$ の 4-ジェットは確かに

$$t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4$$

である.

2.4 Unfoldings

F を関数 f を含んだ関数族とする. パラメータを少し変えることは, f を f に近い関数に摂動するとみなせる. f を含んだ関数族は f の unfolding ともよばれる.

定義 2.26 (unfolding). $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ をなめらかな関数とし, $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(t) = F(t, x_0)$ とする. このとき, F を f の r -parameter unfolding とよぶ.

2.4.1 Versal unfoldings

ここでは versal unfolding に関する定理を証明なしで紹介する.

定理 2.27. $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ とし, $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$G(t, u) = u_1 + u_2 t + u_3 t^2 + \dots + u_k t^{k-1} + t^{k+1}$$

とする. すると, $t_0 = 0$ での t^{k+1} の任意の unfolding \bar{F} に対し $a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ と $b : (\mathbb{R}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ が存在して

$$\bar{F}(t, x) = G(a(t, x), b(x))$$

と書くことができる. ここで, a は 0 に近い任意の t に対して $a(t, 0) = t$ をみたく.

定義 2.28. $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (t_0, y_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ を関数 $g = G_{y_0}$ の s -parameter unfolding とする. また, 以下の関数はすべてなめらかとする.

$$\begin{aligned} a : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ただし, } t_0 \text{ の近傍で } a(t, x_0) = t \text{ とする.} \\ b : (\mathbb{R}^r, x_0) &\rightarrow (\mathbb{R}^s, y_0) \end{aligned}$$

このとき, $F(t, x) = G(a(t, x), b(x))$ によって定義される unfolding $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ を G から誘導された unfolding という. また, g の任意の unfolding が G から誘導された unfolding であるならば, G を t_0 における g の versal unfolding という.

ここで, 与えられた x に対して, $F_x(t)$ を $F(t, x)$ で, $a_x(t)$ を $a(t, x)$ で定義するならば, 上の式は

$$F_x(t) = G_{b(x)}(a_x(t))$$

というように書ける. このことは, (t, x) が (t_0, x_0) に十分近ければ t での F_x が $a_x(t)$ での $G_{b(x)}$ に右同値であると解釈することができる. 言い換えると, F_x は関数 G_y の族に局所的に存在していると言える.

定理 2.29. $G(t, x) = \pm t^{k+1} + x_1 + x_2 t + \cdots + x_k t^{k-1}$ によって与えられる unfolding $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ は $t_0 = 0$ における $g(t) = \pm t^{k+1}$ の versal unfolding である.

f が A_k 特異点を持ち, F が f の unfolding のとき, F が f の versal unfolding になるかどうかを判別する方法を紹介する.

定理 2.30. $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ は A_k 型 ($k \geq 1$) を持つとし, $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ は f の r -parameter unfolding $F(t, x_0) = f(t)$ とする. すると,

$$\begin{aligned} &F \text{ が } f \text{ の versal unfolding である} \\ \Leftrightarrow &\text{次数が } (k-1) \text{ 以下の全ての实多項式 } p(t) \text{ が, } c_i \text{ を実数として} \\ &p(t) = \sum_{i=1}^r c_i \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i}(t_0, x_0) + j^{k-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0) \right) (t_0) \right\} \text{ と表される} \end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 2.31 (行列による判定). $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ は A_k 型 ($k \geq 1$) を持つとし, $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ は f の r -parameter unfolding $F(t, x_0) = f(t)$ とする. t_0 における $\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_0)$ の定数項を含んだ $(k-1)$ -ジェットを $\alpha_{0i} + \alpha_{1i}t + \alpha_{2i}t^2 + \cdots + \alpha_{k-1,i}t^{k-1}$ と書くことにする. すると,

$$\begin{aligned} &F \text{ が } f \text{ の versal unfolding である} \\ \Leftrightarrow &j = 0, 1, \dots, k-1, \quad i = 1, 2, \dots, r \text{ に対して,} \\ &(j, i) \text{ 成分が } \alpha_{j,i} \text{ の } k \times r \text{ 行列がランク } k \text{ をもつ.} \end{aligned}$$

が成り立つ. もちろん, これが起きるのは $r \geq k$ のときである.

2.4.2 判別集合

定義 2.32 (判別集合). F を f の r -parameter unfolding であるとする. F のゼロ集合 \mathcal{M}_F を

$$\mathcal{M}_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \mid F(t, x) = 0\}$$

で定める. そして F の判別集合 \mathcal{D}_F を

$$\mathcal{D}_F = \left\{ x \in \mathbb{R}^r \mid (t, x) \text{ において } F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \text{ となる } t \in \mathbb{R} \text{ が存在する.} \right\}$$

で定める.

定理 2.33 (判別集合の一意性). f は t_0 において, g は t_1 において A_k 型 ($k \geq 1$) をもつとし, F, G を t_0 における f と t_1 における g の任意の 2 つの versal r -parameter unfolding とする. すると, $\mathcal{M}_F \cap U$ と $\mathcal{M}_G \cap V$ がパラメータ付き r 次元多様体となるような (t_0, x_0) の近傍 $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ と (t_1, u_0) の近傍 $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ が存在する. さらにこれらの近傍 U, V は以下の条件をみたす微分同相写像 $\phi: U \rightarrow V$ が存在するように取ってくるができる.

- (1) なめらかな写像 $a: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow (\mathbb{R}, t_1)$, $b: (\mathbb{R}^r, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, u_0)$ が存在し, ϕ は $\phi(t, x) = (a(t, x), b(x))$ の形である.
- (2) $\phi(\mathcal{M}_F \cap U) = \mathcal{M}_G \cap V$
- (3) 射影 $\pi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ に対し, b は $\pi(U)$ から $\pi(V)$ への微分同相写像で, $b(\mathcal{D}_F \cap \pi(U)) = \mathcal{D}_G \cap \pi(V)$ が成立する.

この定理より A_k 特異点の任意の r -parameter versal unfolding によって \mathcal{D}_F と \mathcal{D}_G は局所的に互いに微分同相になる.

定理 2.34 (A_1 型の versal unfolding). $F: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ ($r \geq 1$) を

$$F(t, x) = t^2 + x_1, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$$

とする. このとき, F の判別集合は $\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^r \mid x_1 = 0\}$ であり,

- $r = 1$ の場合, \mathbb{R}^1 の点
- $r = 2$ の場合, \mathbb{R}^2 の直線
- $r = 3$ の場合, \mathbb{R}^3 の平面
- \vdots

となる. \mathcal{D}_F を折り目とよぶ.

証明. $\frac{\partial F}{\partial t} = 2t$ より, 明らか. □

定理 2.35 (A_2 型の versal unfolding). $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ ($r \geq 2$) を

$$F(t, x) = t^3 + x_1 + x_2 t, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$$

とする. このとき, F の判別集合は $\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^r \mid 27x_1^2 + 4x_2^3 = 0\}$ である.

$r = 2$ の場合, \mathcal{D}_F をカスプ,

$r = 3$ の場合, \mathcal{D}_F を cuspidal edge

とよぶ.

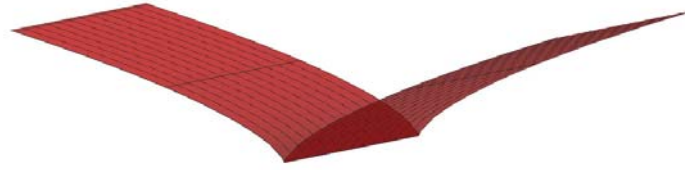


図 2: cuspidal edge

証明. $\frac{\partial F}{\partial t} = 3t^2 + x_2$ である. ここから, $F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2t^3, x_2 = -3t^2$ となる. つまり,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F &= \{x \in \mathbb{R}^r \mid x_1 = 2t^3, x_2 = -3t^2 (t \in \mathbb{R})\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^r \mid 27x_1^2 + 4x_2^3 = 0\} \end{aligned}$$

である. よって, 上の定理が成り立つ. □

定理 2.36 (A_3 型の versal unfolding). $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (0, 0)) \rightarrow \mathbb{R}$ ($r \geq 3$) を

$$F(t, x) = t^4 + x_1 + x_2 t + x_3 t^2, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$$

とする. このとき F の判別集合は $\mathcal{D}_F = \{x \in \mathbb{R}^r \mid t^4 + x_1 + x_2 t + x_3 t^2 = 4t^3 + x_2 + 2x_3 t = 0 (t \in \mathbb{R})\}$ である. $r = 3$ の場合, \mathcal{D}_F を swallowtail とよぶ.

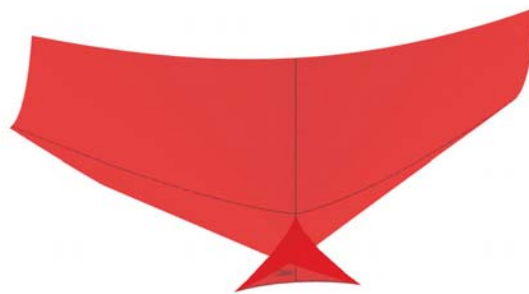


図 3: swallowtail

証明. $\frac{\partial F}{\partial t} = 4t^3 + x_2 + 2x_3 t$ であることから明らか. □

2.5 空間曲線

2.5.1 弧長

定義 2.37. 開集合 $I \subset \mathbb{R}$ に対し次をみたすなめらかな写像 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ を正則曲線とよぶ. $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ と表したとき, $\gamma'_1(t) = \gamma'_2(t) = \dots = \gamma'_n(t) = 0$ をみたす $t \in I$ が存在しない.

定義 2.38. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ を正則曲線とする.

(1) $\gamma'(t)$ もしくは $\frac{d\gamma}{dt}$ で表されるベクトル $(\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$ を速度ベクトルという.

(2) $\|\gamma'(t)\|$ を $\gamma'(t)$ の長さとする. ベクトル $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ を t における γ の, もしくは $\gamma(t)$ の単位接線ベクトルという.

(3) すべての t に対して $\|\gamma'(t)\| = 1$ をみたすとき, γ を単位速度曲線と呼ぶ.

定義 2.39 (弧長). 平面曲線 γ を $\gamma : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ とする. このとき, 点 $\gamma(t_0)$ から点 $\gamma(t)$ までの弧長 $l(t)$ を

$$l(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt$$

で定める. 特に, γ が単位速度曲線だった場合, $l(t) = t - t_0$ となる. つまり, パラメータ t が弧長をはかっている. 単位速度曲線はしばしば弧長によってパラメータづけられた曲線と呼ばれる.

命題 2.40. 曲線 $\gamma \circ l^{-1} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ は単位速度曲線である.

証明. $h = l^{-1}$ とする. 合成関数の微分法より, 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $(\gamma \circ h)'(s) = \gamma'(h(s)) \cdot h'(s)$ が成り立つ. また, $l(h(s)) = s$ から $l'(h(s)) \cdot h'(s) = 1$ が成り立つ. l の定義から $l'(h(s)) = \|\gamma'(h(s))\|$ となるので, $h'(s) = \frac{1}{l'(h(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(h(s))\|}$ よって,

$$\begin{aligned} \|(\gamma \circ h)'(s)\| &= \|\gamma'(h(s)) \cdot h'(s)\| \\ &= \|\gamma'(h(s))\| \cdot \frac{1}{\|\gamma'(h(s))\|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって $\gamma \circ l^{-1}$ は単位速度曲線となる. □

このように, 正則曲線は弧長 $l(t)$ に変数変換することにより, いつでも単位速度曲線にできる.

2.5.2 曲率

以降, 単位速度曲線はパラメータ s を用いて表す.

定義 2.41 (曲率). $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を単位速度曲線とする.

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{(\alpha_1''(s))^2 + (\alpha_2''(s))^2 + \cdots + (\alpha_n''(s))^2}$$

と表される関数 $\kappa(s)$ を α の曲率という.

$\kappa(s) \neq 0$ のとき, $N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ とおくと $N(s)$ は単位ベクトルになる. また, $T(s) \cdot T(s) = 1$ が成り立ち, 両辺微分すると $T(s) \cdot T'(s) = 0$ となるので, $T(s) \cdot N(s) = T(s) \cdot \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = 0$ から $N(s)$ は $T(s)$ に直交することがわかる.

$\kappa(s) = 0$ のとき, $N(s)$ は定義できない. $N(s)$ を α の主法線ベクトルという.

定理 2.42. 任意の正則曲線 $\gamma: (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して弧長関数を $l: (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ とする. $\kappa(t)$ を $s = l(t)$ における単位速度曲線 $\alpha = \gamma \circ l^{-1}$ の曲率 $\kappa_\alpha(s)$ と定義する. このとき, $\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{l'(t)} = \frac{\|T'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}$ が成り立つ.

証明. $T(t)$ を γ の t での単位接線ベクトル, $T_\alpha(s)$ を α の s での単位接線ベクトルとする. すると,

$$T(t) = T_\alpha(s) \Leftrightarrow T(t) = T_\alpha(l(t))$$

が成り立つ. 両辺 t で微分して, $T'(t) = T'_\alpha(l(t)) \cdot l'(t)$. すると

$$\begin{aligned} \|T'_\alpha(l(t)) \cdot l'(t)\| &= \|T'_\alpha(l(t))\| |l'(t)| \quad (l \text{ の定義から } l'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \text{ より}) \\ &= \kappa_\alpha(l(t)) \cdot l'(t) \\ &= \kappa(t) \cdot l'(t) \end{aligned}$$

より, $\|T'(t)\| = \|T'_\alpha(l(t)) \cdot l'(t)\| = \kappa(t) \cdot l'(t)$. よって,

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{l'(t)} = \frac{\|T'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}$$

を得る. □

2.5.3 フレネ-セレ公式

$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を単位速度空間曲線, $\alpha'(s) = T(s)$ を接ベクトルとする. このとき曲率は $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ で与えられる. また $\kappa(s) \neq 0$ とすると $T(s)$ に直交する法線ベクトル $N(s)$ が存在し, $N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$ より $T'(s) = \kappa(s)N(s)$.

以下, $\kappa(s) \neq 0$ とする. $T(s)$ と $N(s)$ はたがいに直交している単位ベクトルなので, $T(s), N(s)$ の両方に直交していて, T, N, B が右手系になっているような単位ベクトル $B(s)$ を考えることがで

きる. この $B(s)$ を従法線ベクトルとよぶ. $\alpha(s)$ を通る $N(s), B(s)$ で張られる平面を s における法平面, $T(s), N(s)$ で張られる平面を s における接触平面とよぶ.

$N \cdot N = 1$ を両辺微分すると $N \cdot N' = 0$ より N' は N に直交している. よって適当な $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$ を選べば

$$N' = \lambda T + \tau B$$

と書ける. また $T \cdot N = 0$ を両辺微分すると $T'N + TN' = 0$ となるので,

$$\begin{aligned} \kappa N \cdot N + T \cdot (\lambda T + \tau B) &= 0 \\ \Leftrightarrow \kappa + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

以上から

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

が得られる. ここで関数 $\tau(s)$ を曲線 α の振率という.

$B \cdot B = 1$ より, 先ほどと同様にして B' は B に直交しているベクトルであることがいえる. すると $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ に対して,

$$B' = \mu T + \nu N$$

と書ける. $B \cdot T = 0$ から

$$\begin{aligned} B' \cdot T + B \cdot T' &= 0 \\ \Leftrightarrow (\mu T + \nu N) \cdot T + B \cdot \kappa N &= 0 \\ \Leftrightarrow \mu &= 0 \end{aligned}$$

また, $B \cdot N = 0$ から

$$\begin{aligned} B' \cdot N + B \cdot N' &= 0 \\ \Leftrightarrow (\mu T + \nu N) \cdot N + B \cdot (-\kappa T + \tau B) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nu + \tau &= 0 \\ \Leftrightarrow \nu &= -\tau. \end{aligned}$$

以上から

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

が得られる.

次に, 単位速度とは限らない正則曲線 $\gamma: (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ について考える. 弧長関数 $l: (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ に対し, $\alpha = \gamma \circ l^{-1}$ とおくと, $T_\gamma(t) = T_\alpha(l(t)), N_\gamma(t) = N_\alpha(l(t)), B_\gamma(t) = B_\alpha(l(t))$ が成り立つ. γ の曲率を $\kappa(t)$, 振率を $\tau(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} T'_\gamma(t) &= T'_\alpha(l(t))l'(t) \\ &= \kappa_\alpha(l(t))N_\alpha(l(t))l'(t) \\ &= \kappa(t)N_\gamma(t)l'(t) \\ &= \kappa(t)N_\gamma(t) \|\gamma'(t)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N'_\gamma(t) &= N'_\alpha(l(t))l'(t) \\
&= -\kappa_\alpha(l(t))T_\alpha(l(t))l'(t) + \tau_\alpha(l(t))B_\alpha(l(t))l'(t) \\
&= -\kappa(t)T_\gamma(t)l'(t) + \tau(t)B_\gamma(t)l'(t) \\
&= -\kappa(t)T_\gamma(t) \|\gamma'(t)\| + \tau(t)B_\gamma(t) \|\gamma'(t)\| \\
B'_\gamma(t) &= B'_\alpha(l(t))l'(t) \\
&= -\tau_\alpha(l(t))N_\alpha(l(t))l'(t) \\
&= -\tau(t)N_\gamma(t)l'(t) \\
&= -\tau(t)N_\gamma(t) \|\gamma'(t)\|
\end{aligned}$$

が成り立つ.

以上のことをまとめると, 以下を得る.

定理 2.43 (フレネ-セレ公式). 単位速度空間曲線 $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}
T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\
N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\
B'(s) &= -\tau(s)N(s)
\end{aligned}$$

また, 一般の正則空間曲線 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対しては以下が成り立つ.

$$\begin{aligned}
T'(t) &= \kappa(t)N(t) \|\gamma'(t)\| \\
N'(t) &= -\kappa(t)T(t) \|\gamma'(t)\| + \tau(t)B(t) \|\gamma'(t)\| \\
B'(t) &= -\tau(t)N(t) \|\gamma'(t)\|
\end{aligned}$$

2.5.4 一般空間曲線における種々の計算

γ を正則空間曲線, s を γ の弧長, t を γ のパラメータとする. また $\kappa(t) > 0$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}
\|\gamma'\| &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \|\gamma'\| dt \right) = s' \text{ より } \|\gamma'\| = s', \\
T &= \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \text{ から } \gamma' = \|\gamma'\| T = s'T \text{ より } \gamma' = s'T
\end{aligned}$$

より以下が成り立つ.

定理 2.44. (1) $\gamma'' = \kappa s'^2 N + s'T$, $\gamma' \times \gamma'' = \kappa s'^3 B$, $\kappa = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}$ が成り立つ.

(2) $(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' = \kappa^2 \tau s'^6$, $\tau = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}$ が成り立つ.

証明. (1) 定理 2.43 を用いて, $\gamma'' = s''T + s'T' = s''T + s'\kappa N \parallel \gamma' \parallel = \kappa s'^2 N + s''T$. ここから,

$$\begin{aligned}\gamma' \times \gamma'' &= (s'T) \times (\kappa s'^2 N + s''T) \\ &= (s'T) \times (\kappa s'^2 N) + (s'T) \times (s''T) \\ &= \kappa s'^3 (T \times N) + s' s'' (T \times T) \\ &= \kappa s'^3 B\end{aligned}$$

が成り立つ. $s' > 0, \kappa > 0$ より,

$$\kappa = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{s'^3} = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}$$

を得る.

(2)

$$\begin{aligned}\gamma''' &= (\kappa' s'^2 + 2\kappa s' s'')N + \kappa s'^2 N' + s''T' + s'''T \\ &= (\kappa' s'^2 + 2\kappa s' s'')N - \kappa^2 s'^2 T \parallel s' \parallel + \kappa s'^2 \tau B \parallel s' \parallel + \kappa s'' N \parallel s' \parallel + s'''T \\ &= (\kappa' s'^2 + 2\kappa s' s'' + \kappa s' s'')N + (s''' - \kappa^2 s'^3)T + \kappa s'^3 \tau B\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' &= \kappa s'^3 B \cdot \gamma''' \\ &= \kappa^2 \tau s'^6\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上から,

$$\tau = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\kappa^2 s'^6} = \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}$$

が成り立つ. □

3 空間曲線の tangent developable

セクション 1 で述べたように, このセクションでは空間曲線の tangent developable とよばれる曲面の局所型について調べる. まず定義 1.1 を再度述べる.

定義 3.1. $I \subset \mathbb{R}$ を開集合, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を曲率 $\kappa(t) \neq 0$ の空間曲線とする. また, $B(t)$ を $\gamma(t)$ の従法線ベクトルとする. このとき, $F: I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(t, x) = (x - \gamma(t)) \cdot B(t)$$

により定義する. γ の tangent developable とは, 空間曲線 γ の接触平面 $F = 0$ の envelope \mathcal{D}_F のことをいう.

定理 3.2. γ を定義 3.1 の空間曲線とする. このとき tangent developable \mathcal{D}_F は

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F &= \{x(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda T(t) \mid \tau(t) \neq 0 \text{ なる } t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &\cup \{x(t, \lambda, \mu) = \gamma(t) + \lambda T(t) + \mu N(t) \mid \tau(t) = 0 \text{ なる } t \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

で表される. また \mathcal{D}_F の後退点の集合 \mathcal{R}_F は

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_F &= \{x(t) = \gamma(t) \mid \tau(t) \neq 0 \text{ なる } t \in \mathbb{R}\} \\ &\cup \{x(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda T(t) \mid \tau(t) = 0, \tau'(t) \neq 0 \text{ なる } t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &\cup \{x(t, \lambda, \mu) = \gamma(t) + \lambda T(t) + \mu N(t) \mid \tau(t) = \tau'(t) = 0 \text{ なる } t \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

で表される.

証明. まず $B(t) \neq 0$ より 0 は F の正則点であることに注意する. \mathcal{D}_F を求める. $F = 0 \Leftrightarrow (x - \gamma(t)) \cdot B(t) = 0$ より, $x - \gamma(t)$ は $B(t)$ に直交している. また,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= -\gamma'(t) \cdot B(t) + (x - \gamma(t)) \cdot B'(t) \\ &= -T(t) \|\gamma'(t)\| \cdot B(t) + (x - \gamma(t)) \cdot (-\tau(t)N(t) \|\gamma'(t)\|) \\ &= -(x - \gamma(t)) \cdot (\tau(t)N(t) \|\gamma'(t)\|) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \tau = 0 \text{ の場合, } \frac{\partial F}{\partial t} = 0 &\text{ は常に成立し,} \\ \tau \neq 0 \text{ の場合, } \frac{\partial F}{\partial t} = 0 &\Leftrightarrow x - \gamma(t) \text{ は } N(t) \text{ に直交している.} \end{aligned}$$

以上から,

$$F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow x = \gamma(t) + \lambda T(t) + \mu N(t) \quad (\tau(t) = 0 \text{ 又は } \mu = 0 \text{ が成立.})$$

となる.

次に \mathcal{D}_F の後退点の集合 \mathcal{R}_F を求める.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \tau(t)\gamma'(t)N(t) \|\gamma'(t)\| - (x - \gamma(t)) \cdot (\tau'(t)N(t) \|\gamma'(t)\| + \tau(t)N'(t) \|\gamma'(t)\| \\ &\quad + \tau(t)N(t) \|\gamma'(t)\|') \\ &= \tau(t)T(t) \cdot N(t) \|\gamma'(t)\|^2 - (x - \gamma(t)) \cdot \left(\tau'(t)N(t) \|\gamma'(t)\| + \tau(t)(-\kappa(t)T(t) \|\gamma'(t)\| \right. \\ &\quad \left. + \tau(t)B(t) \|\gamma'(t)\|) \|\gamma'(t)\| + \tau(t)N(t) \|\gamma'(t)\|' \right) \\ &= -(x - \gamma(t)) \cdot (\tau'(t)N(t) \|\gamma'(t)\| - \tau(t)\kappa(t)T(t) \|\gamma'(t)\|^2 + \tau^2(t)B(t) \|\gamma'(t)\|^2 \\ &\quad + \tau(t)N(t) \|\gamma'(t)\|') \end{aligned}$$

である.

(a) $\tau \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= -\lambda T(t) \cdot (\tau'(t) N(t) \|\gamma'(t)\| - \tau(t) \kappa(t) T(t) \|\gamma'(t)\|^2 + \tau^2(t) B(t) \|\gamma'(t)\|^2 \\ &\quad + \tau(t) N(t) \|\gamma'(t)\|') \\ &= \lambda \tau(t) \kappa(t) T(t) \cdot T(t) \|\gamma'(t)\|^2 \\ &= \lambda \tau(t) \kappa(t) \|\gamma'(t)\|^2\end{aligned}$$

$$\text{より, } F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow x = \gamma(t)$$

(b) $\tau(t) = 0, \tau'(t) \neq 0$ の場合

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= -(x - \gamma(t)) \cdot (\tau'(t) N(t) \|\gamma'(t)\|) \\ &= -(\lambda T(t) + \mu N(t)) \cdot (\tau'(t) N(t) \|\gamma'(t)\|) \\ &= -\mu \tau'(t) \|\gamma'(t)\|\end{aligned}$$

$$\text{より, } F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow x = \gamma(t) + \lambda T(t) \text{ である.}$$

(c) $\tau(t) = \tau'(t) = 0$ の場合

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \text{ は常に成立しているので, } F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow x = \gamma(t) + \lambda T(t) + \mu N(t) \text{ である.}$$

以上から, 後退点は $x = \gamma(t) + \lambda T(t) + \mu N(t)$ で次をみたす点になる. $\tau(t) \neq 0$ のとき $\lambda = \mu = 0$, $\tau(t) = 0, \tau'(t) \neq 0$ のとき $\mu = 0$.

□

3.1 単位速度空間曲線の tangent developable

$I \subset \mathbb{R}$ を開集合, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\kappa(s) \neq 0$ の単位速度空間曲線とする. また, $F: I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を $F(s, x) = (x - \gamma(s)) \cdot B(s)$ で, $F_x: I \rightarrow \mathbb{R}$ を $F_x(t) = F(t, x)$ で定める. [1] では $x \in \mathcal{R}_F$ に対し, $F_x: I \rightarrow \mathbb{R}$ の特異点型を調べ, versality を見ることで \mathcal{R}_F の局所型を調べた. そこで, このサブセクションでは $x \in \mathcal{D}_F \setminus \mathcal{R}_F$ における F_x の特異点型と $x \in \mathcal{R}_F$ で F_x の特異点型が確定していない点に対して考察する. 結果は以下の通りである.

定理 3.3. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ と $F: I \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ は上の通りとする.

(1) $x \in \mathcal{D}_F$ に対し, F_x の特異点型は下の表の通りになる.

	$\tau(s) \neq 0$	$\tau(s) = 0$			
		$\tau'(s) \neq 0$	$\tau'(s) = 0$		
			$\tau''(s) \neq 0$	$\tau''(s) = 0$	
				$\tau'''(s) \neq 0$	$\tau'''(s) = 0$
$\mu \neq 0$	—	A_1 型	A_2 型	A_3 型	$A_{\geq 4}$ 型
$\mu = 0, \lambda \neq 0$	A_1 型	A_2 型	A_3 型	A_4 型	$A_{\geq 5}$ 型
$\mu = \lambda = 0$	A_2 型	A_3 型	A_4 型	$A_{\geq 5}$ 型	

表は例えば次のように読む. $\tau(s) = 0, \tau'(s) \neq 0$ なる $s \in \mathbb{R}$ と $\mu \neq 0$ なる $\mu \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ で定まる $x = x(s, \lambda, \mu) \in \mathcal{D}_F$ に対し, F_x はこの $s \in \mathbb{R}$ において A_1 型である ((1, 2) 成分).

(2) (1) の表の(2, 1), (3, 1), (1, 2)成分でのみ F は F_x の versal unfolding になる. すなわちそのような $x \in \mathcal{D}_F$ の近傍では \mathcal{D}_F は平面 (A_1 型) または cuspidal edge (A_2 型) と局所的に微分同相である.

注意 3.4. 定理 3.3(1) の表で (1, 2), (2, 1) 成分にあたる x は $x \in \mathcal{D}_F \setminus \mathcal{R}_F$, 残りの成分にあたる x は $x \in \mathcal{R}_F$ であることに注意する. また, [1] では (1) の表の (1, 4) 成分のところに誤りがあり, (3, 3), (2, 4) 成分の特異点型は確定していなかった.

定理 3.3 の証明. (1) F の s による偏微分を計算すると以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial s} &= -(x - \gamma(s)) \cdot \tau(s) N(s) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} &= -(x - \gamma(s)) \cdot (\tau'(s) N(s) - \tau(s) \kappa(s) T(s) + \tau^2(s) B(s)) \\
\frac{\partial^3 F}{\partial s^3} &= -\tau(s) \kappa(s) - (x - \gamma(s)) \cdot \left((\tau''(s) - \tau(s) \kappa^2(s) - \tau^3(s)) N(s) \right. \\
&\quad \left. + (-2\tau'(s) \kappa(s) - \tau(s) \kappa'(s)) T(s) + 3\tau(s) \tau'(s) B(s) \right) \\
\frac{\partial^4 F}{\partial s^4} &= -3\tau'(s) \kappa(s) - 2\tau(s) \kappa'(s) \\
&\quad - (x - \gamma(s)) \cdot \left\{ (\tau'''(s) - 3\tau'(s) \kappa^2(s) - 3\tau^2(s) \tau'(s) - 3\tau(s) \kappa(s) \kappa'(s)) N(s) \right. \\
&\quad \left. + (-3\tau''(s) \kappa(s) - 3\tau'(s) \kappa'(s) - \tau(s) \kappa''(s) + \tau(s) \kappa^3(s) + \tau^3(s) \kappa(s)) T(s) \right. \\
&\quad \left. + (4\tau(s) \tau''(s) + 3(\tau'(s))^2 - \tau^2(s) \kappa^2(s) - \tau^4(s)) B(s) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^5 F}{\partial s^5} = & -6\tau''(s)\kappa(s) - 8\tau'(s)\kappa'(s) - 3\tau(s)\kappa''(s) + \tau^3(s)\kappa(s) + \tau(s)\kappa^3(s) \\
& - (x - \gamma(s)) \cdot \{ (\tau^{(4)}(s) - 7\tau^2(s)\tau''(s) - 3\tau''(s)\kappa^2(s) - 12\tau'(s)\kappa(s)\kappa'(s) \\
& - 9\tau(s)(\tau'(s))^2 - 4\tau(s)\kappa(s)\kappa''(s) + \tau(s)\kappa^4(s) - 3\tau^2(s)\kappa^2(s) + 2\tau^3(s)\kappa^2(s) \\
& + \tau^5(s))N(s) \\
& + (-4\tau'''(s)\kappa(s) - 6\tau''(s)\kappa'(s) + 4\tau'(s)\kappa^3(s) + 6\tau^2(s)\tau'(s)\kappa(s) - 4\tau'(s)\kappa''(s) \\
& + 6\tau(s)\kappa^2(s)\kappa'(s) - \tau(s)\kappa'''(s) + \tau^3(s)\kappa'(s))T(s) \\
& + (5\tau(s)\tau'''(s) + 10\tau'(s)\tau''(s) - 5\tau(s)\tau'(s)\kappa^2(s) - 7\tau^3(s)\tau'(s) \\
& - 5\tau^2(s)\kappa(s)\kappa'(s))B(s) \}
\end{aligned}$$

(I) $\tau(s) \neq 0$ のとき.

(a) $\mu = 0, \lambda \neq 0$ の場合.

$x = \gamma(s) + \lambda T(s)$ より, $F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \lambda \tau(s)\kappa(s) \neq 0$. 以上から F_x は A_1 型.

(b) $\mu = \lambda = 0$ の場合.

$x = \gamma(s)$ より $F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0, \frac{\partial^3 F}{\partial s^3} = -\tau(s)\kappa(s) \neq 0$ となる. 以上から F_x は A_2 型.

(II) $\tau(s) = 0, \tau'(s) \neq 0$ のとき.

(a) $\mu \neq 0$ の場合.

$x = \gamma(s) + \lambda T(s) + \mu N(s)$ より $F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0$ である. このとき, $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$ は,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \mu \tau'(s) N(s) \cdot N(s) = \mu \tau'(s) \neq 0$$

となる. 以上から F_x は A_1 型.

(b) $\mu = 0, \lambda \neq 0$ の場合.

$x = \gamma(s) + \lambda T(s)$ より $F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0$ である. このとき, $\frac{\partial^3 F}{\partial s^3}$ は,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 F}{\partial s^3} &= -\tau(s)\kappa(s) - \lambda T(s) \cdot (\tau''(s)N(s) - 2\tau'(s)\kappa(s)T(s) + 3\tau(s)\tau'(s)B(s) \\
&\quad - \tau(s)\kappa^2(s)N(s) - \tau^3(s)N(s)) \\
&= 0 + 2\tau'(s)\kappa(s)\lambda + \tau(s)\kappa'(s)\lambda \\
&= 2\tau'(s)\kappa(s)\lambda + 0 \\
&= 2\tau'(s)\kappa(s)\lambda \neq 0
\end{aligned}$$

となる. 以上から F_x は A_2 型.

(c) $\mu = \lambda = 0$ の場合.

$x = \gamma(s)$ であり, (II)(b) の計算から, $\frac{\partial^3 F}{\partial s^3} = 0$ となる. $\frac{\partial^4 F}{\partial s^4}$ を計算すると,

$$\frac{\partial^4 F}{\partial s^4} = -3\tau'(s)\kappa(s) \neq 0$$

となる. 以上から F_x は A_3 型.

(III) $\tau(s) = \tau'(s) = 0, \tau''(s) \neq 0$ のとき.

(a) $\mu \neq 0$ の場合.

$x = \gamma(s) + \lambda T(s) + \mu N(s)$ より $F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial s^2} = 0$ である. このとき, $\frac{\partial F}{\partial s^3}$ は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial s^3} &= 0 - (\lambda T(s) + \mu N(s)) \cdot (\tau''(s)N(s) - 2\tau'(s)\kappa T(s) \\ &\quad + 3\tau(s)\tau'(s)B(s) - \tau(s)\kappa'(s)T(s) - \tau(s)\kappa^2(s)N(s) - \tau^3(s)N(s)) \\ &= -(\lambda T(s) + \mu N(s)) \cdot (\tau''(s)N(s)) \\ &= -\mu\tau''(s) \neq 0 \end{aligned}$$

となる. 以上から F_x は A_2 型.

(b) $\mu = 0, \lambda \neq 0$ の場合.

$x = \gamma(s) + \lambda T(s)$ より $F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial s^3} = 0$ である. $\frac{\partial^4 F}{\partial s^4}$ は,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 F}{\partial s^4} &= \lambda T(s) \cdot (-3\tau''(s)\kappa(s)T(s)) \\ &= -3\lambda\tau''(s)\kappa(s)\lambda \neq 0 \end{aligned}$$

となる. 以上から F_x は A_3 型.

(c) $\mu = \lambda = 0$ の場合.

$x = \gamma(s)$ と (III)(b) の $\frac{\partial^4 F}{\partial s^4}$ の計算より

$$\frac{\partial^4 F}{\partial s^4} = 0$$

となる. また, $\frac{\partial^5 F}{\partial s^5}$ は

$$\frac{\partial^5 F}{\partial s^5} = -3\tau''(s)\kappa(s) \neq 0$$

となる. 以上から F_x は A_4 型.

(IV) $\tau(s) = \tau'(s) = \tau''(s) = 0, \tau'''(s) \neq 0$ のとき.

(a) $\mu \neq 0$ の場合.

$x = \gamma(s) + \lambda T(s) + \mu N(s)$ より $F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial s^3} = 0$ となる. $\frac{\partial^4 F}{\partial s^4}$ は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 F}{\partial s^4} &= -(\lambda T(s) + \mu N(s)) \cdot \tau'''(s) N(s) \\ &= -\mu \tau'''(s) \neq 0\end{aligned}$$

となる. 以上から F_x は A_3 型.

(b) $\mu = 0, \lambda \neq 0$ の場合.

$x = \gamma(s) + \lambda T(s)$ と (IV)(a) の $\frac{\partial^4 F}{\partial s^4}$ の計算に $\mu = 0$ を代入すると,

$$\frac{\partial^4 F}{\partial s^4} = 0$$

となる. また, $\frac{\partial^5 F}{\partial s^5}$ は

$$\frac{\partial^5 F}{\partial s^5} = -4\lambda \tau'''(s) \kappa(s) \neq 0$$

となる. 以上から F_x は A_4 型.

(c) $\mu = \lambda = 0$ の場合.

$x = \gamma(s)$ より, $\frac{\partial^3 F}{\partial s^3} = \frac{\partial^4 F}{\partial s^4} = \frac{\partial^5 F}{\partial s^5} = 0$ となる. 以上から F_x は $A_{\geq 5}$ 型.

(V) $\tau(s) = \tau'(s) = \tau''(s) = \tau'''(s) = 0$ のとき.

$$F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial s^3} = \frac{\partial^4 F}{\partial s^4} = 0$$

である. 以上から F_x は $A_{\geq 4}$ 型. 特に $\mu = 0$ のときは $\frac{\partial^5 F}{\partial s^5} = 0$ になるので, このときの F_x は $A_{\geq 5}$ 型.

(2) $F = \begin{pmatrix} x_1 - \gamma_1(s) \\ x_2 - \gamma_2(s) \\ x_3 - \gamma_3(s) \end{pmatrix} \cdot B(s)$ とする. また $x \in \mathcal{D}_F$ で F_x は A_k 型であるとする. このとき,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\begin{pmatrix} x_1 - \gamma_1(s) \\ x_2 - \gamma_2(s) \\ x_3 - \gamma_3(s) \end{pmatrix} \cdot B(s) \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot B(s)\end{aligned}$$

同様にして. $\frac{\partial F}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot B(s)$, $\frac{\partial F}{\partial x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot B(s)$. 以上から, $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ は B の i 成分関数となる.

定理 2.43 より, $B'(s) = -\tau(s)N(s)$ である. $\tau(s) = 0$ のとき $B'(s) = 0$, つまり $\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial x_i}$ はすべて 0 になる.

以上から, $k \geq 2$ で $\tau(s) = 0$ の場合, 定理 2.31 での $k \times 3$ criterion matrix は常に singular になる. よって, 定理 2.31 より $\tau(s) = 0$ で A_k ($k \geq 2$) 型の場合は F は F_x の versal unfolding にならない. 一方, $k = 2$ で $\tau(s) \neq 0$ または $k = 1$ で $\tau(s) = 0$ の場合, 定理 2.31 での $k \times 3$ criterion matrix は singular でない. よってこのときは定理 2.31 より F は F_x の versal unfolding となる. \square

例 3.5 (helix). $\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, s)$ とする. (図 4).



図 4: Helix

$\tau(s)$ の値を求めるためにまず $N(s)$, $B(s)$, $B'(s)$ を求める.

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= T(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s, \cos s, 1), \\ \gamma''(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s, -\sin s, 0) \text{ より,} \end{aligned}$$

$$N(s) = \frac{\gamma''}{\|\gamma''\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s, -\sin s, 0)}{\left\| \frac{\cos^2 s}{2} + \frac{\sin^2 s}{2} + 0 \right\|} = (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$\begin{aligned} B(s) &= T(s) \times N(s) \\ &= \left(\frac{\cos s}{\sqrt{2}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s), \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s) + \frac{\sin s}{\sqrt{2}} \cdot 0, -\frac{\sin s}{\sqrt{2}}(-\sin s) - \frac{\cos s}{\sqrt{2}}(-\cos s) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s, -\cos s, 1) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } B'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 0).$$

$$B'(s) = -\tau(s) \cdot N(s) \text{ より, } \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s, \sin s, 0) = -\tau s(-\cos s, -\sin s, 0) \text{ となり, } \tau(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

以上から,

$\mu = 0, \lambda = 0$ のとき, つまり $x = \gamma(s)$ は A_2 型で, cuspidal edge が現れる.

$\mu = 0, \lambda \neq 0$ のとき, つまり, $x = \gamma(s) + \lambda T(s)$ は A_1 型で, パラメータ付き 2 次元多様体になる. (図 5 (a)).

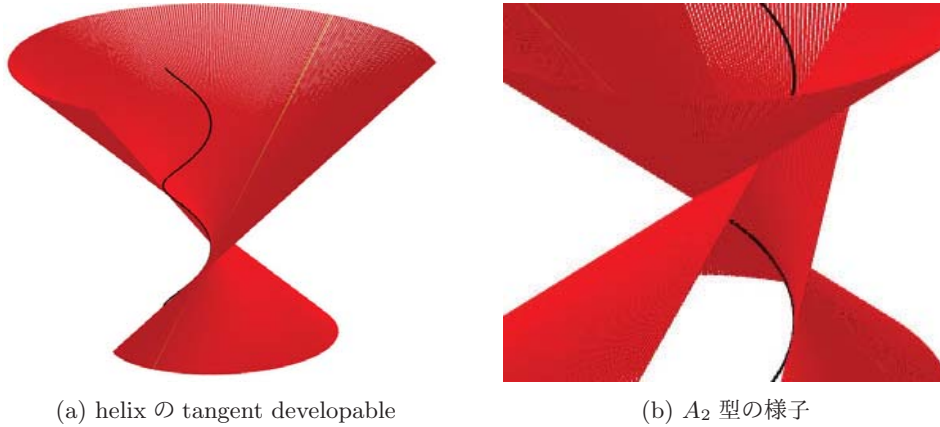


図 5

図 5 (b) において, helix 上で cuspidal edge が現れていることがわかる.

3.2 正則曲線の tangent developable

3.1 では単位速度空間曲線の tangent developable について考察したが, 一般の正則空間曲線において結果が変わるかを確認する.

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $\kappa \neq 0$ をみたす正則な空間曲線とする. すると, セクション 1 で述べた定理 1.2 が成り立つ. 定理 1.2 を再度述べる.

定理 3.6. γ, F は定義 1.1 の通りとする. また, $x \in \mathbb{R}^3$ を 1 つ固定したとき $F_x : I \rightarrow \mathbb{R}$ を $F_x(t) = F(t, x)$ で定める. このとき次が成立する.

(1) $x \in \mathcal{D}_F$ に対し, F_x の特異点型は下の表の通りになる.

	$\tau(t) \neq 0$	$\tau(t) = 0$			
		$\tau'(t) \neq 0$	$\tau'(t) = 0$		
			$\tau''(t) \neq 0$	$\tau''(t) = 0$	
				$\tau'''(t) \neq 0$	$\tau'''(t) = 0$
$\mu \neq 0$	—	A_1 型	A_2 型	A_3 型	$A_{\geq 4}$ 型
$\mu = 0, \lambda \neq 0$	A_1 型	A_2 型	A_3 型	A_4 型	$A_{\geq 5}$ 型
$\mu = \lambda = 0$	A_2 型	A_3 型	A_4 型	$A_{\geq 5}$ 型	

表は例えば次のように読む. $\tau(t) = 0, \tau'(t) \neq 0$ なる $t \in \mathbb{R}$ と $\mu \neq 0$ なる $\mu \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ で定まる $x = x(t, \lambda, \mu) \in \mathcal{D}_F$ に対し, F_x はこの $t \in \mathbb{R}$ で A_1 型である ((1, 2) 成分).

(2) (1) の表の(2, 1), (3, 1), (1, 2)成分でのみ F は F_x の versal unfolding になる. すなわちそのような $x \in \mathcal{D}_F$ の近傍では \mathcal{D}_F は平面 (A_1 型) または cuspidal edge (A_2 型) と局所的に微分同相である.

証明. F の t による微分と弧長パラメータ s による微分を比較することで示す.

はじめに $F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \iff F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0$ を示す.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right) \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{\partial F}{\partial s} \cdot s'$$

よって, $F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \iff F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0$ が成り立つ.

次に, $F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \iff F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0$ を示す.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right) \cdot s' + \frac{\partial F}{\partial s} \cdot s'' = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \cdot s'^2 + \frac{\partial F}{\partial s} s''$$

よって, $F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \iff F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = 0$ が成り立つ.

次に, $F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} = 0 \iff F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial s^3} = 0$ を示す.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \right) \cdot s'^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \cdot 2s's'' + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right) \cdot s'' + \frac{\partial F}{\partial s} \cdot s''' \\ &= \frac{\partial^3 F}{\partial s^3} \cdot s'^3 + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \cdot s's'' + \frac{\partial F}{\partial s} s''' \end{aligned}$$

よって, $F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} = 0 \iff F = \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial s^3} = 0$ が成り立つ. 同様の計算

で $F = \frac{\partial F}{\partial t} = \dots = \frac{\partial^k F}{\partial t^k} = 0 \iff F = \frac{\partial F}{\partial s} = \dots = \frac{\partial^k F}{\partial s^k} = 0$ が成り立つ ($k \leq 5$).

以上から, 単位速度空間曲線において成り立つ分類の結果は, 一般空間曲線においても同様に成り立つことが示された. \square

注意 3.7. (1) [1] の補題 5.22, 命題 5.25 より, versal unfolding の理論を用いなくとも $x \in \mathcal{D}_F \setminus \mathcal{R}_F$ では \mathcal{D}_F の局所型はわかってしまう.

(2) F_x の特異点型は変数変換で変わらないので, 定理 3.6 は妥当な結果である.

3.3 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^k)$ の tangent developable

例 3.8. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$ とする.

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 2t)$$

$$\gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t, 2)$$

$$\gamma'''(t) = (\sin t, -\cos t, 0)$$

$$\gamma' \times \gamma'' = (2 \cos t + 2t \sin t, -2t \cos t + 2 \sin t, 1)$$

$$\begin{aligned} (\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' &= 2 \sin t \cos t + 2t \sin^2 t + 2t \cos^2 t - 2 \sin t \cos t \\ &= 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\gamma' \times \gamma''\|^2 &= 4 \cos^2 t + 4t^2 \sin^2 t + 8t \sin t \cos t + 4t^2 \cos^2 t + 4 \sin^2 t - 8t \sin t \cos t + 1 \\ &= 4t^2 + 5 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|} \\ &= \frac{2t}{4t^2 + 5} \end{aligned}$$

となる. ここから, $\tau(0) = 0$ である.

$\tau'(t)$ を計算すると,

$$\tau'(t) = \frac{2(4t^2 + 5) - 2t \cdot 8t}{(4t^2 + 5)^2} = \frac{-8t^2 + 10}{(4t^2 + 5)^2}$$

より, $\tau'(0) \neq 0$.

以上から, $x = \gamma(0) + \lambda T(0)$ ($\lambda \neq 0$) に対し F_x は $t = 0$ で A_2 型, $x = \gamma(0)$ に対し F_x は $t = 0$ で A_3 型となる (versal unfolding ではない).

図 6 では $x = \gamma(t)$, および $x = \gamma(0) + \lambda T(0)$ が黒線で描かれている. $\tau(t) \neq 0$, $\mu = \lambda = 0$ をみただけ $\gamma(t)$ に沿って cuspidal edge が現れている (図 6 (a)). 一方で, $x = \gamma(0) + \lambda T(0)$ では cuspidal edge を, $x = \gamma(0)$ では swallowtail を確認することはできない (図 6 (b)).

例 3.9. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^3)$ とする.

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 3t^2)$$

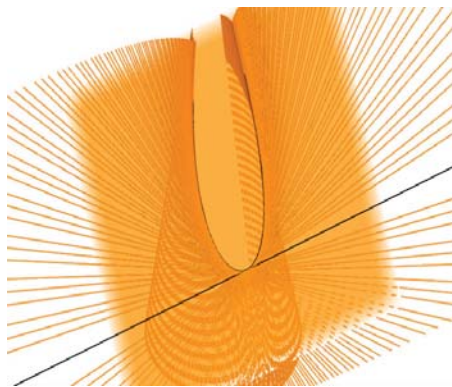
$$\gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t, 6t)$$

$$\gamma'''(t) = (\sin t, -\cos t, 6)$$

$$\gamma' \times \gamma'' = (6t \cos t + 3t^2 \sin t, -3t^2 \cos t + 6t \sin t, 1)$$

$$\begin{aligned} (\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' &= 6t \sin t \cos t + 3t^2 \sin^2 t + 3t^2 \cos^2 t - 6t \sin t \cos t + 6 \\ &= 3t^2 + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\gamma' \times \gamma''\|^2 &= 36t^2 \cos^2 t + 9t^4 \sin^2 t + 36t^3 \sin t \cos t + 9t^4 \cos^2 t + 36t^2 \sin^2 t - 36t^3 \sin t \cos t + 1 \\ &= 9t^4 + 36t^2 = 9t^2(t^2 + 1) \end{aligned}$$



(a) $(\cos t, \sin t, t^2)$ の tangent developable



(b) versal unfolding でない A_2, A_3 型

図 6

より,

$$\tau(t) = \frac{3t^2 + 6}{9t^2(t^2 + 1)} \neq 0$$

以上から, $x = \gamma(t)$ に対し F_x は t で A_2 型になり, この x の近傍で \mathcal{D}_F は cuspidal edge に微分同相である. また, $x = \gamma(t) + \lambda T(t)$ ($\lambda \neq 0$) に対し F_x は t で A_1 型になり, この x の近傍で \mathcal{D}_F はパラメータ付き 2 次元多様体, すなわち平面に微分同相である.

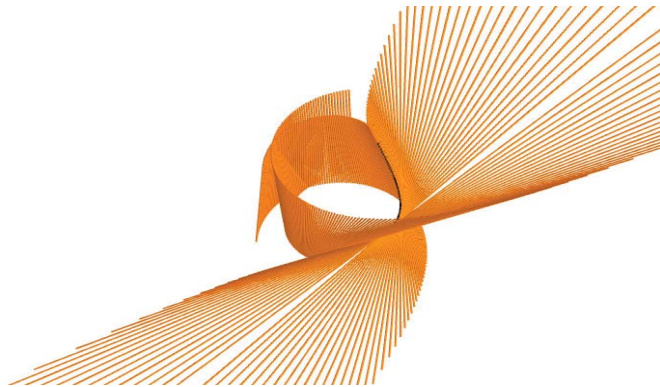


図 7: $(\cos t, \sin t, t^3)$ の tangent developable

図 7 において, $x = \gamma(t)$ に沿って cuspidal edge が現れている.
以上の例をもとに次の定理を示す.

定理 3.10. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^k)$ ($k \geq 2$) に対し, 以下が成り立つ.

$k = 2$ のとき, $x \in \mathcal{D}_F$ に対し F_x は $t = 0$ で A_1 型, A_2 型または A_3 型

$k = 3$ のとき, $x \in \mathcal{D}_F$ に対し F_x は $t = 0$ で A_1 型または A_2 型

$k = 4$ のとき, $x \in \mathcal{D}_F$ に対し F_x は $t = 0$ で A_1 型, A_2 型または A_3 型

$k = 5$ のとき, $x \in \mathcal{D}_F$ に対し F_x は $t = 0$ で A_2 型, A_3 型または A_4 型

$k = 6$ のとき, $x \in \mathcal{D}_F$ に対し F_x は $t = 0$ で A_3 型, A_4 型または $A_{\geq 5}$ 型

$k \geq 7$ のとき, $x \in \mathcal{D}_F$ に対し F_x は $t = 0$ で $A_{\geq 4}$ 型または $A_{\geq 5}$ 型.

証明. $k = 2, 3$ のときは例 3.8, 3.9 なので, $k \geq 4$ とする.

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, k t^{k-1})$$

$$\gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t, k(k-1)t^{k-2})$$

$$\gamma'''(t) = (\sin t, -\cos t, k(k-1)(k-2)t^{k-3})$$

$$\gamma' \times \gamma'' = (k(k-1)t^{k-2} \cos t + k t^{k-1} \sin t, -k t^{k-1} \cos t + k(k-1)t^{k-2} \sin t, 1)$$

$$(\gamma' \times \gamma'') \cdot \gamma''' = k(k-1)t^{k-2} \sin t \cos t + k t^{k-1} \sin^2 t + k t^{k-1} \cos^2 t$$

$$-k(k-1)t^{k-2} \sin t \cos t + k(k-1)(k-2)t^{k-3}$$

$$= k t^{k-1} + k(k-1)(k-2)t^{k-3}$$

$$\|\gamma' \times \gamma''\|^2 = (k(k-1)t^{k-2})^2 \cos^2 t + (k t^{k-1})^2 \sin^2 t + 2k(k-1)t^{k-2} k t^{k-1} \sin t \cos t$$

$$+ (k t^{k-1})^2 \cos^2 t + (k(k-1)t^{k-2})^2 \sin^2 t - 2k(k-1)t^{k-2} k t^{k-1} \sin t \cos t + 1$$

$$= k^2 t^{2(k-1)} + k^2 (k-1)^2 t^{2(k-2)} + 1$$

より,

$$\tau(t) = \frac{k t^{k-1} + k(k-1)(k-2)t^{k-3}}{k^2 t^{2(k-1)} + k^2 (k-1)^2 t^{2(k-2)} + 1}$$

となるので, $k \geq 4$ より, $\tau(0) = 0$.

$\tau(t)$ の分母を A とおく ($A(0) = 1$).

$$\tau'(t) = \frac{(k(k-1)t^{k-2} + k(k-1)(k-2)(k-3)t^{k-4})A - (k t^{k-1} + k(k-1)(k-2)t^{k-3})A'}{A^2}$$

より, $k = 4$ のとき, $\tau'(0) \neq 0$, $k \geq 5$ のとき, $\tau'(0) = 0$ となる.

$\tau'(t)$ の分子を B , $(k t^{k-1} + k(k-1)(k-2)t^{k-3})A'$ を C とおく.

$$\begin{aligned} \tau''(t) &= \frac{\{(k(k-1)(k-2)t^{k-3} + k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)t^{k-5})A}{A^4} \\ &\quad + (k(k-1)t^{k-2} + k(k-1)(k-2)(k-3)t^{k-4})A' - C'\}A^2 - B(A^2)'}{A^4} \end{aligned}$$

より, $k = 5$ のとき, $\tau''(0) \neq 0$, $k \geq 6$ のとき, $\tau''(0) = 0$ となる.

τ'' の分子を D , $(k(k-1)t^{k-2} + k(k-1)(k-2)(k-3)t^{k-4})A'$ を E , $\{-\}$ を G とおく.

$$\tau'''(t) = \frac{\left\{ \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)t^{k-4} + k(k-1)\cdots(k-5)t^{k-6}}{A^8} A + \frac{(k(k-1)(k-2)t^{k-3} + k(k-1)\cdots(k-4)t^{k-5})A' + E' - C''}{A^8} A^2 + \frac{G(A^2)' - (B(A^2)')'}{A^8} \right\} A^4 - D(A^4)'}{A^8}$$

より, $k = 6$ のとき, $\tau'''(0) \neq 0$, $k \geq 7$ のとき, $\tau'''(0) = 0$ となる. よって, 定理 3.6 よりこの定理 3.10 が示された. \square

定理 3.10 より, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^4)$ では, $x = \gamma(0) + \lambda T(0)$ ($\lambda \neq 0$) に対し F_x は $t = 0$ で A_2 型, $x = \gamma(0)$ に対し F_x は $t = 0$ で A_3 型となる. しかし, 定理 3.6 より F は F_x の versal unfolding でない.

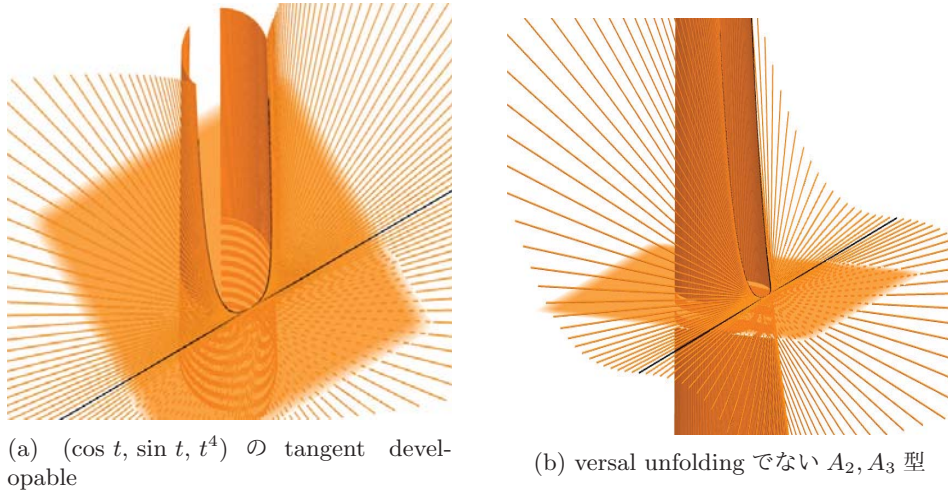


図 8

図 8 では $x = \gamma(t)$, および $x = \gamma(0) + \lambda T(0)$ が黒線で描かれている. $\tau(t) \neq 0$, $\mu = \lambda = 0$ をみたく $\gamma(t)$ に沿って cuspidal edge が現れている (図 8(a)). 一方で, versal unfolding でない $x = \gamma(0) + \lambda T(0)$ では cuspidal edge を, $x = \gamma(0)$ では swallowtail を確認することはできない (図 8(b)).

3.4 GeoGebra による tangent developable の描画法

セクション 1, セクション 3 で描いた tangent developable の図は動的数学ソフトウェア GeoGebra で描いたものである. ここでは例として, 例 3.8 の $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$ における tangent developable の描画法を紹介する.

まず, 媒介変数表示で $\gamma(t)$ を 3D グラフィックスに描き, 計算で求めたベクトル $B(t)$ を打ち込む. (図 9 のベクトル $u = B(3.4)$)

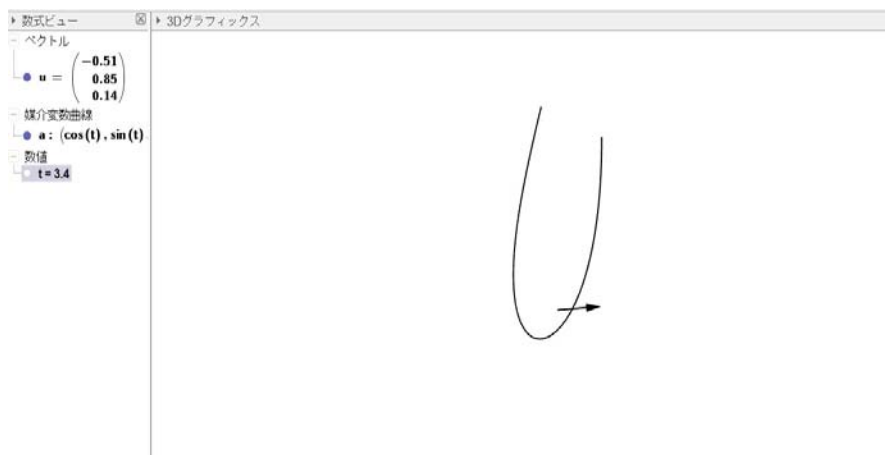


図 9

次に, $B(t)$ の各成分を t の関数とみて GeoGebra 上で微分する (図 10 の $f(x), g(x), h(x)$). そしてベクトル $B'(t)$ として $(f(t), g(t), h(t))$ を定義する (図 10 のベクトル $v = B'(3.4)$).

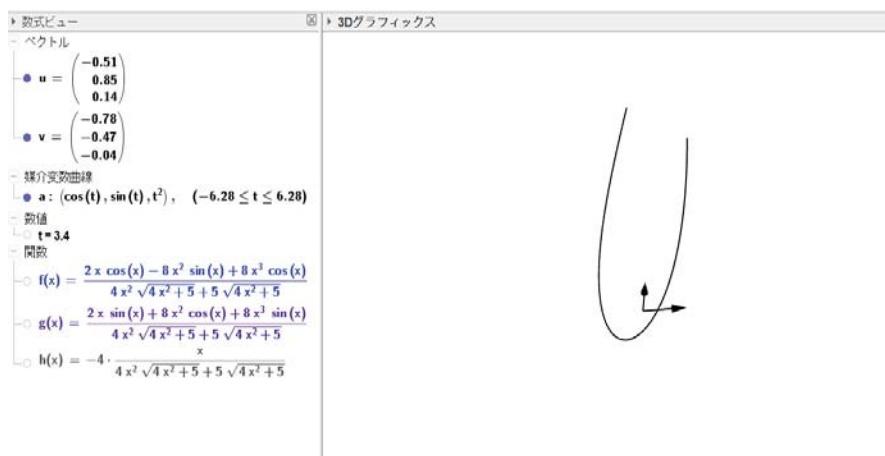


図 10

次に, $F = 0$ として $\begin{pmatrix} x - \cos t \\ y - \sin t \\ z - t^2 \end{pmatrix} \cdot u = 0$ を, $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ として $\begin{pmatrix} x - \cos t \\ y - \sin t \\ z - t^2 \end{pmatrix} \cdot v = 0$ を打ち込み, この 2 平面の交差をとる (図 11 のオレンジの直線は $t = 1$ のときを表している).

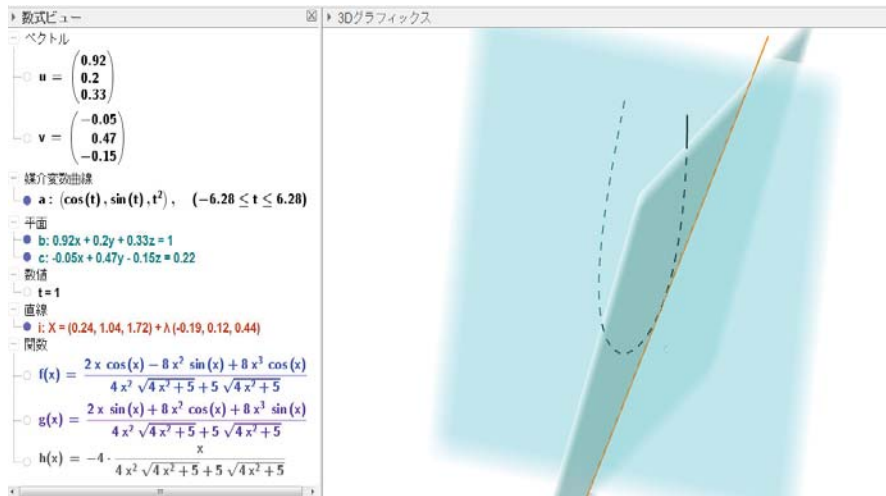


図 11

最後に、先ほどの交差をとった直線の残像表示にチェックを入れ、パラメータ t のアニメーションをオンにすると $\gamma(t)$ の tangent developable が描かれる。(図 12).

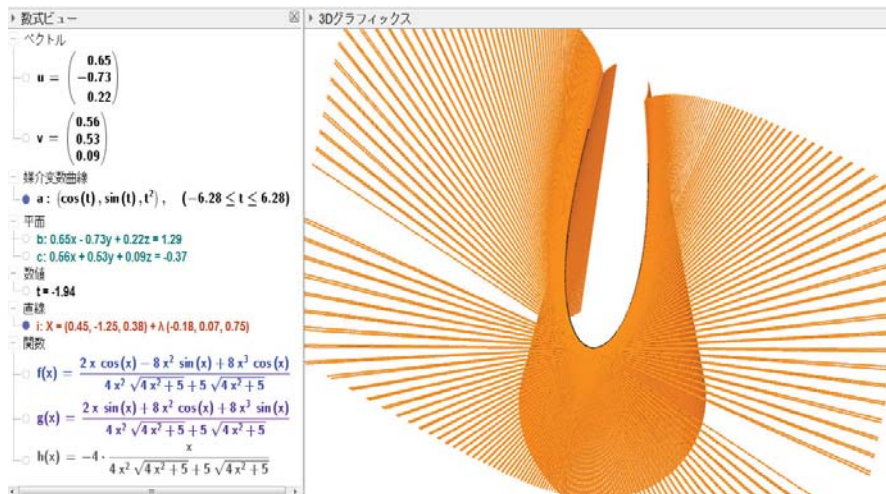


図 12

4 今後の課題

4.1 定理 3.6 に関連する予想

定理 3.3, 定理 3.6 より次が予想される.

予想 4.1. γ, F は定理 3.6 の通りとする. $x \in \mathcal{R}_F$ に対し $\tau(t) = \dots = \tau^{(k)}(t) = 0, \tau^{(k+1)}(t) \neq 0$ のとき, F_x の特異点型は次のようになる ($k \geq 0$).

$$\begin{aligned} \mu \neq 0 \text{ のとき } & A_{k+1} \text{ 型,} \\ \mu = 0, \lambda \neq 0 \text{ のとき } & A_{k+2} \text{ 型,} \\ \mu = \lambda = 0 \text{ のとき } & A_{k+3} \text{ 型.} \end{aligned}$$

4.2 正則でない空間曲線の tangent developable

セクション 3 では, $\kappa \neq 0$ をみたす空間曲線の tangent developable の局所型について調べた. 今後の課題として $\kappa = 0$ をみたす点を含んだ正則な空間曲線や, 正則でない空間曲線の tangent developable の局所型はどう求められるのか, というものが挙げられる. 例として, 次の正則でない空間曲線について調べる.

例 4.2. $\gamma(t) = (t^2, t^3, t^4)$ とする.

$\gamma'(t) = (2t, 3t^2, 4t^3)$ より $\gamma'(0) = 0$ なので γ は正則でない空間曲線である. しかし, $t = 0$ でも γ の接線は定義できるため形式的に

$$\begin{aligned} \tilde{T}(t) &= \frac{\gamma'(t)}{t} = (2, 3t, 4t^2) \\ \tilde{B}(t) &= \frac{\tilde{T}(t) \times \gamma''(t)}{2t} = (6t^2, -8t, 3) \\ \tilde{N}(t) &= \tilde{B}(t) \times \tilde{T}(t) = (-32t^3 - 9t, 6 - 24t^4, 18t^3 + 16t) \end{aligned}$$

とおき, $t = 0$ でも γ の接触平面を定める. その上で $F(t, x) = (x - \gamma(t)) \cdot \tilde{B}(t)$ の $x \in \mathcal{D}_F$ に対する F_x の特異点型を調べる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= \gamma'(t) \cdot \tilde{B}(t) + (x - \gamma(t)) \cdot \tilde{B}'(t) \\ &= (2t, 3t^2, 4t^3) \cdot (6t^2, -8t, 3) + (x - \gamma(t)) \cdot \tilde{B}'(t) = (x - \gamma(t)) \cdot \tilde{B}'(t) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= -\gamma'(t) \cdot \tilde{B}'(t) + (x - \gamma(t)) \cdot \tilde{B}''(t) \\ &= -(2t, 3t^2, 4t^3) \cdot (12t, -8, 0) + (x - \gamma(t)) \cdot \tilde{B}''(t) = (x - \gamma(t)) \cdot \tilde{B}''(t) \\ \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} &= -\gamma'(t) \cdot \tilde{B}''(t) + (x - \gamma(t)) \cdot \tilde{B}'''(t) \\ &= -(2t, 3t^2, 4t^3) \cdot (12, 0, 0) + 0 = -24t \\ \frac{\partial^4 F}{\partial t^4} &= -24 \end{aligned}$$

である. ここから, $\mathcal{D}_F = \{x = x(t, \lambda) = \gamma(t) + \lambda\tilde{T}(t) \mid t, \lambda \in \mathbb{R}\}$ を得る. よって,

$x = \gamma(t) + \lambda\tilde{T}(t)$ ($\lambda \neq 0$) で $F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \neq 0$ となるので, この x に対し F_x は t で A_1 型をもち,

$t \neq 0$ なる $x = \gamma(t)$ で $F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} \neq 0$ となるので, この x に対し F_x は $t \neq 0$ で A_2 型をもち,

$x = \gamma(0)$ で $F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} = 0, \frac{\partial^4 F}{\partial t^4} \neq 0$ となるので, この x に対し F_x は $t = 0$ で A_3 型をもつ

ことがいえる.

次に, 上のような x において F が F_x の versal unfolding になるか調べる. 定理 3.3 証明 (2) と同様

に, $F = \begin{pmatrix} x_1 - \gamma_1(t) \\ x_2 - \gamma_2(t) \\ x_3 - \gamma_3(t) \end{pmatrix} \cdot \tilde{B}(t)$ とし, $x \in \mathcal{D}_F$ で F_x は A_k 型であるとしたとき, $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ は $\tilde{B}(t)$ の i 成分

関数となる. よって, 定理 2.31 の criterion matrix は $\tilde{B}(t)$ のテイラー展開を用いて表される. ここで $\tilde{B}(t), \tilde{B}'(t), \tilde{B}''(t)$ を計算すると, $\tilde{B}(t) = (6t^2, -8t, 3), \tilde{B}'(t) = (12t, -8, 0), \tilde{B}''(t) = (12, 0, 0)$ である. ここから, 定理 2.31 の $k \times 3$ criterion matrix は singular でない ($k \leq 3$). よって今回の例 4.2 において F は F_x の versal unfolding である.

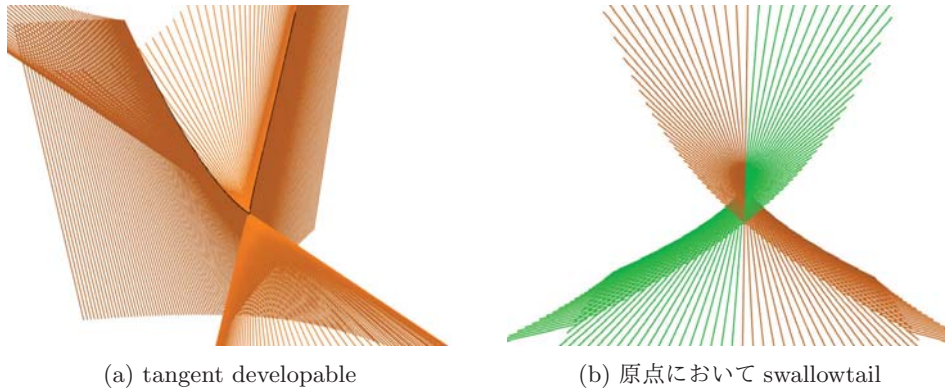


図 13

$t \neq 0$ なる $x = \gamma(t)$ に沿って cuspidal edge が現れている (図 13(a)). また, 図 13(b) で $\gamma(0)$ に swallowtail が現れていることが確認できる.

参考文献

- [1] J.W.Bruce and P.J.Giblin, *Curves and Singularities (second edition)*, Cambridge University Press, 1992.