# 『数学　第二類』における球面幾何への教材構成の特徴とその今日的意義

## ―平行投影及び中心投影に焦点を当てて―

弘前大学大学院　教育学研究科

教科教育専攻　数学教育専修

14GP207　　砂田　大樹

# 『数学　第二類』における球面幾何への教材構成の特徴とその今日的意義
## ―平行投影及び中心投影に焦点を当てて―

## 論文要旨

本研究の目的は，球面幾何が導入された『数学　第二類』について，4年「２．球面上の図形」を扱うまでの平行投影・中心投影の内容を明確にし，球面幾何を扱うに当たって平行投影・中心投影が球面幾何の単元に対してどのような影響を与えていたのか，その特徴を明らかにし，今日の数学教育において球面幾何を扱う価値を得ることである．

上記の研究目的を達成するために，①『数学　第二類』の編纂の背景を明らかにし，『数学　第二類』の教材にはどのような特徴があるのかを明らかにすること，②『数学　第二類』の編纂者が，空間図形について，立体を平面上に表わすことについて，地図投影法についてどのように考えていたのかを明らかにすること，③『数学　第二類』における球面幾何に関する内容を分析，考察し，その特徴を示すこと，④現在の数学教育における球面幾何に関する教材やその授業について整理し，『数学　第二類』の価値とその今日的な意義を明らかにすることの４つの課題を設定した．

①に対して，『数学　第二類』は数学教育再構成運動の影響を大きく受け，成立し，図法や球面といった内容が新たに導入され，その目的が図形に関する空間直観力の涵養であることが明らかとなった．また，『数学　第二類』では，投影図を操作（変形）させて使う問を含んでいるという特徴と，中等立体幾何の教育は，「直観」，「実験実測」，「労作」，「実用」，「融合」などをその目標として掲げながら，「用器画」の取り入れに意欲を持ち，「用器画」を数学に取り込むことにとどまらず，数学的な探求に活かすという意味で内容的な「融合」を実現していることがわかった．②に対して，「空間の想像力」には，「２．頭の中で図形を考えそれに幾何学的操作を施した結果を，模型や図を用いずに想像できること．」，「３．空間で，いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること．」などがあり，２．については，「ａ．三次元の図形から三次元の図形へ」，「ｂ．三次元のものから二次元のものへ」，「ｃ．二次元のものから三次元のものへ」と3 種類に分かれている．このうち，ｂ．について，平行投影及び中心投影を含んでおり，その考えについて明らかにした．『数学　第二類』の編纂者の一人である田中(1939)は，地図投影法を用器画の教材の一つとしてとらえていたことが示された．③に対して，『数学　第二類』では，第２章で示した平行投影及び中心投影を空間図形の分析に道具として用い，地図投影法にも道具として扱っていることが明らかとなった．地図投影法については，球面を平面に正確に表せないことから，必要に応じて様々な投影法を考えるように構成されていることも明らかとなった．④に対して，現在の数学教育では，平行投影及び中心投影を道具として球面幾何の教材を扱う例はなく，『数学　第二類』の球面幾何教材が，現在の数学教育でも十分価値のあるものであることが示された．

目次

# 序章

## 本研究の目的と方法

## 第１節　本研究の背景と目的

現在の数学教育のうち，幾何教育について見てみると，高等学校までの幾何教育の中に球面幾何に関する内容が含まれていない．ところが，我々が生活している地球はおおよそ球体であり，球面上に関する幾何の性質は平面上の幾何の性質とは異なる．実際，平面上で成り立つユークリッドの第 5 公準である平行線公理は，球面上では成り立たない．しかし，そのような数学的価値がある内容を現在の数学カリキュラムでは学習する機会がない．中学校の社会科，もしくは高校の地理の授業で，「日本からサンフランシスコへ最短で行くときはどのような経路になるか」と考えたとき，メルカトル図法の地図で確認すると，北極側に弧を描くようにして飛ぶ．だが，なぜそのような経路になるのかを，数学的に球面と関連させて指導する機会はないのではないかと感じている．実際，中村稔(2006)によると，高等学校地理 A において，地図に関する説明はあるものの，その数学的説明はなされていないことが述べられている．

筆者は球面である地球を教材にすることで，球面幾何に関する指導が出来るのではないかと考えた．そこで，過去の幾何教育についてさかのぼっていくと，昭和 18，19 年に発行された中等数学教科書『数学　第二類』で初めて，球面幾何に関する教材が 4 年「２．球面上の図形」で導入されている．4 年「２．球面上の図形」では，漸長図（メルカトル図），中心透視図，円柱正積図の 3 つの地図の作り方から，球面の性質について扱っている．

『数学　第二類』に関する研究をみると，長崎栄三(1990a，1990b，1993)が『数学　第二類』が成立した背景と,『数学　第二類』の理念について研究をしている.『数学　第二類』の教材内容については, 土屋陽子(1998)が『数学　第二類』における投影図の変形に着目し，変形した投影図を考察するということは，代数分野における式の処理と同質のものであると述べている. 片岡啓(2010)は『数学　第二類』で新たな内容として登場した図学について，明治以降独立に指導されていた空間図形と図学が，どのような経過をたどって融合されたのか, 円錐曲線の内容を踏まえながら説明している．球面幾何に関する研究については，滝沢昌弘(1998)は様々な図法の地図をコンピュータに描き出すソフトを開発し, 数式で地図を描かせる授業を行っている. 野沢和弘, 小林徹也(2005)は天井に絵画を描く作図器を使用し，透円筒画法とメルカトル図法の 2 つを数学的に分析・比較し，地図に数学が果たす役割を考えさせる授業を実践している．中村稔(2006)は地球儀を用いて球面三角形について触れ，球面三角法を教授し，三角法の有用性を生徒に実感させる授業を実践している. 佐々木陽平(2015)は球面上に正方形を作図する活動を通して, 平面と球面における作図の違いから前提を見直すという授業を行っている．一方で,『数学　第一類・第二類』の編纂者の 1 人である田中良運(1939)は地図投影法を投影図や透視図の教材の 1 つとしてとらえていた．これらの先行研究では, 投影図, 透視図と球面幾何との関わりについて, 明らかにされていない.

本研究の目的は，球面幾何が導入された『数学　第二類』について，4 年「２．球面上の図形」を扱うまでの平行投影・中心投影の内容を明確にし，球面幾何を扱うに当たって平行

投影・中心投影が球面幾何の単元に対してどのような影響を与えていたのか，その特徴を明らかにし，今日の数学教育において球面幾何を扱う価値を得ることである．

## 第２節　本研究の方法と構成

上記の研究目的を達成するために，次の課題を設定する．第一の課題は，『数学　第二類』の編纂の背景を明らかにし，現在までの研究で『数学　第二類』の教材にはどのような特徴や価値があるのかを明らかにすることである（第１章）．第二の課題は，『数学　第二類』の編纂者が，球面を含む空間図形について，立体を平面上に表わすことについて，地図投影法についてどのように考えていたのかを明らかにし，分析の視点を得ることである（第２章）．第三の課題は，『数学　第二類』における球面幾何に関する内容を明らかにし，第二の課題で挙げた分析の視点から，『数学　第二類』について考察し，その特徴を示すことである（第３章）．第四の課題は，現在の数学教育における球面幾何に関する教材やその授業について整理し，『数学　第二類』の価値とその今日的な意義を明らかにすることである（第４章）．

本研究の方法は，第一の課題は『数学　第二類』に関する研究を行っている長崎栄三(1990a，1990b，1993)，蒔苗直道(2015)，土屋陽子(1998)，片岡啓(2010)の先行研究の文献の整理を行う．第二の課題は,『数学　第二類』の編纂者である島田茂(1990), 田中良運(1939)の文献の整理を行い，杉山吉茂(2009)から投影図や透視図についての価値を得る．第三の課題は，『数学　第二類』に詳細な分析を与え，第二の課題から得た分析の視点から考察を行う．『数学　第二類』の教材を実際に分析する理由として，『数学編纂趣意書』は現在の指導書とは異なり，各問に対して詳しい解説が書かれていない．よって筆者が実際に問題を解くことによって，『数学編纂趣意書』のみからでは分からない教材の特徴及び価値を見出すことが出来ると考えたからである．第四の課題は，球面幾何や地図投影法に関する研究を行っている滝沢昌弘(1998)，野沢和弘，小林徹也(2005)，中村稔(2006)，佐々木陽平(2015)の先行研究を整理し，『数学　第二類』の内容と比較を行い，その特徴や価値を示す．

次に，本研究の構成について述べる．

第１章第１節では，先行研究をもとに『数学　第二類』が成立した背景について整理をする．

第１章第２節では,『数学　第二類』の教材の特徴について, 先行研究をもとに整理する．

第２章第１節では,『数学　第二類』の編纂者の一人である島田茂(1990)から,「空間の想像力」について整理する．

第２章第２節では,『数学　第二類』の編纂者の一人である島田茂(1990)の「見取り図」と杉山吉茂(2009)から，平行投影及び中心投影について整理する．

第２章第３節では,『数学　第二類』の編纂者の一人である田中良運(1939)から，地図投影法の原理について整理する．

第２章第４節では，前節までの分析から，本論文で分析，考察する対象を明確にする．

第３章では，『数学　第二類』の分析と考察を行う．

第１節では，「図形の書き方」に関する問の分析を行う．

第２節では，「立体図形の表現」に関する問の分析を行う．

第３節では，「円と球」に関する問の分析を行う．

第４節では，「球面上の図形」に関する問の分析を行う．

第５節では，前節までの結果から，『数学　第二類』における球面幾何への教材構成の特徴を整理する．

第６節では，平行投影，中心投影が球面幾何教材に対してどのような影響を与えているのか，その整理を行う．

第４章第１節では，球面幾何や地図投影法について研究を行っている滝沢昌弘(1998)，野沢和弘，小林徹也(2005)，中村稔(2006)，佐々木陽平(2015)の先行研究を整理する．

第４章第２節では，第３章で分析した『数学　第二類』と第４章第１節で整理した先行研究とを比較，整理し，『数学　第二類』の今日的な意義を示す．

なお，本論文では，旧字体を新字体へ改め，片仮名は平仮名に直して表記する．『中学校高等女学校数学及理科教授要目解説要綱とその趣旨』は以降『教授要目』と表記する．

# 第１章

# 『数学　第二類』の編纂の背景とその特徴について

### 本章の意図と構成

本章の意図は，昭和 18，19 年に発行された『数学　第二類』がどのような経緯で成立したのか，その背景を整理し，球面幾何を導入した意図を確認することと，『数学　第二類』の特徴を先行研究から得ることである．

本章の構成は次の通りである．

第１節では，先行研究をもとに『数学　第二類』が成立した背景について整理をし，『数学　第二類』でなぜ球面幾何が導入されたのかについて明らかにする．

第２節では，『数学　第二類』の教材の特徴について，土屋陽子(1998)，片岡啓(2010)をもとに整理し，本研究との比較を図る．

## 第１節　『数学　第二類』の編纂の背景

日本の数学教育史をみると，明治から戦前までの間に数学教育改良運動，数学教育再構成運動という大きな転機がある．本節では，戦前に誕生した中学校教科書『数学　第二類』について，これらの運動がどのような影響を与えていたのかをみていく．

### (1) 欧米における数学教育改良運動

蒔苗直道(2015)は，「日本において算数・数学教育が確立期を迎えていた頃，欧米では，数学教育改良運動といわれる大きな変革が起こる．」(p.19)と述べている．1901年，イギリスのペリーが「数学教育が学問としての数学を重視した教え込み，記憶式の教育になっていることを批判し，数学の実用や有用性に着目した数学教育を主張」(p.19)している．1902年にはアメリカのムーアがこれに賛同し，実験室法といわれる指導法を提唱している．また，ドイツのクラインなど著名な数学者も，数学教育の改良を訴えたという．

蒔苗は，批判の的となったのが，ユークリッド原論を基にした幾何教育であると述べ，その点について次のように述べている．

> 「分科主義の幾何教育は，ユークリッド原論のように，公理や定義に基づいて幾何の定理を一つ一つ証明するものである．証明は推論の論拠となる公理や定義，また以前に証明した定理を根拠にして構成され，そのすべてを記述する厳密なもので，直観的に認められることや，他分野の定理・方法を用いることはいっさい認められていない．こうした内容は，多くの子どもに適するものではなく，数学は教え込みの記憶式教育になっていると批判される．証明を正確に記述できるようになるため，理解できない教科書の記述をそのまま暗記する方法が取られ，抽象的な論理は当時の数学教育における大きな障害であったとも言われている．」(p.20)

こうした従来の数学教育に対して，「子どもの身の回りのものから図形の概念や性質を捉えたり，実験・実測によって機能的に探究したりすることが提案」(p.20)される．

この数学教育改良運動が日本ではどのように影響したのかをみていく．

### (2) 数学教育再構成運動と『数学　第二類』

蒔苗(2015)は，昭和6年に20年ぶりに『教授要目』が改正され，この改正によって，「分科主義に固執せず柔軟に指導することが認められ，欧米の数学教育改良運動の分科主義否定の影響を見ることができる」(p.23)と述べている．この『教授要目』について，塩野直道(1970)は，「数学教育改革の世界的思潮を，よくいえばきわめて穏健に取り入れたとはいえようが，真に数学教育再建の気魄もなければ，高い倫理もなく，これを実践に移

すための熱意にも欠けていて実質的にはあまり効果がなかったといってよい」(pp.36-37)と評価している．(1)で述べた数学教育改良運動の影響を取り入れようとしたが，十分ではなかったことがわかる．

昭和10年には小学校の教科書が抜本的に改訂され，塩野直道が中心となって『尋常小学算術』（いわゆる緑表紙教科書）が発行される．『尋常小学算術』は昭和10年から1学年分ずつ発行され，昭和15年に完成した．長崎栄三(1990a)は『尋常小学算術』について，「数学教育界に非常に好意的に迎えられた」(p.87)と述べている．しかし，長崎(1990a)によると，「中学校の数学は，先に述べたような昭和6年の教授要目に沿った検定教科書をもとに指導されており，小学校と中学校の隔たりを埋める必要があった」(p.86)となっている．蒔苗(2015)によると，「数学教育の目的，指導内容，教育課程，指導法を抜本的に改良すること」(p.24)が求められ，数学教育再構成運動が起こり，日本中等教育数学会を中心とした研究会が設置された．長崎(1990a)によると，「研究は，東京高等師範学校附属中学校を中心とした東部地区，大阪帝国大学数学研究室を中心とした中部地区，広島高等師範学校附属中学校を中心とした西部地区の3地区に分かれて進めていく」(p.88)ことにし，それぞれの連絡委員を「東部地区：杉村欣次郎（東京文理科大学教授），中部地区：清水辰次郎，西部地区：戸田清」(p.88)とし，数学教育再構成運動が日本を3地区に分けて進められることになった．昭和16年に各地区が発表した研究経過と要目案について，長崎(1990a)は「学校数学は具体と抽象の中で生成的に捉えられ，そこで，初級段階での具体的事象からの抽象作用としての数処理・図処理が強調され，また，直観的・総合的扱いが重視され，幾何教育の改善が目指された」(p.90)こと，「新内容として統計，図法，球面，微積分，確率，力学的運動などが含まれていた」(p.90)などの共通点が多かったと述べている．

昭和17年には，新たな『教授要目』が作成される．この『教授要目』では，『数学　第二類』で投影図や透視図，球面に関する内容を取り入れたことについて，次のように述べている。

> 「国民文化の進展は数学活用の範囲を著しく増大せるにも拘らず，従来の数学教育は徒らに煩瑣なる論理的推理と，無益なる形式演算のもてあそびに終始したる観がある．この度の要目においては，数学の実質的内容はできる限り豊富ならしむるに努めた．（中略）また空間を中心とする第二類においては，従来のユークリッド幾何学並に三角法の実質的内容を全部包含せしむるのみならず，投影図及び透視図，球面三角形の性質，円錐曲線等をも加えて図形に関する直観力の涵養に努めた．」(p.24，中略は引用者)

投影図や透視図，球面に関する内容を取り入れた目的は，図形に関する直観力の涵養であったことがわかる．

『教授要目』の幾何分野を担当した文部省の前田隆一は，中等学校の幾何について，ユークリッドの体系ではない新しい幾何の体系を主張していた．前田(1979)は，「ユークリッド的図形観の批判」(p.47)の中で，次のように述べている．

> 「図形教材が貧弱なのは，図形観が古い観念に固定していて自由な広い視野に立てないからだと思う．すなわち，図形教材の素材はすこぶる豊富にあるのだが，その中から教材を見つけ出すべき眼鏡の視野がせまくかつ固定しているというのが，従来の図形教育の実情だろう．」
> 「ペリー以来の数学教育は，なるほどユークリッド教本をちりぢりに破って，そのいかめしい姿をこわしてしまったが，結局，その破片を拾い集めて，不細工な貧弱なモザイクを作ったにすぎず，その小片の一つ一つは依然としてユークリッドの破片であり，その根底をなす図形観は，依然としてユークリッド的であると思う．」(p.47)

前田(1979)は，ここでいう図形観が「ユークリッド的」であるという意味は「ユークリッド空間，非ユークリッド空間というときの「ユークリッド」の意味ではなくて，ユークリッド教本の根底にある図形観のこと」で，「一言にしていえば，<u>静的</u>，<u>個別的(要素的)</u>，<u>有限的</u>な図形観である」(p.47)と説明し，「さらに，ユークリッド的図形観は幾何学的なことばで表せば，ほとんど，合同と相似の幾何学に尽き，また言い換えるならば，定木とコンパスで作図できる，有限の幾何学の範囲である．」(p.47)と述べている．

前田(1979)によると，付録「幾何教育の理念について」((p.211)，『日本諸学研究報告特集第九篇自然科学』(1943)の再録)で，当時の幾何教育に対して，「ユークリッドの殻を脱する」ことが数学教育改革の中心のテーマとなっていた．そのユークリッドの殻を脱するためには「第一に，要素的，制止的な図形観を脱すること，第二に，実用ないし具体と理論との関係をもっと正しく把握すること」の2つが必要であると述べている．また，「教育として幾何というものに意味があるのは，数には帰着できないような，あるいは帰着させないほうが適切であるような，図形そのものによる推理や処理の仕方がという面がありうるからではないか」(p.215)と述べている．

画法幾何に関しては，「立体的なものを平面に正確に写し，逆に平面的な写像からもとの立体を想像するような，いわば画法幾何的な訓練も必要であり」(p.224)と述べつつも，「これらを「変換論」，「画法幾何」，「位相幾何」として与えるのでないのはいうまでもないことであって，要するに，従来とかくかけていた図形の連続的，動的，実践的ないろいろの見方，考え方，扱い方を初等，中等の教育に適した形で，豊富に取り入れていくことが必要」(p.224)だと述べている．

昭和17年3月に塩野直道，前田隆一らによって作られた『教授要目』が公布され，新たな教科書が作られることになった．小倉金之助，鍋島信太郎(1957)によると，中等学校の

教科書はずっと検定制度であったが，1941年ころになると，教科書は各科目について中等学校五種，師範学校三種に限定された(p.411)．つづいて，中等教科書の出版業者が統合され，中等教科書株式会社が設立，新要目による数学の教科書を文部省の指導監督のもとに出すことになった．数学は杉村欣次郎を中心に，東京高等師範関係の田中良運，和田義信，島田茂それに黒田孝郎が依嘱されて中学校を，高等女学校は清水辰次郎が中心になり前田光，石谷茂が担当，師範学校は広島高等師範学校の戸田清が文部省図書監修官を兼任した(p.411)．『教授要目』の幾何分野を担当した前田隆一は，高等学校教授要綱作成のため，教科書編纂には関わっていない(長崎(1990b)，p.48)

昭和18年3月から4月にかけて，『数学　第一類・第二類』の1年用から3年用まで合計6冊が発行された．この教科書の特徴について，長崎(1990b)は次のことを挙げている．

・ページ数が少ないこと．

・各章約7節から構成され，一つの節は，導入の「場面」で始まり，それに関連した「問」が何題かあり，必要なら，小さな文字で「定義」を与えるか行間に生徒に法則や性質を記入させ，「練習問題」が数題あり，『数学　第二類』ではさらに「作業」も生徒に要求し，節は完結する．

・各章とも最終節は「種々の問題」となっている．

場面・問題から入り，生徒が問題を自分で解決しながら数学的内容を発展させていくという形式を徹底させたのは，中学校の検定数学教科書ではこれが初めてであると長崎(1990b)は述べている．そのため，各章の導入場面・問題は工夫され，導入場面だけでなく，それぞれの問や練習問題のためにも多くの別種の実世界が開発されていると述べている．

『数学編纂趣意書』をみると，1，2，3年には最初に「編纂要旨」が書かれている．これをみると，「本書において作業を重んじて直観を確実豊富にせんとし，空間直観を重視し，図形の運動に特別なる関心を払い，更に所謂論理体系に執着しなかったのも，すべて上述の趣旨に出でたものである．」(1年，p.3)と記されている．『数学　第二類』が空間直観を重視していることがわかる．これは，先に述べた『数学　第二類』に投影図や透視図，球面幾何に関する内容を導入した理由とつながる記述である．

このことから，後の章では，空間直観力もしくは空間の想像力とはどのようなことを指すのかをみていく．

## 第２節　先行研究からみた『数学　第二類』の教材の特徴

### (1) 土屋陽子の研究

土屋陽子(1998)は，中学校第 1 学年の教科書における空間図形教材を歴史的な視点から考察することによって，当時の現行の教科書（平成 9 年発行）における空間図形教材のあり方に対する示唆を得ることを目的として研究を行い，『数学　第二類』は，空間図形教材が豊富に取り入れられていることから，『数学　第二類』を対象としている．このうち，現在の中学校第 1 学年における空間図形教材と内容が重なる部分が，1 年「２．図形の書き方」，「３．図形の観察」，4 年「１．立体図形の表現」の各章中にあることから，この 3 つの章を考察の対象として取り上げている．この 3 つの章における空間図形教材を具体的に分析し，現行の教科書と比較したが，その際，空間図形を平面上に表わす表現法に着眼している．土屋は，『数学　第二類』で扱われている表現法を，見取図，展開図，（正）投影図，断面図（切断面），軸測投影図，斜投影図，透視図の 7 つで捉えている．しかし，現行の教科書では，軸測投影図，斜投影図，透視図は，教科書の図に用いられているものもあるが，問題の対象にはされていないことから，比較の対象にはしていない．

土屋は，分析結果について，『数学　第二類』では，「すべての表現法について，基本図形ばかりではなく，机や腰掛といった具体物をも扱っている．これは具体的事象に即して数理を発見させようとした教科書編纂の方針であり，日常生活と結びついた幾何指導を行っていこうとする指導意図の表れとみることができる．」(p.5)と述べている．

各表現法の相違点について，見取図については，「両教科書間の具体的な活動にそれほど差はない」(p.5)と述べている．

展開図は取り扱いに相違が見られると述べ，『数学　第二類』での取り扱いは，展開図をかくことであるのに対して，現行の教科書では，展開図から立体の構成要素間の関係をよみとる活動が多いと述べている(p.6)．

投影図については「「数学第二類」の方が豊富であり，重点内容は両教科書間で異なっている」(p.6)と述べている．現行の教科書は，「投影図で表された立体の外形をよみとる活動」(p.6)が多いのに対して，『数学　第二類』は「投影図を操作（変形）して，もとの投影図に表わされていなかった空間図形の形状をよみとる活動」(p.6)が多い．土屋は「このことから「数学第二類」においては，空間図形の考察に，投影図が重要な役割を果たしていたことがうかがえる」(p.6)と述べている．

断面図（切断面）についても，取り扱いに相違が見られると述べている．『数学　第二類』では，2 点特徴的なところがあると述べている．1 つ目は，問題数の多い活動に，「切断面を正確にかいたり，厳密に捉えたりする活動が挙げられている点」(p.6)である．2 つ目は「具体物の断面図をかいたり，これをよんだりする活動が取り入れられている点」(p.6)である．『数学　第二類』では，断面図について，「複雑な機械の内部構造などの説明には，切断面の図を用いるとよい．」(4 年，p.10)と記述されている．この記述から，土屋は断面図とは，

「空間図形を平面上に表わすことを目的とした図」(p.6)だと述べている．一方，現行の教科書では，「このような役割はほとんどなく，切断面の考察を通して，空間図形に対する理解を深めることが目的である」(p.6)と述べている．

以上から，土屋は「各表現法に，両教科書間の相違が見られたが，特に投影図においては，「数学第二類」に，これを利用して空間図形の考察を行う活動が豊富である点が特徴的である」(p.6)と述べ，さらに投影図の扱いについて分析している．

土屋は，『数学編纂趣意書』の記述「投影図は空間図形を計量的に正確に平面上に写すから，これによれば平面上の機械的操作によって原図形の性質を考究し得る．ここがその真価である」(1 年，p.11)より，『数学　第二類』では「空間図形の形状を知るために，投影図を積極的に用いている」(p.6)と述べ，これらの活動に象徴される投影図の取り扱いを「投影図の道具としての取り扱い」と呼ぶことにしている．この「投影図の道具としての取り扱い」について，土屋は投影図の操作（変形）の有無に着眼して大きく 2 つに分類している．1 つ目は「固定された投影図から空間図形の形状をよみとる問題群（これをⅠとする)」(p.7), 2 つ目は「投影図を操作（変形）し，新たに得た投影図から，空間図形の形状をよみとる問題群（これをⅡとする)」である．さらに，土屋は前者を 3 つ，後者を 5 つに分類している．その分類が次の通りである．

「Ⅰ．固定された投影図から，空間図形の形状をよみとる問題
　① 平面図と立面図の対応を利用して，空間図形の形状をよみとる問題
　② 空間図形との対応から投影図に表されている図形の形状をよみとる問題
　③ ②の考え方を利用して，問題文中に条件として明示されていない図形の形状を知るために投影図をかき，そこから必要な要素をよみとる問題
Ⅱ．投影図を操作（変形）して，もとの投影図には表されていなかった空間図形の形状をよみとる問題
　① 線分の実長を求める問題
　② 切断面の実形を求める問題
　③ 角の実際の大きさを求める問題
　④ 側面の実形を求める問題
　⑤ その他」(p.7)

土屋は，「上記の分類Ⅰの②及び③の取り扱いは，問題数はわずかながら，現行の教科書でも取り上げているものがある」(p.7)のに対して，「分類Ⅰの①及び分類②の全ての取り扱いは，現行の教科書にはみられない」(p.7)と述べている．土屋は，投影図を操作（変形）することについて，「投影図に対する固定的なイメージを排し，投影図を道具として積極的に操作（変形）することで，空間図形への考察がより深まると考えられる」(p.8)と述べ，「投影図の操作（変形）において特徴的なのは，投影図を操作（変形）することで，その空間図

形の形状をより明確にしている点である」(p.8)と述べている．その上で土屋は，「考察の対象に対するこのようなアプローチを，代数分野における式の利用と同質のもの」(p.8)だと考えている．土屋は三輪辰郎(1996)の文字式利用の図式を示し，文字式の利用について，次のように述べている．

「文字式の利用においては，まず，考察の対象となる事象を文字式に表す．そして，この文字式を変形させ，新たに得た文字式（文字式’）を事象にかえして読むことによって事象に対する新しい発見や洞察が得られるわけである．（中略）変形の際，方程式は事象とは切り離され，形式的に同値変形が行われる．この過程で，方程式は見かけ上は変化するが，ここに成り立つ数量関係は不変である．」(p.8，中略は引用者)

ここで土屋は，投影図の操作（変形）を，文字式利用の図式をもとに表わし，投影図利用の図式を示し，投影図の操作（変形）が，式の利用と同質であることを示している．そして，「考察に対するこのアプローチが，代数分野においてはごく一般的に行われているにもかかわらず，幾何教育においてはほとんど重視されていないことを考えると，「数学第二類」にみられる投影図の操作（変形）は，現在の空間図形の学習活動の中にも，十分に取り入れる価値があると思われる．」(p.8)と述べている．

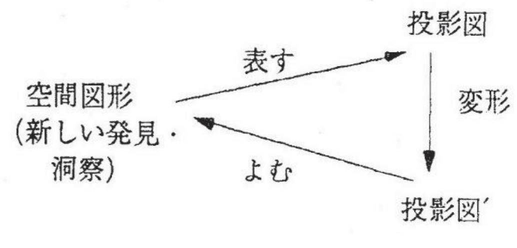



図 1-2-1　投影図利用の図式

### ⑵ 片岡啓の研究

片岡啓(2010)は『数学　第二類』の 4 年の内容である円錐曲線について「投影図（立面図と平面図）を数学の問題に自然に用い，楕円を作図していること，また，楕円であることの証明にその図を活用していること，の二点で，今日の中学高校で全く見ることのない教材である」(p.21)と述べ，「明治以降それぞれ独立に指導された空間図形と「用器画」の内容を踏まえ，どのような経過をたどって両者の融合が実現したのかを明らかにすること」(p.21)を目的として研究している．

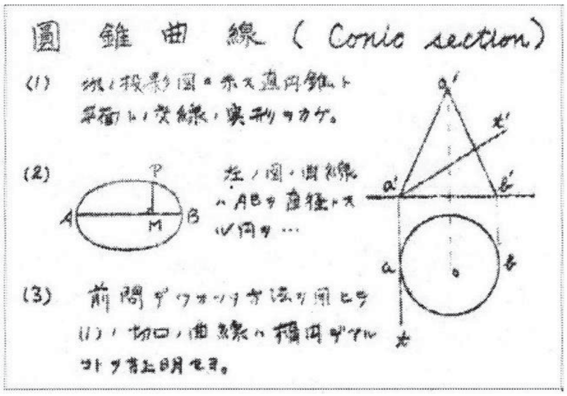



図 1-2-2　円錐曲線

片岡(2010)によると,「中等立体幾何の教育は,「直観」,「実験実測」,「労作」,「実用」,「融合」などをその目標として掲げながら,「用器画」の取り入れに意欲を持ち，議論の盛衰を経ながらも,『数学４，５第二類』を実現した」(p.30)と述べている．また，戦時下の社会的要請を背景に「労作」や「融合」を実現する教育内容として用器画が注目を集めたことや,『数学　第二類』の誕生以前は数学に用器画を取り入れることを留まっていたことを説明している．片岡(2010)は『数学　第二類』の４年までで，透視図を含めた「用器画」の内容を一通り終えた後，これを円錐曲線の学習に結び付け証明にまで踏み込んでいることについて,「「用器画」を数学に取り込むことにとどまらず，数学的な探求に活かすという意味で内容的な「融合」を実現しているといえる.」(p.30)と述べている．

### (3) 先行研究から得た本研究における課題

上述した先行研究を振り返ると，土屋(1998)は主に『数学　第二類』における投影図の役割について焦点を当てた研究を行っていた．その中で，投影法を操作（変形）することについての価値を明らかにしていた．片岡(2010)は，空間図形と用器画がどのような経過をたどって融合が実現したのかについて研究し，円錐曲線の内容を挙げながら説明している．

しかし，土屋や片岡の研究では,『数学　第二類』において投影図や透視図が球面幾何の内容にどのように関わっていたのかまでは明らかにされていない．序章でも述べたが,『数学　第一類・第二類』の編纂者の１人である田中良運(1939)は地図投影法を投影図や透視図の教材の１つとしてとらえていたことから，投影図や透視図は４年「２．球面上の図形」に影響を与えていると考えられる．そこで，本研究では,『数学　第二類』において，投影図や透視図が球面幾何にどのような影響を与えていたのかを明らかにする．

# 第２章

# 本研究における分析の視点と対象

## 本章の意図と構成

本章の意図は,『数学　第二類』を分析する視点及び分析の対象を明確にすることにある．分析の視点を明確にする理由として，次章で『数学　第二類』を分析する際に，編纂者の意図や,『数学　第二類』の特徴をより明確にすることができると考えられるからである．

本章の構成は次の通りである．

第１節では,『数学　第二類』の編纂者の一人である島田茂(1990)から,「空間の想像力」について整理する．

第２節では,『数学　第二類』の編纂者の一人である島田茂(1990)の「見取り図」と，投影図，透視図に関する文献から，平行投影及び中心投影について整理する．

第３節では,『数学　第二類』の編纂者の一人である田中良運(1939)から，地図投影法の原理について整理する．

第４節では，前節までの分析から，本論文で分析，考察する対象を明確にする．

## 第１節　「空間の想像力」について

本節では，第１章第１節で挙げられた，「空間直観力」について，『数学　第二類』の編纂者である島田茂がどのように捉えていたのかを明らかにする．

島田茂(1990)は，「空間の想像力」や「空間直観力」とは何か，教育的な立場から，次のように述べている．

「１．経験的な世界に，抽象的に構成された幾何的な対象や関係と局所的に同型なパターンを同定できること．」

「２．頭の中で図形を考えそれに幾何学的操作を施した結果を，模型や図を用いずに想像できること．」

「３．空間で，いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること．」(pp.94-95)

「１．経験的な世界に，抽象的に構成された幾何的な対象や関係と局所的に同型なパターンを同定できること．」について，「まっすぐな鉄道線路を見て，「ああ，ここに平行な2直線があるなあ．」と見ること」(p.94)がその例として挙げられている．

「２．頭の中で図形を考えそれに幾何学的操作を施した結果を，模型や図を用いずに想像できること．」について，次の具体例を挙げている．

「目を閉じて正四面体を思い浮かべてほしい．1頂点に集まる三つの辺の中点を通る平面で，これを切り頂点のあった側を切り落とす．これをどの頂点についてもやってみる．残った立体はどんな立体になるだろうか．」(p.94)

この答えは，正八面体である．島田は，「こんなときの頭の中で進んでいく過程が，空間想像力の重要な側面の一つである」(p.94)と述べている．

島田は，幾何学的操作について，「広義なものであるが，学習に伴って豊かになっていく性質のもの」(p.94)で，「一つの図形から，もう一つ別の図形を幾何学的に構成すること」をさし，さらに以下の3つに区別されるとしている．

「ａ．三次元の図形から三次元の図形へ」

「ｂ．三次元のものから二次元のものへ」

「ｃ．二次元のものから三次元のものへ」(p.94-95)

「ｂ．三次元のものから二次元のものへ」について，「この考えを系統的に発展させ，伝達の共通な手段として体系化したものが投影図法である」(p.95)と述べている．これに

ついては本章第２節で詳しく述べることにする．

「ｃ．二次元のものから三次元のものへ」について，「平面上で示された図から，空間の図形を想像するのも，ここに含まれる重要な一面」(p.95)であると述べ，その例として，投影図を読むこと，展開図から立体を組み立てることなどを挙げている．

「３．空間で，いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること．」について，「本来は，重力の方向による経験空間での方向づけとは独立な幾何学的な空間について考えている場合にも知らずに，経験空間の方向づけに支配されていることが多い」(p.96)と述べ，「字義にとらわれずに意味がとらえられることは，いわば，視点を自由に動かして物を見るということで，想像力のもう一つの面である．」(p.96)とまとめている．

島田は「空間の想像力」の最後で，「以上のような空間想像力は，実生活の上でも必要なことであり，数学科の教育だけが受け持つものともいえないが，数学の学習にとっても重要なものであるといえよう」(p.96)とまとめている．

本研究では，球面を平面上に表現する地図投影法に注目する．平面上に表現する際には，立体をみる視点を自ら決めて観察する力も必要となる．そこで，島田の述べる「空間の想像力」のうち，「２．頭の中で図形を考えそれに幾何学的操作を施した結果を，模型や図を用いずに想像できること．」の「ｂ．三次元のものから二次元のものへ」と，「３．空間で，いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること．」に特に注目する．

島田は「空間の想像力」について，具体例として課題を5つあげている．このうち，「２．頭の中で図形を考えそれに幾何学的操作を施した結果を，模型や図を用いずに想像できること．」の「ｂ．三次元のものから二次元のものへ」と，「３．空間で，いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること．」に該当すると考えられるものについて，筆者が詳細な分析をあたえ，本研究で考える「空間の想像力」について，より詳しく説明をしていく．

課題①「光と影が作る形には，いろいろな幾何図形が見られる．次のような図形はどんな場合に見られるか．a.平行四辺形（ただし長方形でないもの）b.楕円（ただし円でないもの）」

これは窓から入ってくる光が，床にどのように現れるかを考えるとよい．図2-1-1はその様子を表した模型である．

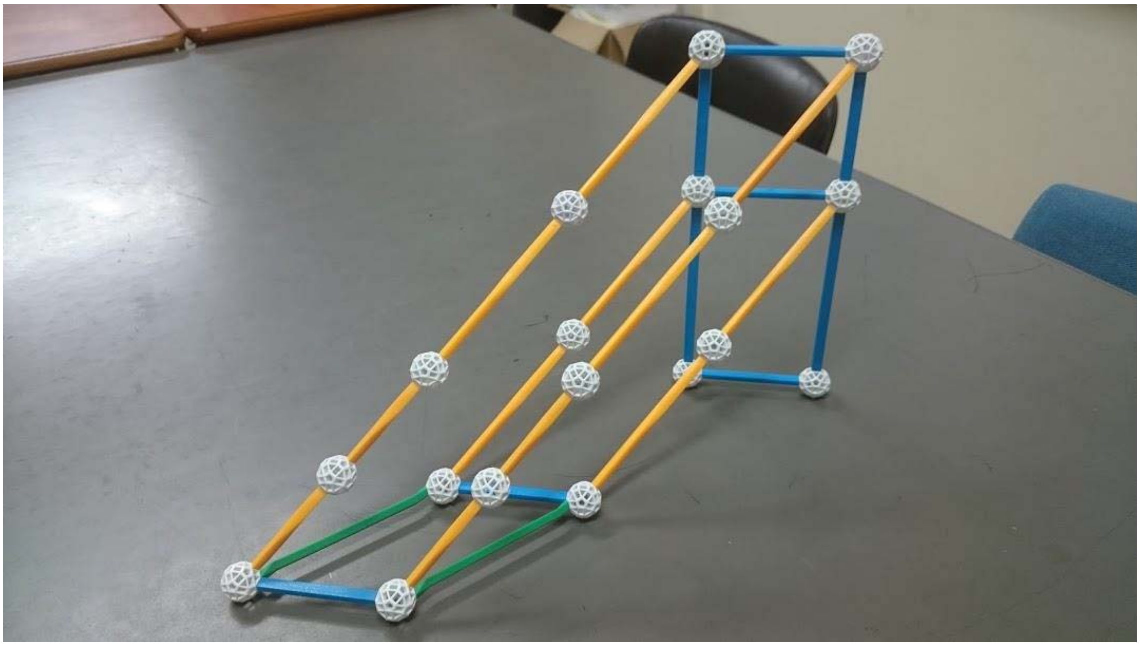


図2-1-1　窓から光が入る様子の模型

窓に対して斜めに光が入ることで，床に映る光の形が正方形から平行四辺形に変化している．同様に，b.の問の解は，円形の窓を考えると楕円ができる．

この課題について，島田の「空間の想像力」の3つの立場から振り返る．

この課題を考えるとき，窓に光が入ってくる場面を想像する．これは「空間の想像力」の「１．経験的な世界に，抽象的に構成された幾何的な対象や関係と局所的に同型なパターンを同定できること．」にあてはまる考え方である．

上で述べた，窓から光が入ってくる様子を頭の中で考えるとき，窓から入ってくる光が床でどのような形になって現れるかを考えたとき，「２．頭の中で図形を考えそれに幾何学的操作を施した結果を，模型や図を用いずに想像できること．」にあてはまる考え方である．

また，図2-1-1の模型を，光の線の延長上から見たとき，図2-1-2のようになり，正方形が平行四辺形にみえるようになる．これは，「３．空間で，いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること．」にあてはまる考え方である．

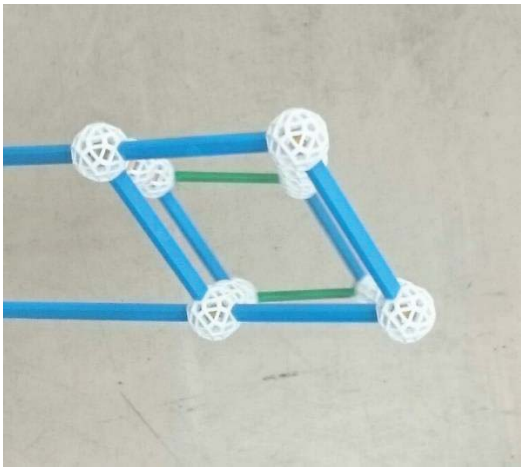


図2-1-2　図2-1-1の模型を光の線の延長方向から見た様子

課題④「直円柱を平面で切断して展開すると，切り口の曲線は，どんな曲線になるか．」

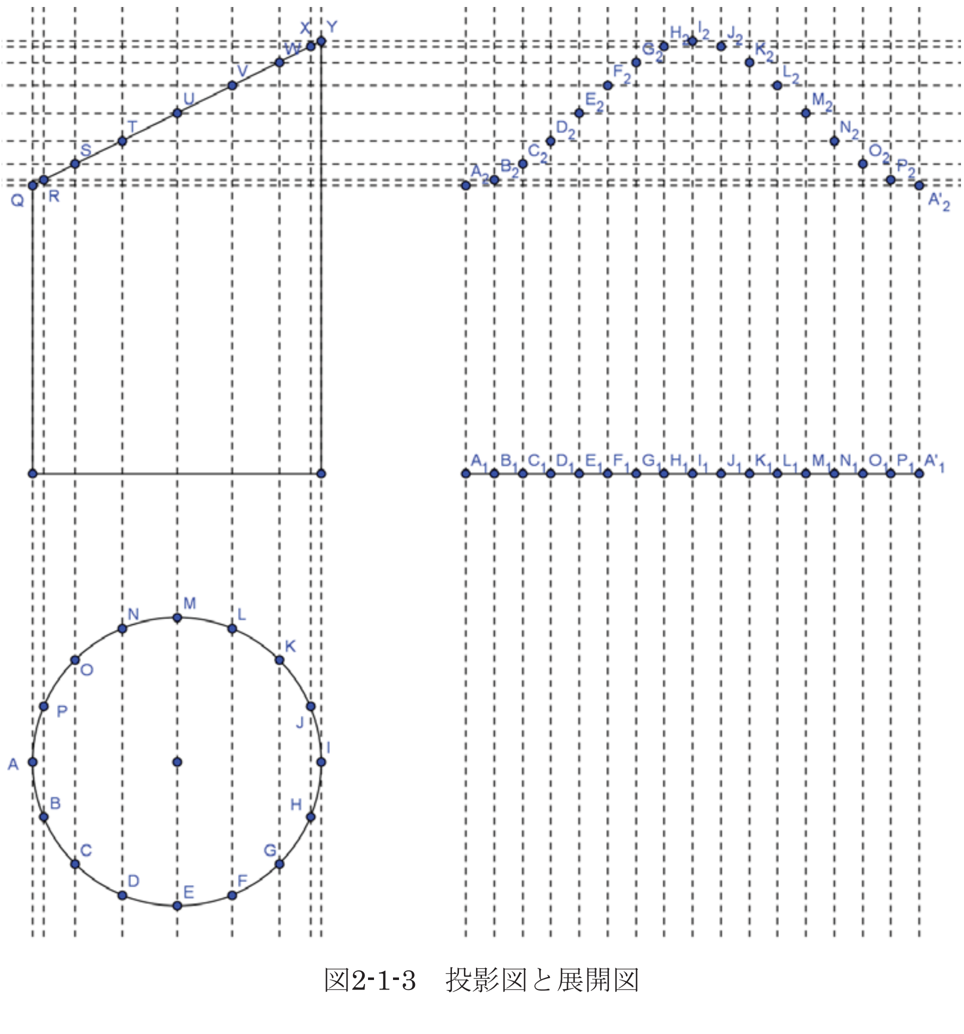



図2-1-3　投影図と展開図

上の図は，左下が直円柱を平面で切断した立体の平面図で，左上が立面図である．右の図はその立体の側面の展開図で，辺$A_1A'_1$は直円柱の円周の長さである．平面図において，AからPまでは，円周を16等分した点で，展開図と記号と対応している．立面図から，各地点の高さを調べその長さを移したものが，展開図における$A_2$から$A'_2$である．これをさらに細かくして点を取っていくと，切り口の曲線は正弦曲線となる．

この課題では，三次元の立体を，投影図，展開図といった二次元の図形で考え，分析している．「２．頭の中で図形を考えそれに幾何学的操作を施した結果を，模型や図を用いずに想像できること．」の「ｂ．三次元のものから二次元のものへ」にあてはまる考え方である．

課題⑤「立方体について，次の問に答えよ．a.対角線の方向から見た図，および対角面に垂直な方向から見た図を書け．」について，問a.はそれぞれ図2-1-4，図2-1-5のように，対角線方向から見ると正六角形，対角面に垂直な方向から見ると長方形になる．図2-1-5は投影図を用いて作図したもので，立面図が課題の解である．

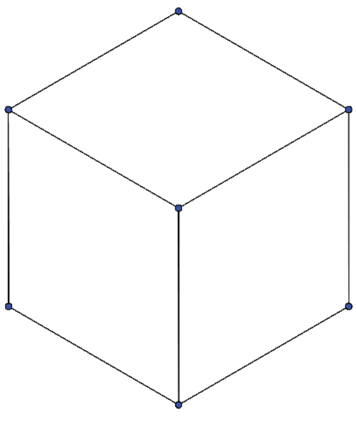


図2-1-4　対角線方向から見た立方体の見取図

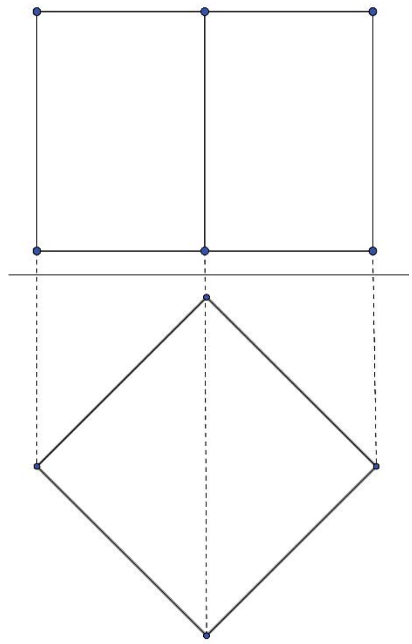


図2-1-5　対角面に垂直な方向から見た立方体の投影図

この課題について，問 a.では，立方体を対角線の方向や対角面に垂直な方向から見た様子を考えている．これは，「２．頭の中で図形を考えそれに幾何学的操作を施した結果を，模型や図を用いずに想像できること．」の「ｂ．三次元のものから二次元のものへ」と，「３．空間で，いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること．」にあてはまる考え方である．

第３章では，『数学　第二類』を分析していくが，本節で述べた「空間の想像力」を視点として分析を進めていく．

## 第２節　平行投影及び中心投影と投影図及び透視図について

### (1) 平行投影及び中心投影について

『広辞苑　第六版』で「投影」を調べると，次のように説明している．

・投影…①物体のうつった影．
　②物の見え方や解釈の仕方に，心の内面が表現されること．また，物事が他に影響すること．
　③投影図法によって平面上に描かれた図形．また，その図形を描くこと．投象．射影．

本論文では，③の意味について考えていく．

本章第１節では，島田(1990)の述べる「空間の想像力」のうち，「２．頭の中で図形を考えそれに幾何学的操作を施した結果を，模型や図を用いずに想像できること．」の「ｂ．三次元のものから二次元のものへ」について，「この考えを系統的に発展させ，伝達の共通な手段として体系化したものが投影図法である」(p.95)と述べていたことを確認した．島田(1990)は，「見取り図」で，その技法の原則について，次のように述べている．

「その原則は，まず立体をその輪郭で把えることに始まり，次いで立体の後方に壁を想定し，その壁に手前から光が当ったときに生ずるであろう影の形を写すことで立体を表現しようとするものである．さらに，立体の外形だけでなく，面の境界となっている線（多面体の場合の辺）も，その影を見える側は実線で，見えない側は点線で加えて，形を明らかにする．（中略）ここで影という代わりにその形にだけ着目してしまえば光源は眼の位置ということになり，光源は，視線と言い換えられることもできる．」(p.144，中略は引用者)

さらに，島田は見取図については物体と光源の位置の関係を次のように分けている．

「影を作る光線の光源が，物体の大きさに比べて無限に遠くにあると考えられるときは，光線は平行光線となり，有限であると考えるときは点光源となる．」

島田は，図2-2-1の立方体の見取図を例に，視点の位置についてと，視線と画面の関係から，投影の方法について，平行投影と中心投影の2種類に分けて，図2-2-2のように説明

し，図2-2-1のうち，(a)，(b)，(c)のような図の作り方を平行投影，(d)のような図の作り方を中心投影と説明している．

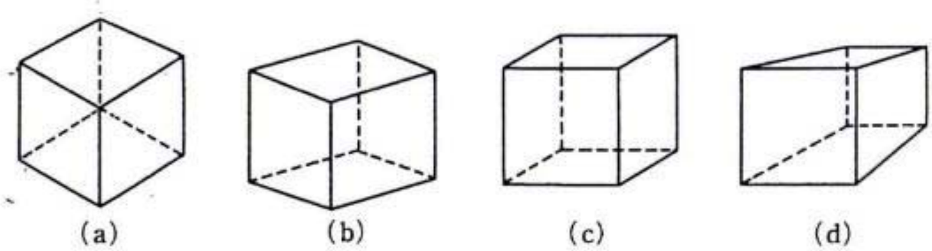



図 2-2-1　立方体の見取図

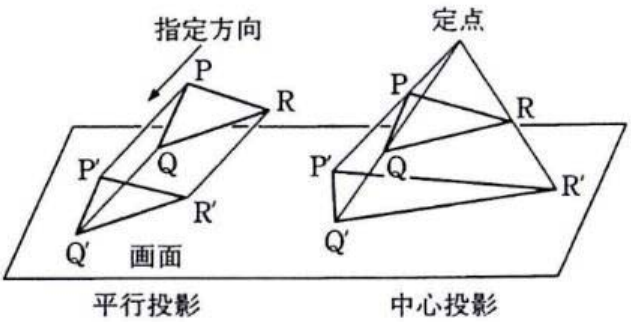



図 2-2-2　平行投影と中心投影

さらに，平行投影について，「画面と投影線とが垂直であるか否かによって，直角投影（正射影といういい方をする場面もある）と，斜投影に分けられる」(p.145)と述べ，図2-2-1において，(a)は直角投影，(c)は斜投影であることを説明している．

平行投影について，島田(1990)は図2-2-3を示し，その特徴を次のように述べている．

「平行投影では（図3(本論文では図2-2-3)参照），

(i)　投影線の方向に平行でない直線は，直線に投影され，投影線に平行な直線は点に投影される．

(ii)　点に投影される場合を除き，平行な直線は平行に投影される．

(iii) 点に投影される場合を除き，同じ直線上の線分の比は，投影によって変らない．」(p.146，下線括弧内は引用者)

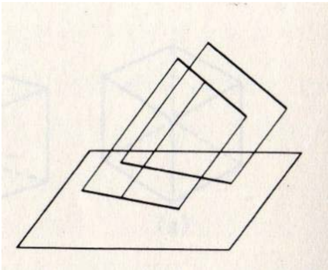


図2-2-3

直角投影について，「画面として垂直な2平面を用い，それを1平面上に展開したものが，いわゆる正投影図で，これは見取り図にならない．1画面を用いたものが軸測投影図で，これは見取り図の一種である」(p.146)と述べている．

斜投影について，「立方体の一つの面を画面に平行においたものがよく用いられる」(p.146)と述べ，その理由として「その面に平行な平面上の図形が実形で示せるという利点がある」(p.146)からだと述べ，図2-2-1(c)がその方法でかかれた図であると説明している．さらに，斜投影について，「画面に平行な辺の図上の長さを1とした場合，画面に垂直な辺の図上の長さを1とする方法をカバリエ投影，1/2とする方法をキャビネット投影といい，図上の軸に沿った計測がしやすいので実際によく用いられている」と説明している．

以上のことから，島田は投影法を分類して示すと，図2-2-4のようになると述べている．

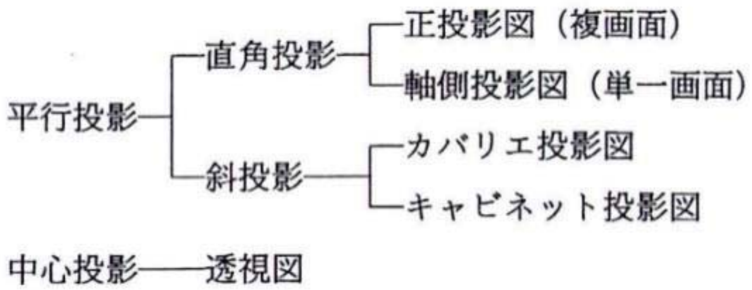



図2-2-4　投影法の分類

第３章では，図2-2-4に示された投影法に着目し，どのような図が示されているか，また，どのように活用され用いられているのかについてみていく．

**⑵ 投影図及び透視図について**

空間図形の平面の表現について，杉山吉茂(2009)は「空間図形の平面の表現には３種類のものがあります．見取り図，展開図，投影図です．」(p.237)と述べている．

見取り図については，書き方が「一点投影図法」と「平行投影図法」との二通りがあると述べている．一点投影図法とは，図形の中のある平行線が一点に集まるように書く図法である．写真や絵などはこの方法で写されている．一方平行投影図法とは，空間で平行になっている線を見取り図でも平行のまま書く方法である．教科書の見取り図はこの平行投影図法が用いられ，数学の場合はこの方法で見取り図を書くようになっている．

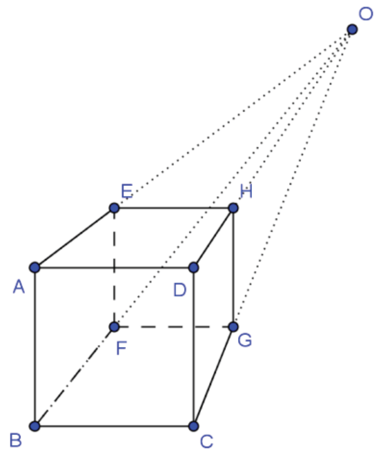



図 2-2-5　一点投影図法

投影図について，投影図とは，平画面，立画面，側画面の三つの画面から見た図をそれぞれ平面図，立面図，側面図として表した図で，おもに平面図と立面図の 2 つの組み合わせがよく扱われる．

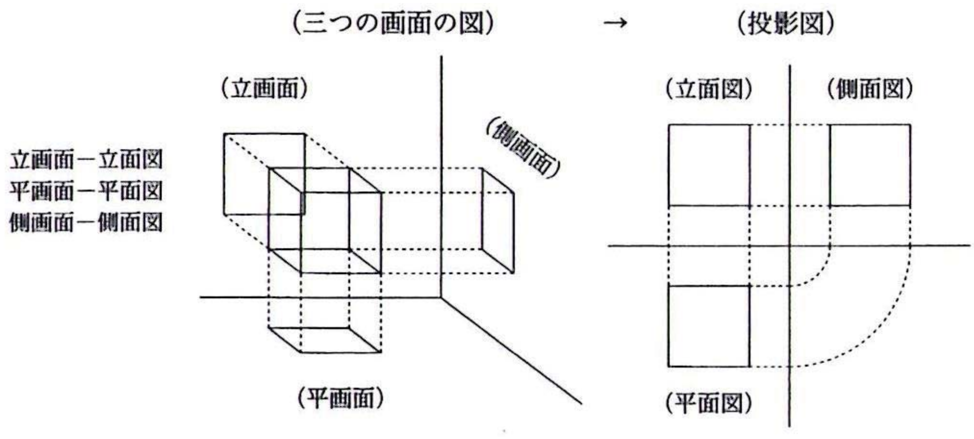



図 2-2-6　三つの画面の図と投影図

杉山は投影図について，「投影図がよく使われるのは，投影図で実長が分かるから」と述べ，投影図は「実長ができるだけたくさん分かるように置いた図を書きます.」としている．また，「ピタゴラスの定理を使わなくても，投影図を使って実際の長さを作図で求める

ことができるのです．この投影図を変形して，書き換えて実際の長さを求めることができるのです.」(p.243)と述べている．例えば，次の図のように置かれた三角錐の投影図を考える．

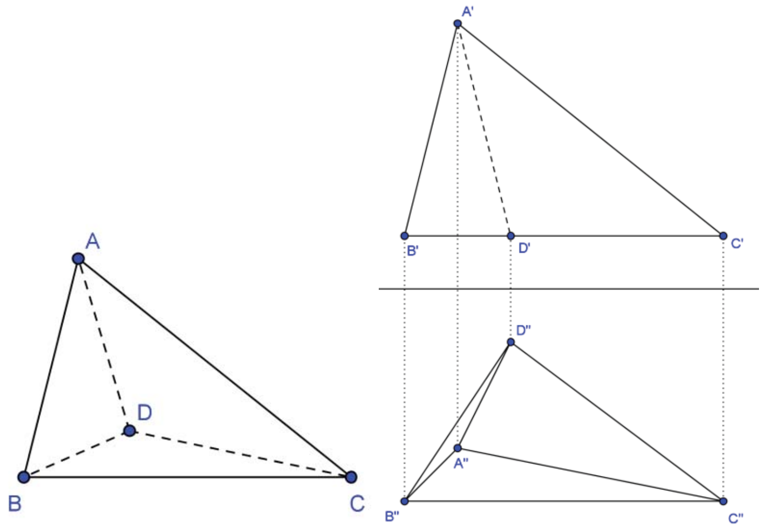



図 2-2-7　三角錐の見取図と投影図

この投影図において，平面図の辺 BC，CD，DB は平画面に平行であるため，辺 BC，CD，DB の長さは平面図からわかる．しかし，辺 AB，AC，AD は立画面に平行でないため，実際の長さが表れていない．そこで辺 AB を例に投影図に辺 AB が実測で表れる方法を考える．実測で表れるためには，求めたい辺が各画面のうちのどれかと平行になればよい．辺 AB については立画面と平行になるように考える．よってまずは平面図において，A”＝B”＝$B_1$ かつ A”B//$l$ となるような点 $B_1$ を作図する．次に立画面図に $B_1$ を対応させるため，$B_1 \perp l$ となる直線と直線 B’C’との交点を作図する．その交点が立面図に対応している $B_1$’である．よって A’B’$_1$ が立画面と平行になるため，もとの図形の AB が実測で表れることになる．

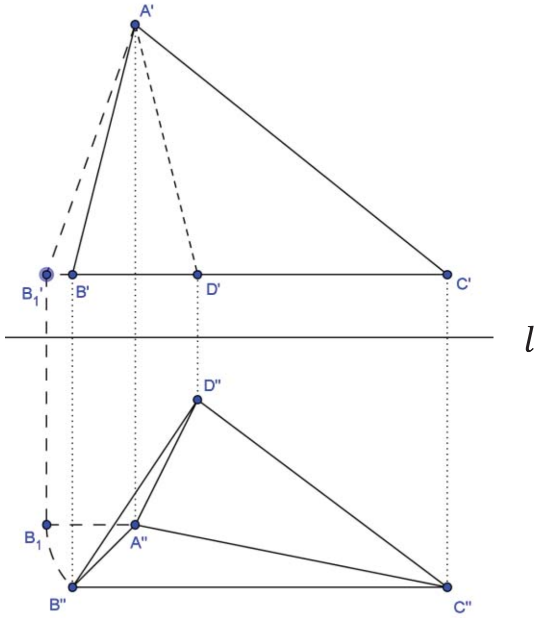



図 2-2-8　操作した投影図

実長を保存して空間図形を平面で表現する方法としては展開図も挙げられるが，展開図ではもとの空間図形の位置関係がはっきりしない．よって杉山は「いろいろな部分の長さが現れる，平行な線が平行に現れる，図形の構成部分の関係が分かる，これが投影図のよいところです．」(p.243)と述べている．

## 第３節　「地図投影法」の原理について

### (1) 田中良運の捉える「地図投影法」について

『数学　第二類』の編纂者の1人である田中良運(1939)は，画法幾何学を当時の中学校の数学教材として導入することに関して，その教材の1つとして，地図投影法があると述べている．

> 「画法幾何初歩の教材を中学教材として取り入れることに対しては，実行上はともかく，理論上はほとんど反対意見が聞かれないようである．（中略）この試みは現在もなお続行されているが，従来の用器画にあった教材に捉われないとすれば，その教材内容はいかなるものが真に適切かと問われると，その答えに窮する状態にある．
>
> これに関する一問題として地図投影法がある．投影画法，透視画法に密接な関係にありながら，用器画の教材には入れられていなかったが，寧ろ適当に取り扱う必要があるのではないか．」(p.51，中略は引用者)

ここで先に画法幾何学，用器画といった言葉の意味を確認しておく．『広辞苑　第六版』によると，次のように説明している

- 画法幾何学…3次元空間内の図形を平面上に表わす方法を研究する幾何学．ユークリッド幾何学を基本とする．
- 用器画…定木・分度器・コンパスなどの器具を用いて，物体を点や線による幾何学的図形で表現する技法．幾何画法．

「図学」という言葉を調べると，「画法幾何学に同じ」と出てくる．

田中は，数学科において地図投影法を教えるべきであると提案している英人Westawayが述べている地図投影法を扱う具体的な方法を紹介している．Westawayは「英国中等学校の前視学官」(田中良運(1936)，p.49)である．

田中(1939)の「地図投影法の原理について」では，Westaway(1931)『Craftsmanship in the Teaching of Elementary Mathematics』の中の第25章「Map Projection」の内容が紹介されている．本論文では，『Craftsmanship in the Teaching of Elementary Mathematics』の復刻版(1937)を分析する．ただし，ここでの内容については，英文の本文と田中(1939)とを照らし合わせながら分析する．

### (2) Westawayの「地図投影法」を扱う方法について

① 地図投影法に至るまで

Westaway(1937)は，最初に投影に関して，基本的な理論は知っていなければならないことを述べている．

“Fundamental principles of projection will already have been taught in the lessons on geometry. The principles of orthographic projection, including so-called “plans and elevations”, should have been taught thoroughly.” (p.517)

「投影に関する基本的な理論は，既に教えられている筈である．正射影の原理は，いわゆるplan(平面図)とelevation(立面図)を含めて，十分教えられなければならぬ．」(p.52，括弧内は引用者)

田中(1939)は用器画の教材として，地図投影法を活用することを考えていた．『教授要目』でも地図に関して，「透視図との関係も深いから，連絡を密接にすることはいうまでもない．」(p.140)と述べている．投影を用いた地図投影法に関する内容を数学に取り入れることが，イギリスでは1930年代から考えられていたことがわかる．

② 地図を製作することについて

Westaway(1937)は，地図を作製することについて，次のように述べている．

“To draw a map, we first draw a network of lines corresponding as nearly as possible to those on the surface of the globe, though they are bound to differ very considerably from the originals.[…]. The real trouble is to draw the network. An examination of an atlas shows that the various networks differ much in appearance. Sometimes one or both sets of lines are straight, sometimes curved, and the curvature seems to vary in all sorts of ways.”(p.519)

「地図を書こうとするには，第一にこの線の網（経緯線）を書くのである．もちろん原型とはかなり食い違ってくることは避けられないが，それでも地球儀上にある網にできるだけ近づくように書く．（中略）真に難しい仕事はこの網の目の作成にある．どれか一つの地図帳を開けてみれば，内には色々の網目のものがあり，外見も著しく異なっているのに気づくであろう．時には縦横の一方あるいは双方が直線のものがあり，双曲線のものもある．しかも曲線たるや，さまざまな曲率をもっているように見える．」(p.54，中略は引用者)

地図を作るにあたって，まずは経緯線を書かなければならないが，その作業が一番苦労

すること，また，その経緯線が直線のときもあれば曲線になることもあるということを説明している．そのあと，Westawayは，“Evidently no map can be drawn on a flat surface accurately.”(p.518)(「明らかに地図は平面上に正確には書くことが不可能である」(p.53))と述べ，家屋や市街の設計図と地図との作成の違いについて，“there is certain to be distortion of form, or inequality in area, or both.”(p.519)(「(原図形に対する)形のねじれ，面積関係の不整合の一方あるいは双方が確かに存在する」(p.54，括弧内は引用者))と指摘し，“The map-maker is bound to sacrifice something.”(p.519)(「地図製作に当たる人は何かを犠牲にしないでは出来ない．」(p.54))と述べている．そして何に関心を持つかによって必要な地図が変わってくることを述べ，“Hence he has contrived projections for different purposes.”(p.519)(「このようにして，異なった目的に対しては多くの投影法を考案しなければならぬことになる．」(p.55))と述べている．

この「異なった目的に対しては多くの投影法を考案しなければならぬことになる」ということに関連して，『教授要目』には次の記述がある．

> 「地図作成に対する基本的な要請としては，距離関係を正しくすること，面積関係を正しくすること，方位関係を正しくすること及び各部分を正しくすることにあるが，これ等を完全に満足させるものがないことは明白である．それがため，用途の別によって種々の地図が考案されているのであるが，航海に使用される心射図，漸長図，等角写像である．平射図及び面積を保つサンソン図等代表的なものを採り上げるがよい．」(p.140)

『教授要目』でも，距離関係，面積関係，方位関係を完全に満足させる地図はなく，用途によって種々の地図が考案されることが示されている．

以上から，投影図，透視図がどのように地図投影法に影響しているのか，地図についてどのように作図をしていくのかを，第３章ではみていく．

## 第４節　本研究における分析の対象

『数学　第二類』は，一つの節は，導入の「場面」で始まり，それに関連した「問」が何題かあり，必要なら，小さな文字で「定義」を与えるか行間に生徒に法則や性質を記入させ，「練習問題」が数題あり，『数学　第二類』ではさらに「作業」も生徒に要求し，節は完結し，各章とも最終節は「種々の問題」となっている．本研究では，当時の生徒が確実に学習したと思われる「問」と「作業」の内容についてみていく．

『数学　第二類』の構成について，１年から５年にかけて次のようになっている．

表 2-4-1　『数学　第二類』の構成

| 学年 | 章 | 節 |
|---|---|---|
| １年 | １．測量 | §１．距離を測ること |
| | | §２．高さを測ること |
| | | §３．縮図法 |
| | | §４．概測 |
| | | §５．種々の問題 |
| | ２．図形の書き方 | §１．見取図 |
| | | §２．展開図 |
| | | §３．投影図［１］ |
| | | §４．投影図［２］ |
| | | §５．定木とコンパスによる作図 |
| | | §６．いろいろな曲線 |
| | | §７．種々の問題 |
| | ３．図形の観察 | §１．対称図形［１］ |
| | | §２．対称図形［２］ |
| | | §３．図形の対象と全等 |
| | | §４．図形の回転 |
| | | §５．回転体と回転面 |
| | | §６．図形の合同 |
| | | §７．回転運動 |
| | | §８．種々の問題 |
| ２年 | １．平行と相似 | §１．平行模様 |
| | | §２．平行線と平行平面 |
| | | §３．平行四辺形 |
| | | §４．図形の拡大と縮小 |

| | | |
|---|---|---|
| | | §５．相似形 |
| | | §６．三平方の定理 |
| | | §７．種々の問題 |
| | ２．三角関数 | §１．正接 |
| | | §２．正弦と余弦 |
| | | §３．三角関数表 |
| | | §４．種々の問題 |
| | ３．円と球 | §１．大円と小円［１］ |
| | | §２．接平面と接線 |
| | | §３．大円と小円［２］ |
| | | §４．円周角　中心角 |
| | | §５．内接　外接 |
| | | §６．種々の問題 |
| ３年 | １．軌跡 | §１．機械の運動 |
| | | §２．点の運動 |
| | | §３．軌跡の求め方［１］ |
| | | §４．座標と軌跡 |
| | | §５．軌跡の求め方［２］ |
| | | §６．いろいろな軌跡 |
| | | §７．点の位置を定めること |
| | | §８．種々の問題 |
| | ２．三角形と三角関数 | §１．縮図法と三角測量 |
| | | §２．三角形を解くこと［１］ |
| | | §３．三角形を解くこと［２］ |
| | | §４．直角と鈍角との正弦，余弦 |
| | | §５．正弦定理　余弦定理 |
| | | §６．加法定理　減法定理 |
| | | §７．三角関数の図形への応用 |
| | | §８．種々の問題 |
| | ３．円運動と三角関数 | §１．蔓巻運動 |
| | | §２．円運動 |
| | | §３．三角関数の拡張 |
| | | §４．単振動 |
| | | §５．振動の合成 |
| | | §６．加法及び減法定理の拡張 |

| | | |
|---|---|---|
| | | §７．種々の問題 |
| ４年 | １．立体図形の表現 | §１．見取図と投影図 |
| | | §２．側面図 |
| | | §３．断面図 |
| | | §４．切口の面積 |
| | | §５．種々の投影法 |
| | | §６．透視図 |
| | | §７．種々の問題 |
| | ２．球面上の図形 | §１．漸長図 |
| | | §２．中心透視図 |
| | | §３．円柱正積図 |
| | | §４．種々の問題 |
| | ３．円錐曲線 | §１．円錐の切断［１］ |
| | | §２．円錐の切断［２］ |
| | | §３．円錐曲線の主な性質 |
| | | §４．種々の問題 |
| ５年 | １．円錐曲線 | §１．円錐の切断［１］ |
| | | §２．楕円 |
| | | §３．円錐の切断［２］ |
| | | §４．放物線 |
| | | §５．円錐の切断［３］ |
| | | §６．双曲線 |
| | | §７．円錐曲線の定義 |
| | | §８．ある種の軌跡 |
| | | §９．種々の問題 |
| | ２．力と運動 | §１．構造物に働く力 |
| | | §２．機械の運動 |
| | | §３．一定の力が働くときの運動 |
| | | §４．力が変わる場合の運動 |
| | | §５．種々の問題 |

まず，本研究の目的である球面幾何を現在の幾何教育に導入することから，２年「３．円と球」のうち，球に関する問を含む「§１．大円と小円［１］」，「§２．接平面と接線」，「§３．大円と小円［２］」と，４年「２．球面上の図形」の全てを分析の対象となる．さらに，本章第３節より，田中良運(1939)は，地図投影法を画法幾何学の教材の１

つとして，捉えていた．そこで，画法幾何学に関する単元も分析の対象となる．『数学第二類』の画法幾何学に関する問を含む，1年「2．図形の書き方」の「§1．見取図」，「§2．展開図」，「§3．投影図［1］」，「§4．投影図［2］」と4年「1．立体図形の表現」の「§1．見取図と投影図」，「§2．側面図」，「§3．断面図」，「§5．種々の投影法」，「§6．透視図」が対象となる部分である．よって，1年「2．図形の書き方」，2年「3．円と球」，4年「1．立体図形の表現」，「2．球面上の図形」の計4章を分析の対象とする．

# 第３章

# 『数学　第二類』の分析と考察

## 本章の意図と構成

本章の意図は,『数学　第二類』の本研究の分析の対象について，その特徴を明らかにすることである.

本章の構成は次の通りである.

第１節では,「図形の書き方」の問の分析を行う.

第２節では,「立体図形の表現」の問の分析を行う.

第３節では,「円と球」の問の分析を行う.

第４節では,「球面上の図形」の問の分析を行う.

第５節では, 第１節から第４節までの結果を踏まえ, 第２章で示した分析の視点からの考察を行う.

本章では，第２章で定めた『数学　第二類』の分析の対象についてみていく．その際，教科書に記載された内容は□内に示す．図番号は筆者が本論文に合わせて記入したものである．

## 第１節　「図形の書き方」の分析と考察

### (1) 「§１．見取図」

「§１．見取図」の内容を以下に示す．

物の形を示すにはいろいろな方法があるが，普通には見取図が用いられる．

なお，物を作るための見取図には，各部の寸法を示すことが必要である．

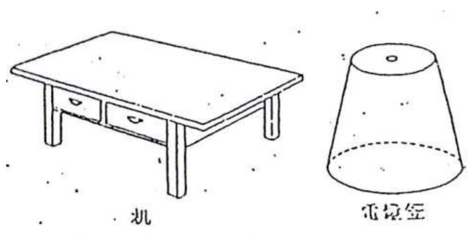



図 3-1-1

問１．机と腰掛の見取図を書いて，それに必要な寸法を書き入れよ．

右のようなものも，見取図の一種である．

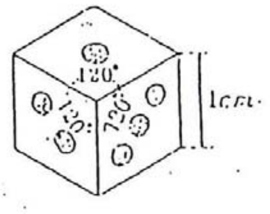


図 3-1-2

問２．右の図はサイコロをどの方向から見て書いたものか．また，これと同じ見方で机の見取図を書き，その寸法が分かるようにせよ．

問３．前問で書いた見取図にはどんな便利があるか．また，どんな形のものを表わすのに都合がよいか．

「§１．見取図」では机，電燈笠，サイコロの３つの図が示されている．このうち，机は

透視図，サイコロは軸測投影図でかかれている．問３では，軸測投影図について，どのようなよさがあるかを考える問が設定されている．この軸測投影図について,『数学編纂趣意書』では次のように述べ，軸測投影図のよさについて説明している．

「問２で示したのは，主要な三方向のいずれとも等角をなす方向の無限遠からの見取図である．この見取図の長所は主要な三方向の長さが同じ割合で書かれるところにある．ここではいろいろな修練のために課すけれども，それ自身の重要さは大きくはない．普通の見取図に比べて同日の談ではない．」(1 年，p.17)

### ⑵ 「§２．展開図」

「§２．展開図」の内容を以下に示す．

右の図のような状差の作り方を考えてみよう．

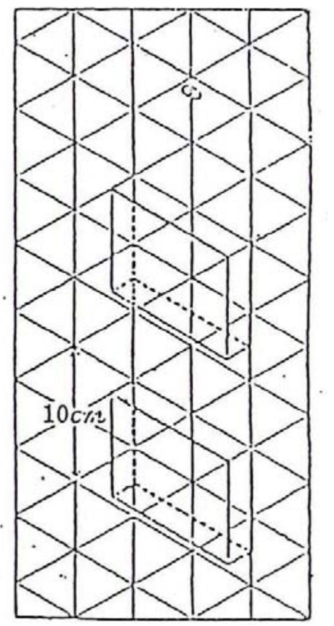



図 3-1-4

問１．この状差を作るには，どこから始めたらよいか．また，それに必要な寸法を測れ．

［作業］厚紙で図のような状差を作れ．

問２．右の図のような箱を厚紙で作るのに，なるべく継目を少なくしたい．紙

をどのように切り，どのように折り曲げたらよいか.

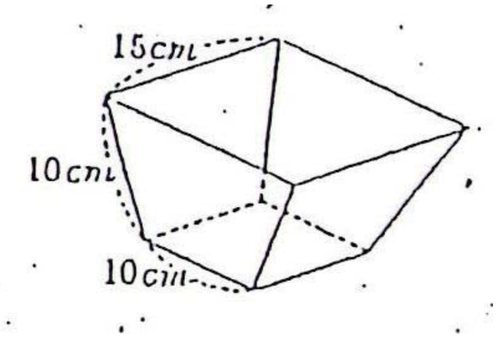



図 3-1-5

問３．右のような梯形を，正確に書く方法を工夫せよ.

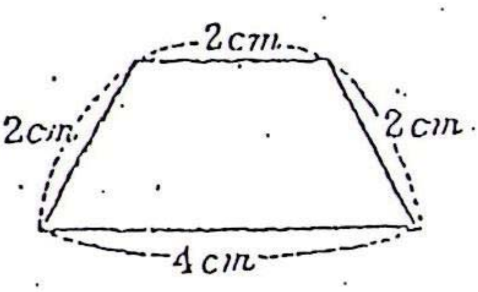



図 3-1-6

四面体のすべての面が正三角形のとき，これを　正四面体　という.

正四面体を稜に沿って切り開くと，右の図のように展げることができる.

このように，立体の表面を平面の上に展げた図を，その立体の　展開図　という.

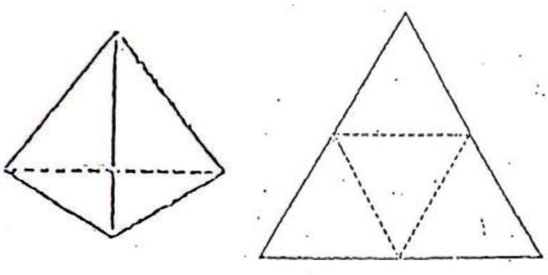


図 3-1-7

問４．正四面体のいろいろな展開図を書け.

問５．右の図のような直円柱の表面の展開図を書け．

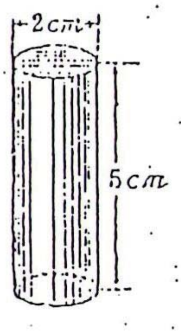



図 3-1-8

問１で出てくる状差の見取図は，軸測投影図である．問１及び直後の［作業］で，この状差を作る流れになっている．「§１．見取図」で取り上げたが，『数学編纂趣意書』では軸測投影図について，「主要な三方向のいずれとも等角をなす方向の無限遠からの見取図である．この見取図の長所は主要な三方向の長さが同じ割合で書かれるところにある．」(1 年，p.17) と述べているように，作業するにあたって，その長さがわかるような図になっている．「§１．見取図」の「問３．前問で書いた見取図にはどんな便利があるか．」で考えたことが，この問で生かされている．

### (3) 「§３．投影図［１］」

「§３．投影図［１］」の内容を以下に示す．

機械・艦船・航空機などのように，複雑なものの形と大きさとを表わす一つの方法として，投影図が用いられる．

下の図は正六角錐の投影図である．投影図はこのように，平面図と立面図とを組み合わせたもので，その間の関係がわかるようになっている．

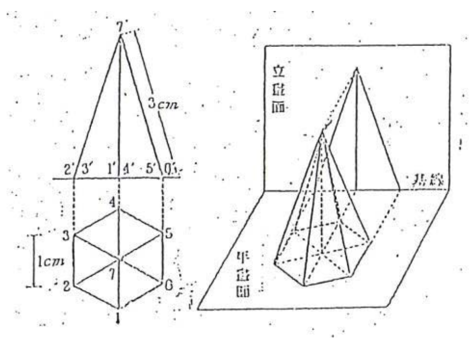



図 3-1-9

問１．前の図の頁の図の正六角錐を廻して，平面図が基線に対して下の図のような位置に来るようにしたら，立面図はどうなるか．これを書け．また，この角錐の側稜の長さと側面積とを求めよ．

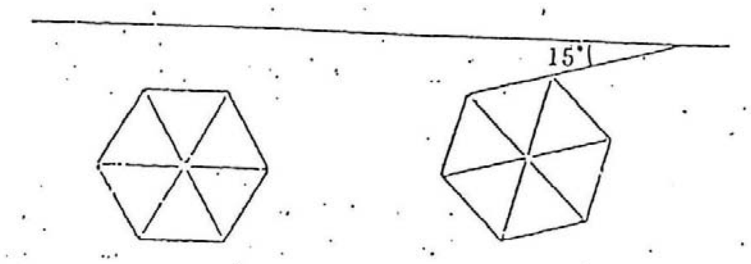



図 3-1-10

問２．右の図は，踏台の形をした四角錐台の見取図である．この四角錐台を適当な位置において，その投影図を書け．また，展開図を書いて，この四角錐台を作れ．

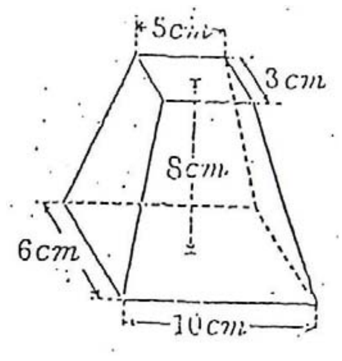



図 3-1-11

ここで初めて投影図を扱う．まず，問１をみる．問１を解くと，次のようになる．

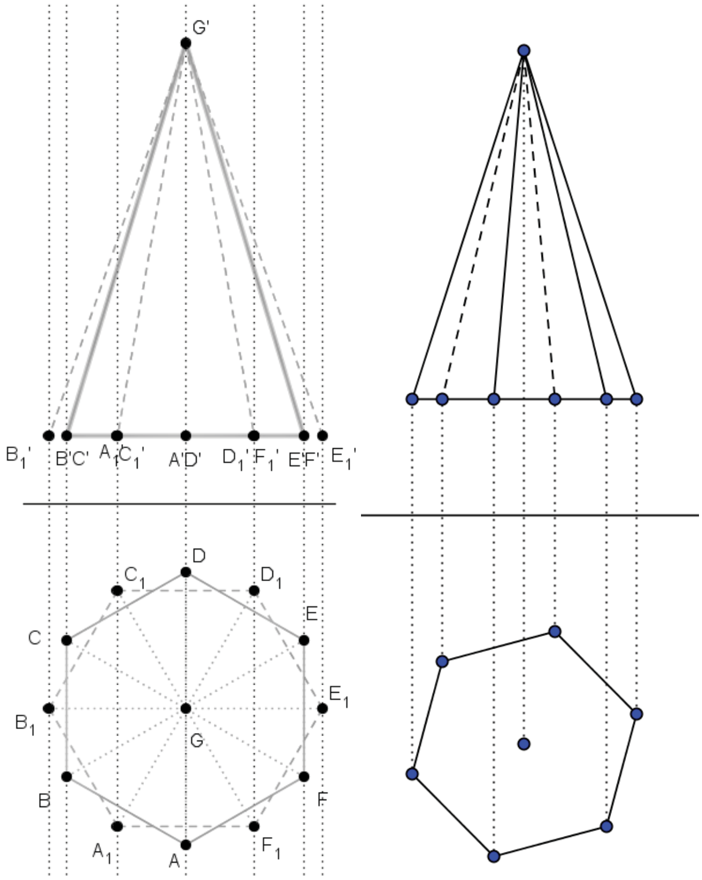


図 3-1-12　正六角錐の投影図

図 3-1-12 で，左は点線が元の位置に立体がある時の投影図，実線が回転させた後の，問題の解となる投影図である．これは第 1 章第 2 節で取り上げた土屋(1998)の「投影図を操作（変形)」する問である．

『数学編纂趣意書』では，「§ 3．投影図［１]」について次のように述べている．

> 「投影図を書くにも，まず見取図を書き，これと照合しつつ作図する方法がよい．投影図が書けたならば，それを見て原図形を再現し，験となすと同時に図を見る修練をなさしめなければならぬ.」(1 年，pp.18-19，下線は引用者)

この下線部分について，問 2 では投影図から展開図を書き，それを組み立てて四角錐台を作るようになっている．問 2 の投影図は次のようになる．

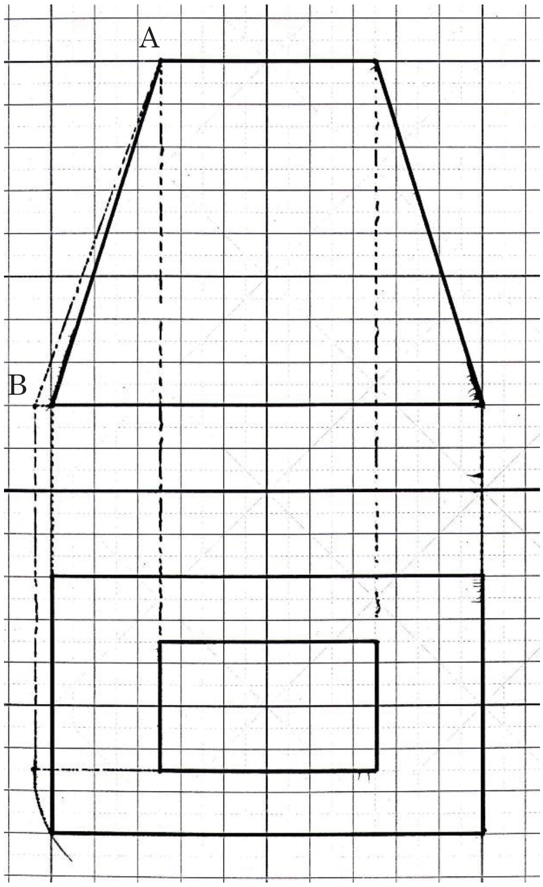


図 3-1-13　四角錐台の投影図

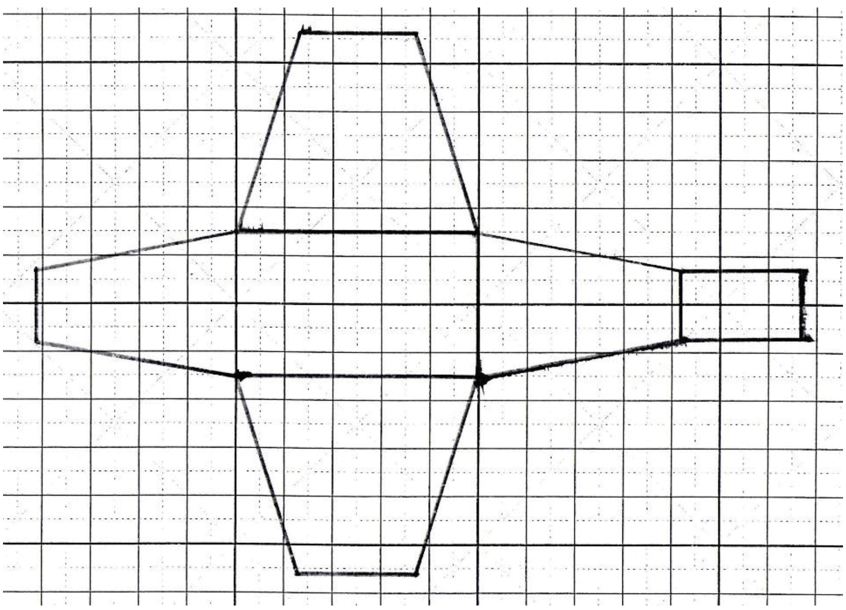


図 3-1-14　四角錐台の展開図

展開図を作図するとき，底面の大きな長方形の上下左右についている台形の脚の長さが課題となる．その長さを作図で求めるために，投影図を用いる．投影図の立面図の線分 AB が展開図の台形の脚の長さである．この脚となる部分を作図するために，投影図を変形させて求めることになる．

### (4) 「§４．投影図［２]」

「§４．投影図［２]」の内容を以下に示す.

右の見取図のような遮光用電灯笠を作ることを考えてみよう．

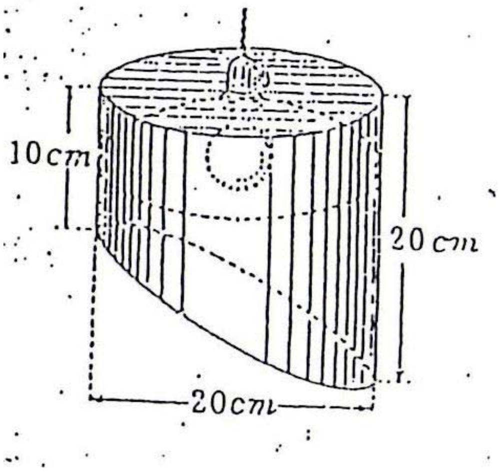



図 3-1-15

問１．この電灯笠の側面は，円柱面を斜めに切った形である．これを最も短い母線で切って開けば，大体下の図のような形になっているが，下の縁の曲線 ABC の形は明らかでない．この曲線を正しく書くには，どこの寸法が分かればよいか．

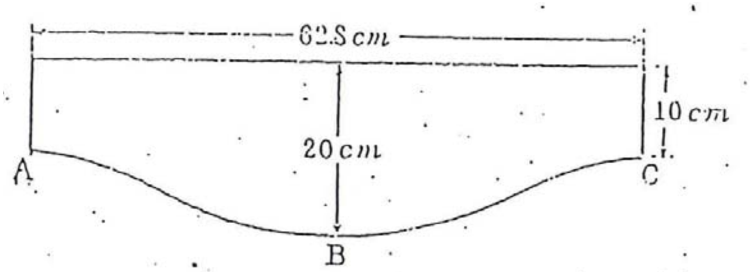



図 3-1-16

上の寸法を出すのに，投影図を利用する方法を工夫しよう．

問２．問１の電灯笠をさかさに立てたものを都合のよい位置において，その投影図を書け．

問３．前問で書いた投影図から必要な寸法を求め，その側面の展開図を書け．

［作業］上で考えた電灯笠を厚紙で作れ．

この節の問は第２章第１節の図 2-1-3 と同じである．この問では，投影図をどのように活用する必要があるか，立体をどのようにみることによって，曲線が作図されるのかが求められる．

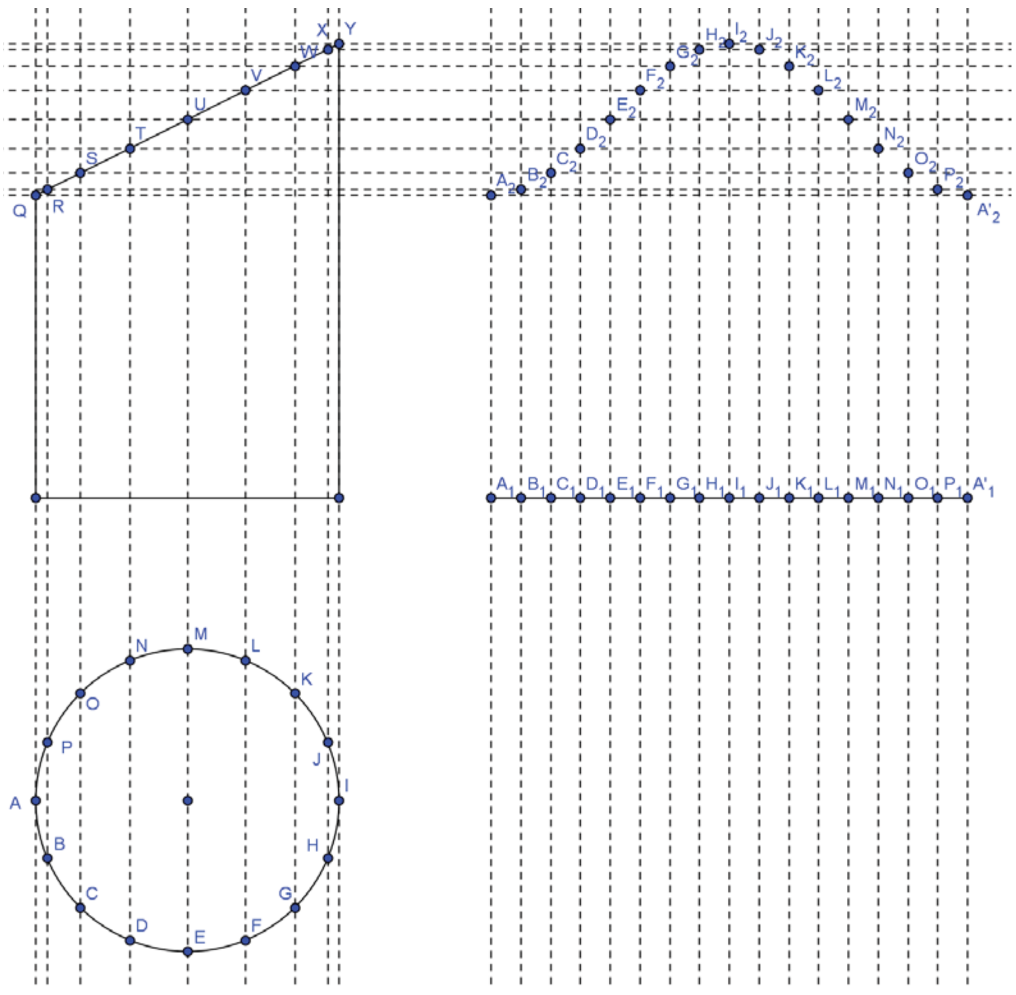



図 3-1-17　電燈笠の投影図と側面の展開図

『数学編纂趣意書』では，「§４．投影図［２］」について，次のように述べている．

「本節で示す投影図の利用法は重要であるから，十分に徹底させ，空間図形と投影図との関係が直観的に密接に結びつくように修練しなければならぬ．」(1 年, p.19)

投影図を道具として，空間図形を分析しようとしていることが読み取れる．「§４．投影図［２］」の問は，問１では，図 3-1-17 の右図の展開図の高さを求めることで曲線がかけることを考えさせる．そのために投影図を用いることを示し，問２，問３で投影図を作図する．前の問が次の問で生かされるような構成となっている．

## 第２節　「立体図形の表現」の分析と考察

### (1) 「§１．見取図と投影図」

「§１．見取図と投影図」の内容を以下に示す.

立体図形を表すには，見取図・投影図などを用いる．目的によっては新しい表し方を案出し，適当な図法を用いるがよい.

問１．教室にある教卓と同じ品を注文しようと思う．このためには，どのような図面がよいか.

問２．右は電燈の点滅器の見取図である．この内部の構造を説明するには，どのような図が適当か.

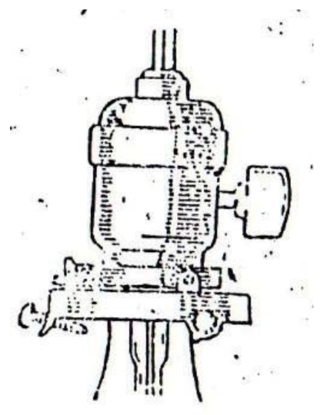


図 3-2-1

問３．右の投影図に示す立体の見取図を書き，主要な部分の寸法を記入せよ.

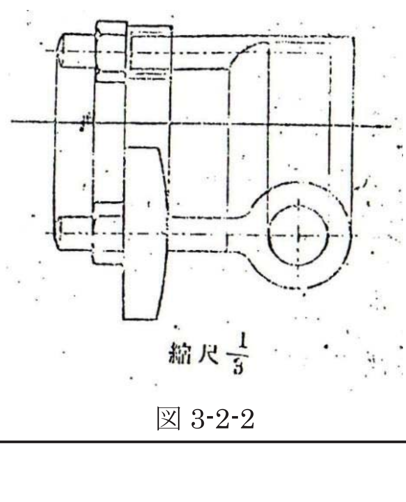



図 3-2-2

問４．画面を適当な位置にとって，下の見取図に示す立体の投影図を書け．（寸法の単位はミリ）

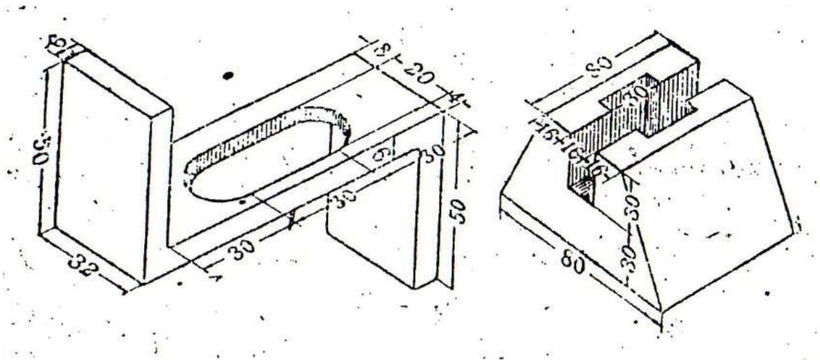


図 3-2-3

問５．右に示す三角錐の各稜の底面に対する傾きを作図で求めよ．
また，各側面の実形を求める方法を工夫せよ．

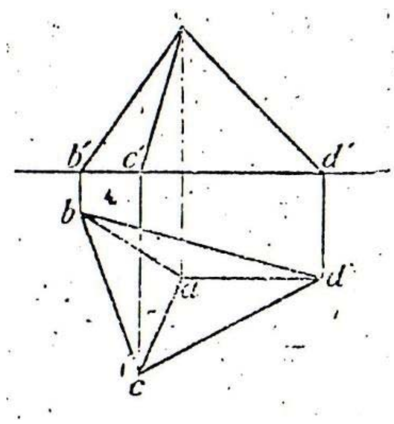



図 3-2-4

問１，２は，図面の必要性について，状況によってどの図面が適切か考える問になっている．

問３，４について，『数学編纂趣意書』をみると，「１．立体図形の表現」の目的内に次の文章がある．

「見取図に習熟することは，空間直観力の涵養に肝要な条件となる．従って各種の図法を考究する場合には見取図との関連を明確にすることが大切である．」

問３，４は見取図と投影図の関連を明らかにするもので，『数学編纂趣意書』の内容と一致するものである.

問５は，投影図を用いて，各辺と底面との傾きや，実長を求める問題である．前節でも投影図を変形させる問があったが，投影図では，いずれかの画面に平行になるように立体を置いたと考えられるように変形することで，実際の長さ，角度が求められる．投影図を活用することがこの問題の意図であることがわかる.

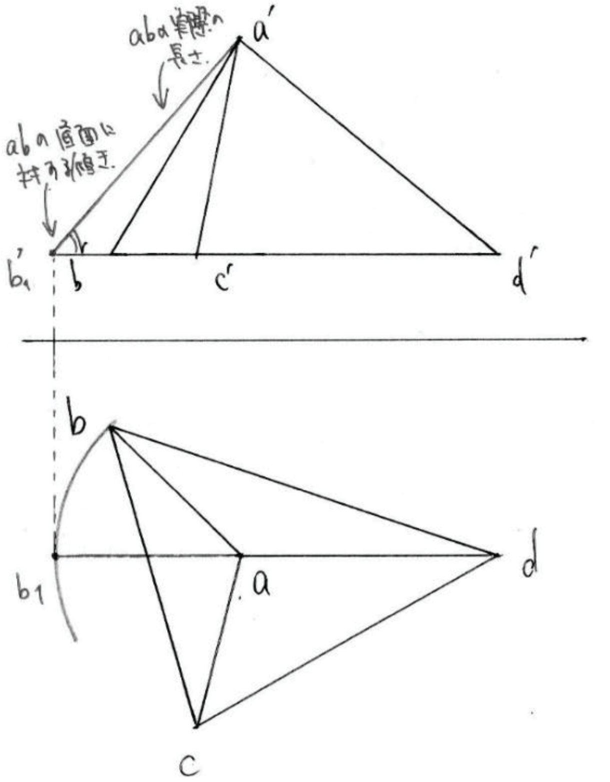



図 3-2-5　三角錐の投影図

### ⑵ 「§２．側面図」

「§２．側面図」の内容を以下に示す.

> 投影図を用いて立体の形を観察したり，その性質を調べたりするとき，平画面・立画面のほかに補助の画面を用いると便利なことがある.

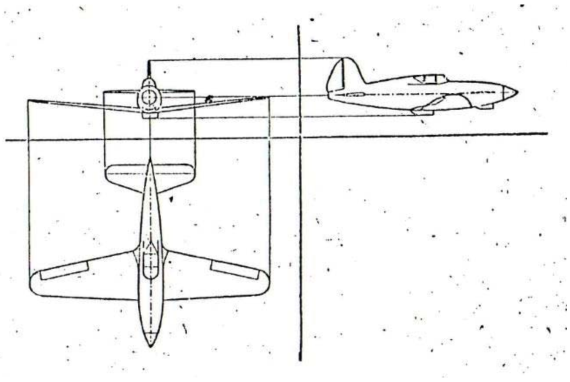


図 3-2-6

問１．上の投影図で，三つの画面は立体に対してどのような位置にあるか.

問２．次の投影図で，基線に垂直な画面を補助にとり，その上の投影を書き加えよ.

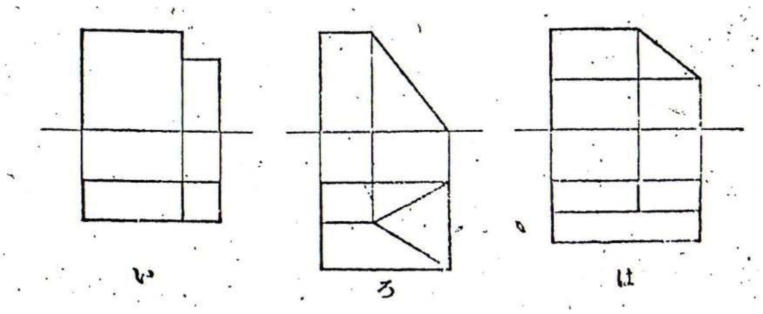



図 3-2-7

基線に垂直な補助の画面を　側画面　といい，その上の投影を　側面図　という.

平面図・立面図・側面図の三つからできている図を三面図ということがある.前頁の上の図は飛行機の三面図である.

投影図を書くとき，立体に対する各画面の位置の定め方によって，図の配置が違ってくる.

右の図は，普通に用いられる一つの方法を示したものである．このほかにどのような定め方があるかを考えよ.

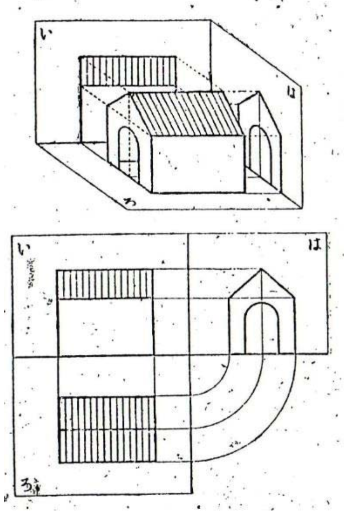



図 3-2-8

問３．右の図は，ある機械の部分品を表す．
適当な画面を用いて，この投影図を書け．（寸法の単位はミリ）

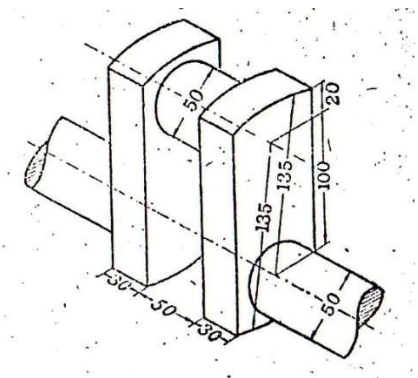



図 3-2-9

二平面が交わるとき，その交線上の一点を通り交線に垂直な直線を両平面の上に引く．この二垂線のなす角を　二平面の作る角　という．

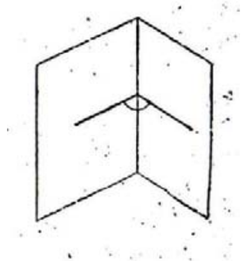


図 3-2-10

問４．右の投影図で，平画面に垂直で，立画面と 30°の角を作る画面をとり，その上に投ずる角錐の投影図を書け．

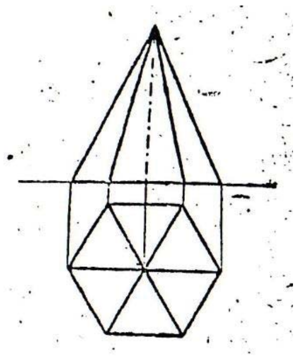


図 3-2-11

問５．一平面の垂線を含む平面は，その平面に垂直である．これを証明せよ．

問６．二平面が直交するとき，交線上の点を通る一方の平面の垂線は他方の平面に含まれる．これを証明せよ．

§２．では投影図について，平面図，立面図だけでなく，側画面から見た側面図を用いて，立体図形を分析するようになっている．問１で確認をしているが，問３までは，側画面は平画面，立画面とそれぞれ垂直になるように設置し，側面図を考える．問４の前で，二平面の作る角について定義し，問４では側画面を「平画面に垂直で，立画面と 30°の角を作る」という条件を与えて，側面図を考えるようにしている．その流れから，問５，６で２つの証明問題へとつながっている．

下の図は問３の解決過程で，左が側面図，右は投影図である．問３では側面からみた時の横幅となる線分 AB の長さが与えられていないため，平面図が性格に作図できないようになっている．作図をしてみると，見取図から側面図を考えることによって，横幅が実測によって求められる．よって，平面図，立面図を作図することができる．この問から，平面図，立面図だけでなく，側面図の必要性を感じることができる．

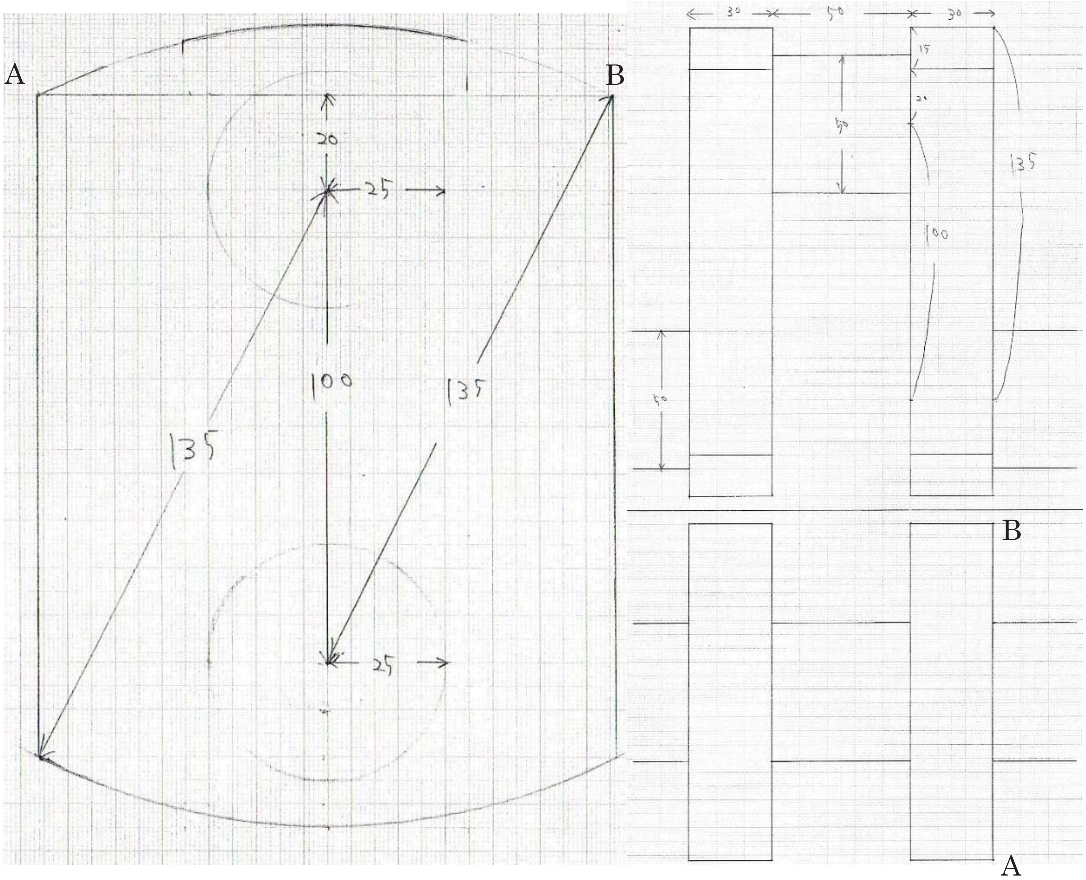



図 3-2-12　図 3-2-9 の側面図と投影図

**(3)「§３．断面図」**

「§２．側面図」の内容を以下に示す.

複雑な機械の内部構造などの説明には，切断面の図を用いるとよい.
この断面には平面がよいこともあれば，不規則な面がよいこともある.
右の図では，どのような切断面が用いられるか.

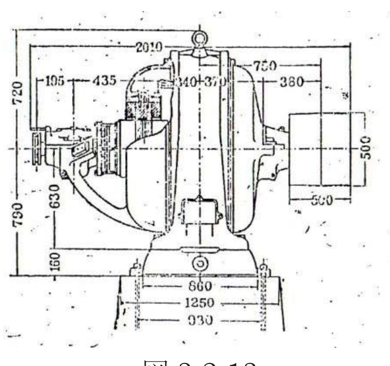



図 3-2-13

問１．自転車の足踏みには回転による摩擦を減らす装置がある．この装置の構造を示す適当な図を書け．

問２．右の図は，ある機械の部分品を示す．下の平面図に示された直線$a$を通って画面に垂直な平面で切ったときの，切り口の図を書け．

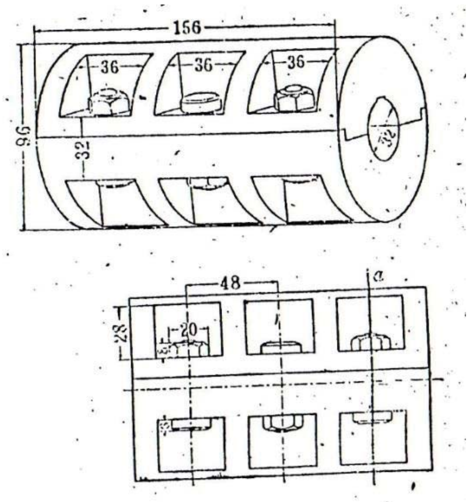



図 3-2-14

投影図で，画面と平面との交線を　平面の跡　という．

投影図では，両画面上の跡によって平面を表す．

問３．右の投影図で，正四角柱を平面で切った切り口の実形を求めよ．

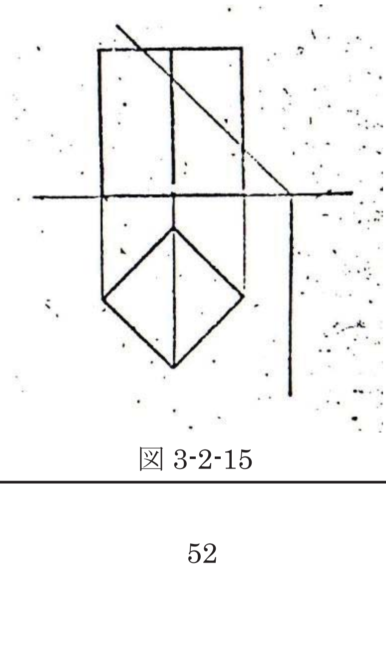


図 3-2-15

問４．投影図で直線と平面とが表されているとき，この平面とその直線を含む鉛直面との交線の投影を書く方法を考えよ．

問５．投影図で直線と平面とが表されているとき，それらの交点を求めるにはどうすればよいか．

「§３．断面図」では，断面図について，実際の部品などを題材として考える問題が含まれている．作図を含む問を見ていくと，問２，３は，投影図での作業とほぼ同じ問題であることがわかる．

問３は「§１．見取図と投影図」の問５と同様に，投影図を変形させて，切り口の各長さを実測によって求めていく．その結果が下の図である．

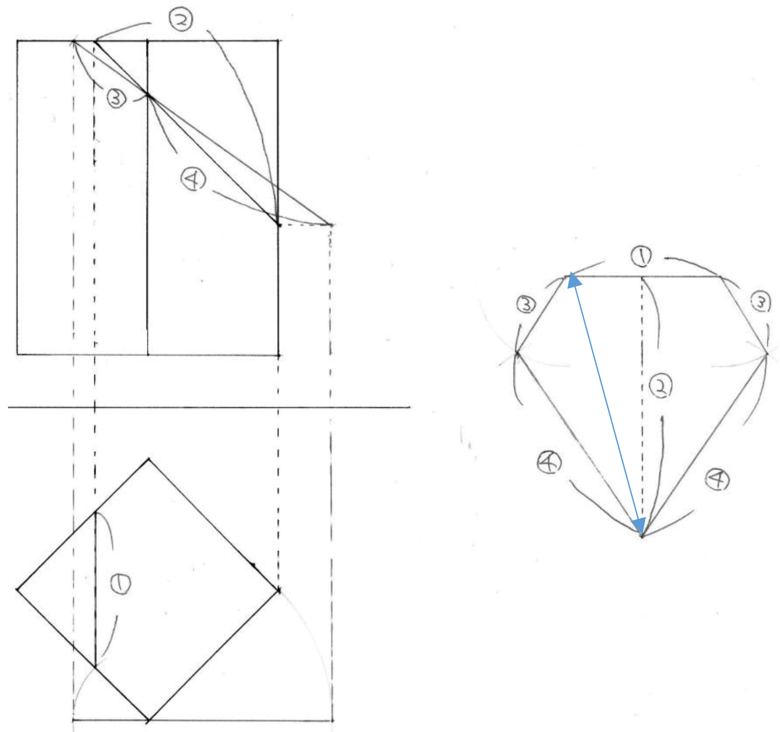



図 3-2-16　解法の様子

ここで，②の長さを求めなければ，図が完成しないことがわかる．この切り口は五角形になるが，この②は①の垂直二等分線と一致する線である．この②の①と反対側の端の点を定めることで，自動的に図形が一意に定まっていく（その点が定まることにより，上の右図の矢印の間の長さが定まり，さらに③，④から，三辺の長さが決まるからである）．この図形決定の考え方は，１年で三角形の合同定理について学んで以降，３年「２　三角形と三角関

数」でもこの考え方の修練をすることが『数学編纂趣意書』に明記され，問にも，空間において様々な視点から直角三角形を作り出す内容が含まれている．

**(4) 「§５．種々の投影法」**

「§５．種々の投影法」の内容を以下に示す．

飛行機・船舶などには上下・前後・左右の三方向があって，普通の投影図では，この三方向からの投影をそれぞれ平面図・立面図・側面図としている．

ここでは，一つの画面を用い，立体の上面・前面・一つの側面を同じ角度に見るような方向からの投影を考えてみよう．

問１．右の図は，立方体の見取図である．対角線 AA’に垂直な平面を画面にとって，この立方体の投影を書け．

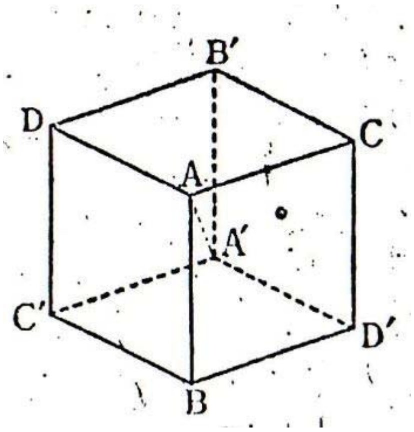



図 3-2-17

問２．右の図に示すのは直方体であって

$$\mathrm{AB} = 2\mathrm{AC} = 2\mathrm{AD}$$

である．A’B’の中点を E とし AE に垂直な平面を画面にとって，この直方体の投影を書け．

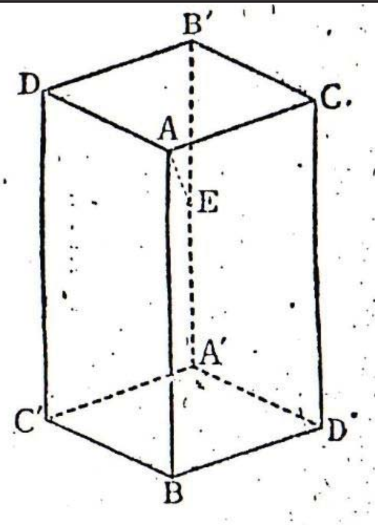



図 3-2-18

問1，問2の図法で書いた図を　等角投影図　という．

問3．前問で稜に平行な直線と，その投影との長さの比を求めよ．

等角投影図を書くには，右の図のように正三角形の網の目を書いておいて，その上に書くのが便利である．このとき網の目の三辺は上に述べた三つの方向の等しい長さを表す．

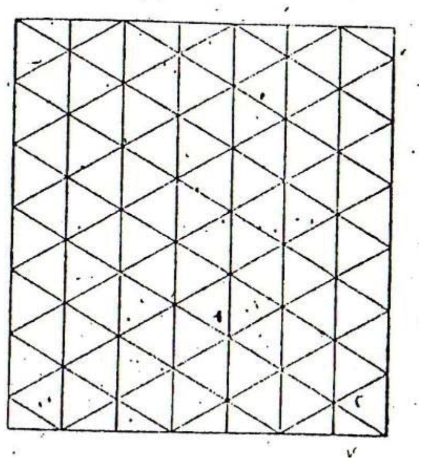


図 3-2-19

投影図・等角投影図では，画面と投影の方向とは垂直であった．次に，投影の方向が画面に垂直でない図法を考えよう．

問4．右の図は，立方体とその面 ABCD に平行な平面 M とを示す．M を画面

にとり，面 EFGH の中心 K と頂点 A とを結ぶ直線の方向から，この立体を投影した図を書け．

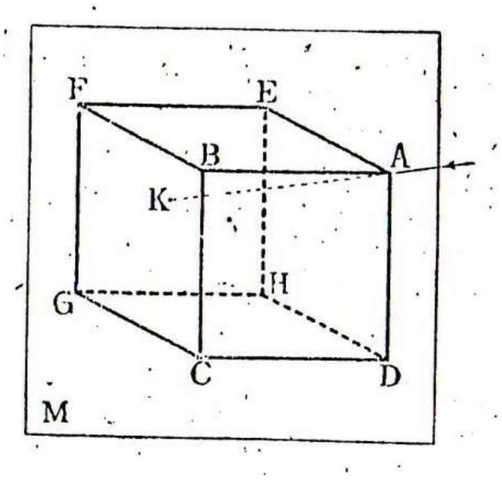



図 3-2-20

「§５．種々の投影法」では，見取図について，第１章第２節で示した島田(1990)の投影法の分類のうち，斜投影だけでなく，直角投影を出して見取図の種類を増やしている．直角投影については，１年「２　図形の書き方」の「§１．見取図」で，教科書にサイコロの図がこの書き方で，その書き方に従って机を書くという問題が１問あった．

問１，問２をゾムツールで再現すると，次の図のようになる．(厳密には次の図は透視図であるが，できる限り平行投影に近づけた．)

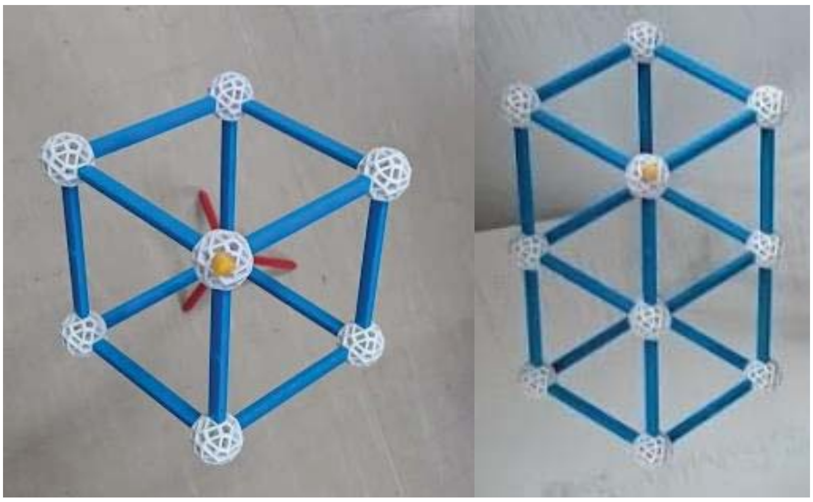


図 3-2-21　問１，問２の見取図の様子

左の図は問１のものだが，外側に正六角形が見えるように見取図ができる．

等角投影図の説明で，正三角形が網の目になった図に書き込むとよいとあるが，この図にも辺の組み合わせで正三角形が見える．

問３について，筆者は実際の辺の長さと，等角投影図の辺の比はいくらか，と解釈した．そうすることにより，立体を観察する視点の位置を図 3-2-22 のように変え，より簡単に問題の解決を行うことができるからである．この場合，下の写真から上の頂点から補助線までの対角線の距離が，元の対角線の$\frac{1}{3}$であることがわかる．

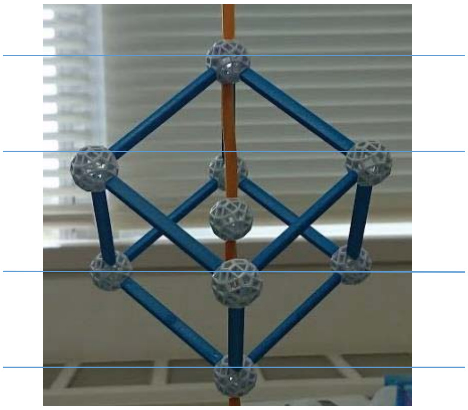


図 3-2-22　立方体を対角線の鉛直方向からみた様子

1 辺が 1 の立方体の対角線の長さは$\sqrt{3}$であるから，下の図を考えると比が出てくる．

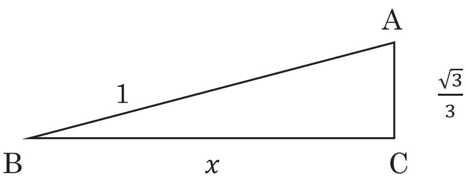



図 3-2-23　図 3-2-22 の一部の直角三角形

この図で，AB は実際の長さ 1，AC は上の写真の対角線の一部で長さ$\frac{\sqrt{3}}{3}$である．この図の BC が図の地面の方に投影されてできた長さで，これが等角投影図で表される一辺の長さとなる．よって三平方の定理から

$$x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

となり，比がわかる．

問４の平行投影は下の図のようになる．

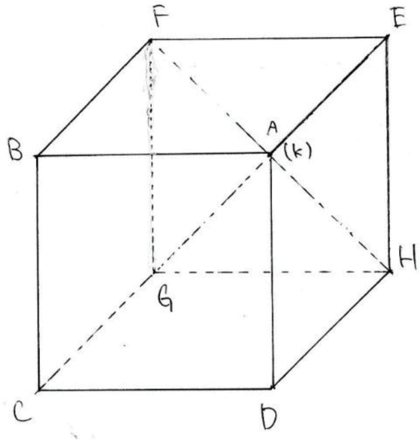



図 3-2-24　問４の見取図

この問は，見取図から見取図を作図するという内容になっている．二次元で表された図形の中で，視点を切り替えて立体をみることが求められる問である．

### ⑸ 「§６．透視図」

「§６．透視図」の内容を以下に示す．

写真のように，物の形を大体見たままの感じのするように写す図法がある．
ガラス板を透して物を見ながら，その形を板の上に写し取ると，このような図ができる．

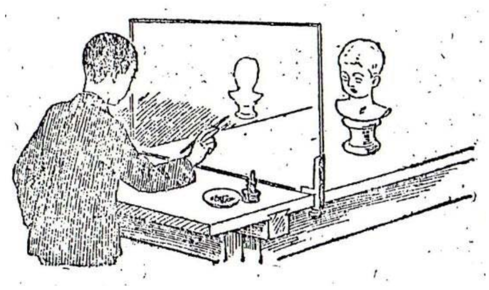


図 3-2-25

この理によって書いた図を　透視図　という．

問１．透視図では，平行線はどのような線で表されると思うか
また，これは見たままの感じと一致するかどうか．

次頁の図は，水平面 い の上にある直方体をＳから見て，鉛直面 ろ の上にそ

の透視図を作ったところを示す.

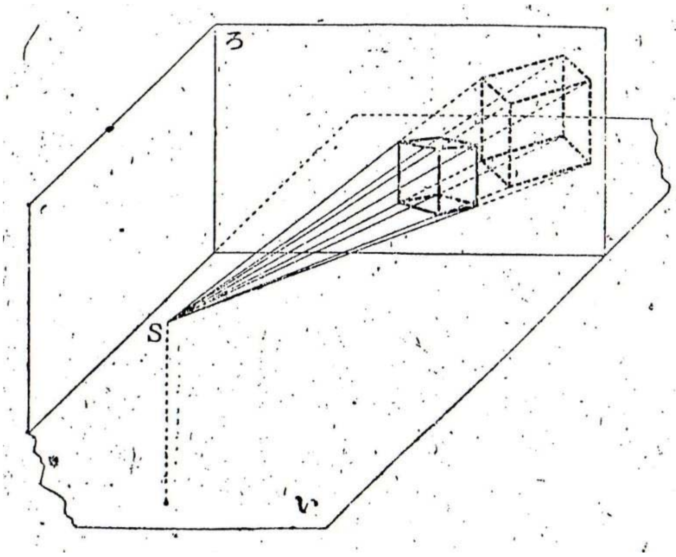



図 3-2-26

このとき，目の位置 S を　視点　という.

立体と視点との投影図から，立体の透視図を書く方法を考えよう.
い を平画面に，ろ を立画面に取ると，上の図の直方体は立画面の向こう側にあるから，その平画面は基線の上にできる.

問２．次の図で，直方体の頂点 A の透視図を書く方法を考えよ.
次に，この立方体の透視図を書け.

問３．右の図で，稜 AB を B の方へ延ばしていったら，その透視図はどのように延びていくか．また，他の稜についてはどうか.

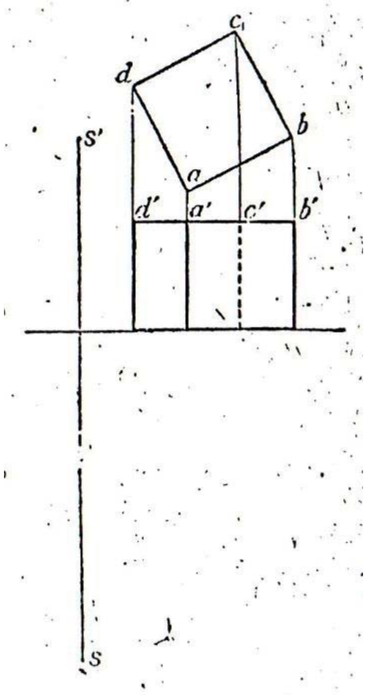



図 3-2-27

問４．下の図は，直方体と視点との投影図である．

前問でわかったことを利用して，この直方体の透視図を書く簡便な方法を工夫せよ．

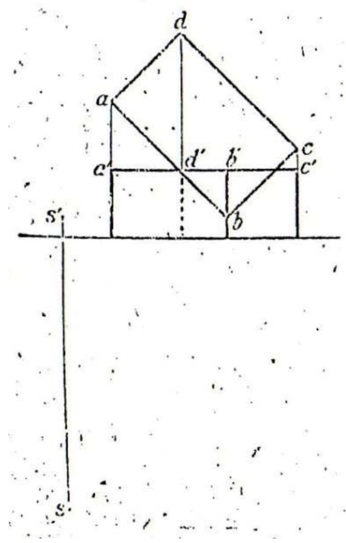



図 3-2-28

一組の平行線の透視図が一点に集まるとき，この点を各々の直線の　消失点

という．

問５．水平な直線の消失点の軌跡は何になるかを考えよ．

視点の平面図を　停点　といい，立面図を　視心　という．また，視心を通って基線に平行に引いた直線を　地平線　という．

投影図から透視図を作るには，立体を立画面の手前に置き，立画面の上に透視図を書くのが便利である．

問６．右は直方体と視点との透視図である．立画面の上にこの透視図を作れ．

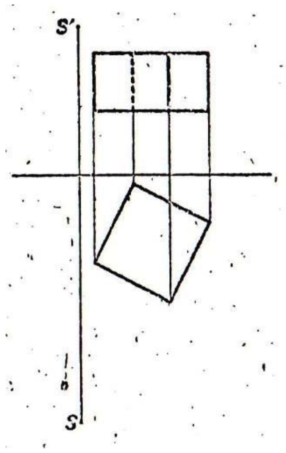



図 3-2-29

「§６．透視図」について，砂田大樹(2015)は投影図を用いた教材として，透視図の作図法である問２を考えている．

図 3-2-27 は，立体と視点 S の投影図で，S と ABCD は平面図，S'と A'B'C'D'は立面図，基線が画面を表している．この投影図から透視図を作図する．まず平面図（図 3-2-30）を考える．図 3-2-30 において，S と A を結ぶと，基線との交点 $A_1$ が作図される．この $A_1$ は，例えば図 3-2-25 の板において，頭頂部の点の左右の位置を決めたことになる．次に，この点 $A_1$ と立面図（図 3-2-31）を考える．立面図において，点 $A_1$ は点 A の透視図の左右の位置を決定する役割をしているため，点 $A_1$ を通り基線に垂直な線を作図する．その垂線と直線 SA との交点が，透視図における点 A の位置である．同様の操作をすべての点に対して行うことで，問２の立方体の透視図（図 3-2-32）が作図される．

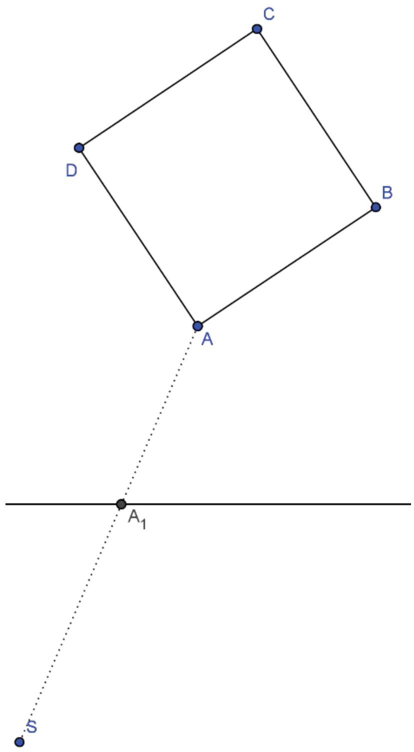



図 3-2-30　平面図

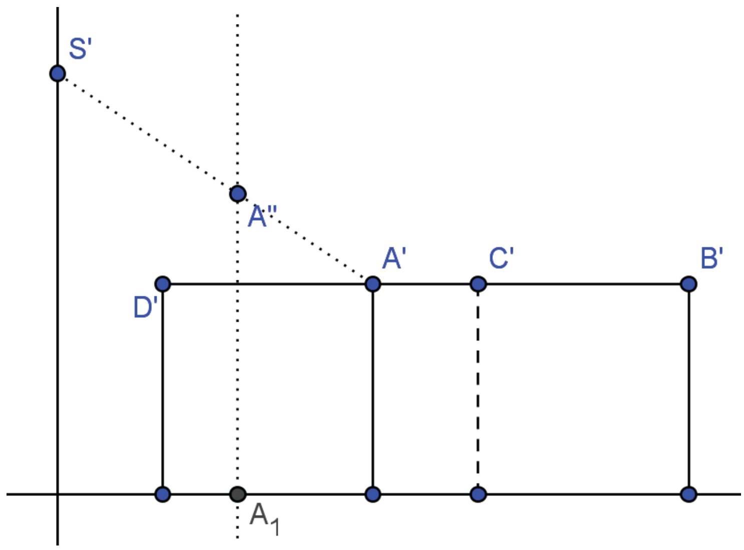



図 3-2-31　立面図

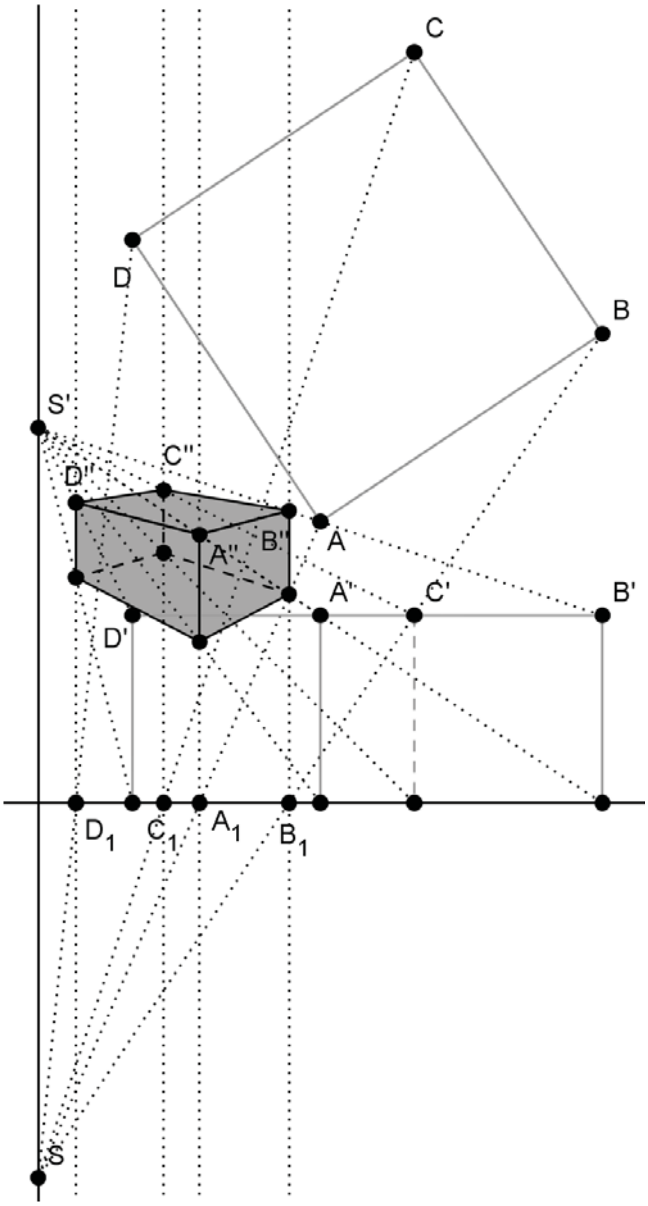



図 3-2-32　透視図

砂田(2015)はこの問について,「この問の特徴は, 投影図を活用し, それに操作を施して, 新たな点や図形を構成するように，投影図を道具として使うことが求められている点である.」(p.441）と述べている．島田(1990)の述べる幾何学的操作において，投影図から，新たな点や図形を作図することがあてはまると考えられる.

## 第３節　「３．円と球」の分析

### (1) 「§１．大円と小円［１］」

「§１．大円と小円［１］」の内容を以下に示す．

大洋を航海する船が，最短距離を行こうとするときには，大円航路をとる．

大円航路というのは，地球の中心を通る平面と地球の表面との交わりの線に沿った路のことである．

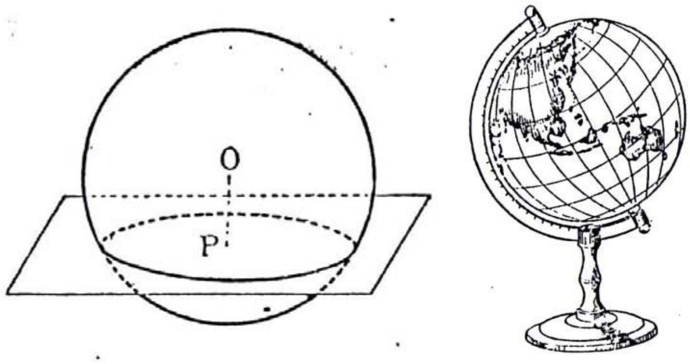



図 3-3-1

問１．球面と平面との交わりの線は円である．これを証明せよ．

球の中心を通る平面と球との交わりの円を　球の大円　といい，中心を通らない平面と球面との交わりの円を　球の小円　という．

問２．半径$a$cm の球面を，中心から$b$cm の距離にある平面で切ったときの切口の半径を$a$，$b$で表せ．

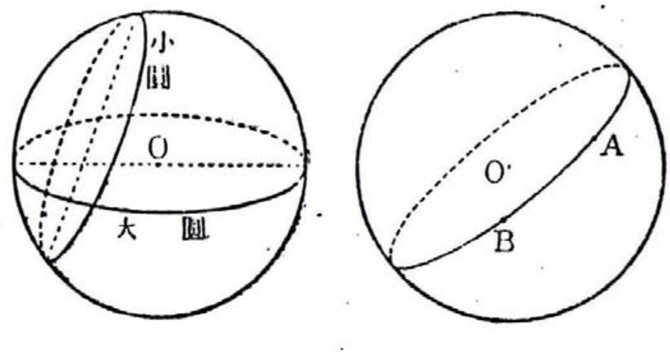



図 3-3-2

問３．球面上の二つの点 A，B を通る大円はいくつあるか．

「§１．大円と小円［１]」では，球の大円，小円の定義について触れている．大円については，一文目にもあるように大円航路が４年「２．球面上の図形」に出てくる．

問１について，線分 OP を含む半円のうち，直径を軸として回転させてできた立体を球だと考えることで，平面との交わりの線が円であることがわかる．これは第２章第１節で述べた「空間の想像力」の「２．頭の中で図形を考えそれに幾何学的操作を施した結果を，模型や図を用いずに想像できること．」の「ｃ．二次元のものから三次元のものへ」にあてはまる考え方で，球を回転体としてとらえることで円になる理由がみえてくる．

### ⑵ 「§２．接平面と接線」

「§２．接平面と接線」の内容を以下に示す．

球面と平面とがただ一点で触れているとき，球と平面とは　接する　といい，その点を　接点　その平面を　接平面　という．

問１．球 O と平面 H とが点 A で接するとき，図のように H を水平に置き，中心 O から鉛直線をおろすと，この直線は A を通る．これを証明せよ．

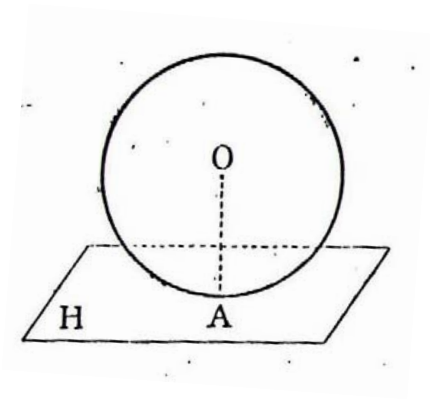



図 3-3-3

問２．球 O と平面 H とが点 A で接するとき，H は半径 OA に垂直である．これを証明せよ．

問３．地球儀を透明体で作ったと仮定し，その中心に光源を置き，北極の接平面にその影を映したとする．このとき経線・緯線はどんな線に映るか．また，任意の大円はどんな線に映るか．

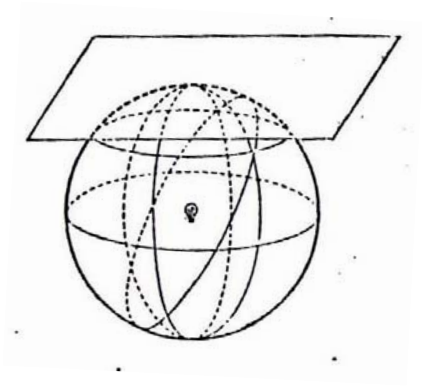


図 3-3-4

一平面の上で，円と直線とがただ一点で触れているとき，円と直線とは　接する　といい，またその点を　接点　その直線を　接線　という．

問４．円 O と直線$s$とがある点 A で接するとき，$s$は半径 OA に垂直である．これを証明せよ．

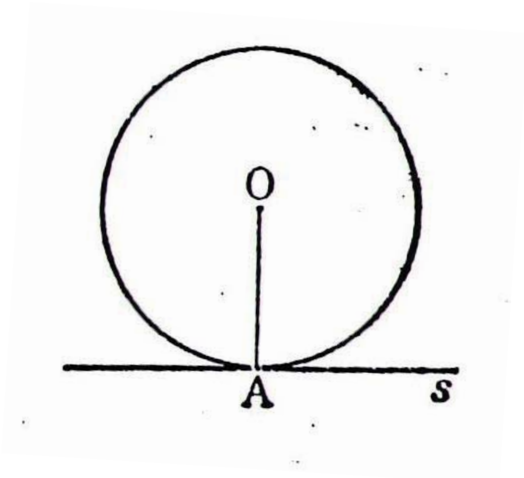



図 3-3-5

「§２．接平面と接線」では，特に問３に注目する．この問の作業を実際に行うと，次の図のような影が現れる．

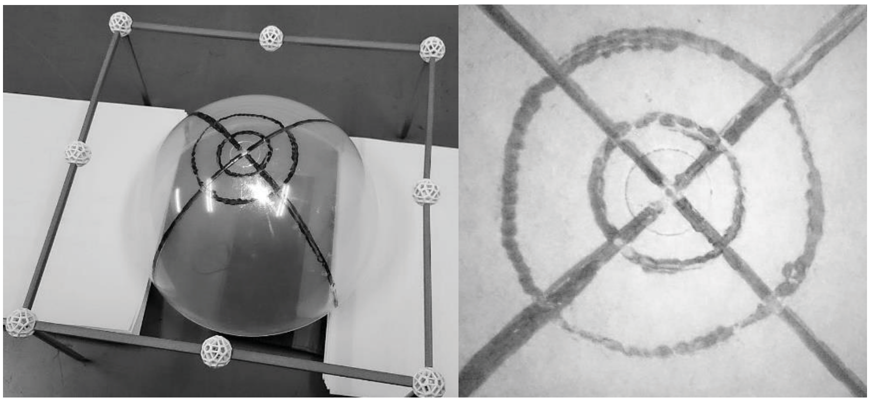


図 3-3-6　問３の様子

『数学編纂趣意書』をみると，問３について「問３の方法で地図を作ることができる．これはあまり用いられないが，心射図法とよばれるものである．」(2 年, p.18)と記されている．この図法については，後の「球面上の図形」の分析で詳しくみることにするが，この段階で心射図法に関する問題について触れ，経線直線として，緯線は円として投影されるのを確認していることがわかる．

### ⑶ 「§３．大円と小円［２］」

「§３．大円と小円［２］」の内容を以下に示す．

次の頁の図は，球面上の二点 A，B を通るいろいろな平面と球面との交わりを示している．

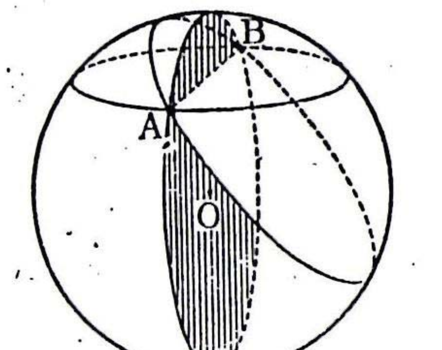



図 3-3-7

球面上で二点 A，B 間の最短路が何であるかを調べよう．

滑らかな球面上の二点 A，B の間に糸を強く張れば，その糸は最短路を通る．

このようにして，最短路は大円の弧であることが大体推定される．

さらに二点 A，B 間の大円弧と小円弧との長さをくらべてみよう．

問１．上の図の大円弧と小円弧とをくらべるには，どうしたらよいか．またその長短を調べよ．

問２．上の図で，直線 AB に垂直な平面を立面図として，A，B を通る大円と小円との立面図を書け．

円 O の内部に点 C がある．C を通る弦 EF が C の周りを回転するとき CE，CF の長さがどう変わるかを調べよう．

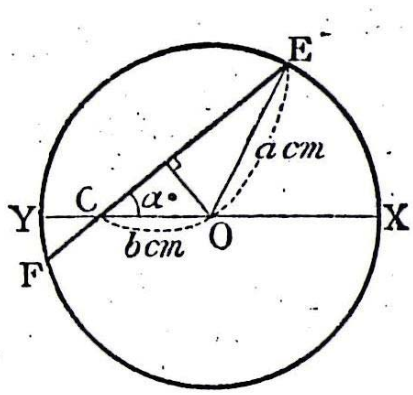



図 3-3-8

問３．次の頁の図で OE= $a$cm，OC= $b$cm，∠OCE= $\alpha$°である．CE，CF の長さを$a$，$b$，$\alpha$で表せ．次に CE，CF の積を作ってみよ．また，$\alpha$が 0°から 90°まで増すとき，CE，CF の長さはどう変わるか．

「§３．大円と小円［２］」について，『数学編纂趣意書』では，「いろいろな方法で大円弧と小円弧との長短を比較し，必然的に平面上の問題に導いて問題を解決する」(2 年，p.11) と記されている．実際に問題をみると，問１で大円弧と小円弧の長短を比較する方法を考えさせたあと，問２では立面図をかいてみるようにつながっている．実際に立面図をかくと次のようになる．

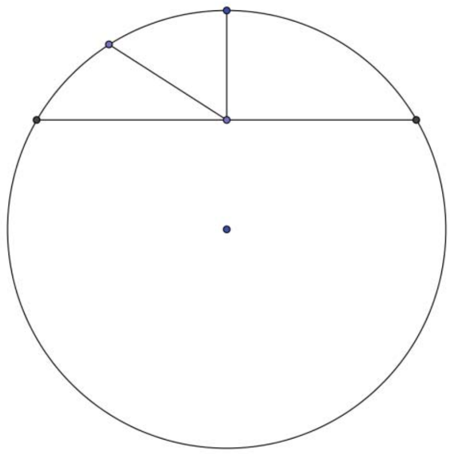


図 3-3-9　問２の立面図

この図から，小円弧が斜めの線で表され，大円弧よりも長くなっていることが視覚的にわかる．このように，平面上の問題導いて解決に向かっていることがわかる．

# 第４節　「球面上の図形」の分析

### (1) 「§１．漸長図」

「§１．漸長図」の内容を以下に示す．

狭い地域の地図を作るには，水平面を書面とし，地形・地物の平面図を作ればよい．

しかし，地域が広くなると，一つの地点における水平面を全部に共通な水平面とみなすことはできないから，地図を作るには工夫がいる．

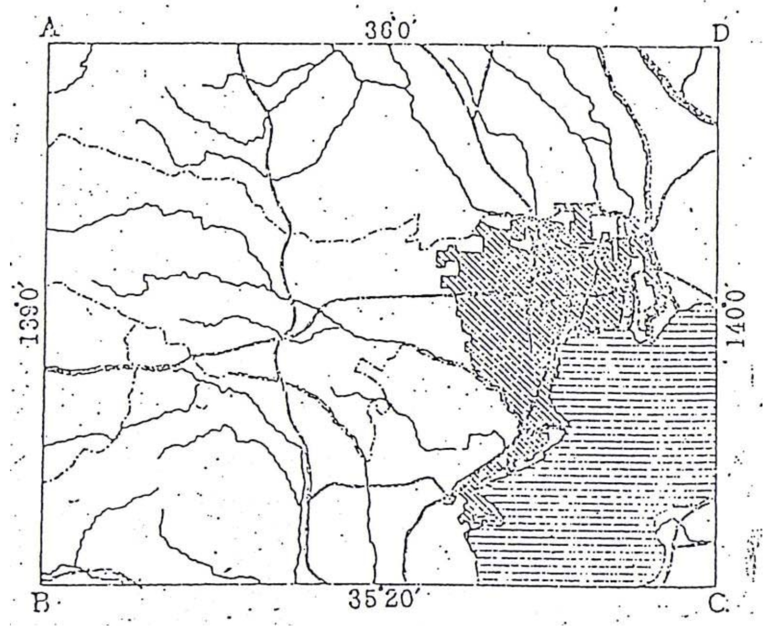



図 3-4-1

陸地測量部発行の 20 万分の 1 の帝国図「東京」は，東経 139 度ないし 140 度，北緯 35 度 20 分ないし 36 度の地域の図である．

このような地図を基にして，大東亜全域もしくは世界全体というような広い地域の地図を作る方法を考えてみよう．

問１．東経 139 度ないし 140 度の 20 万分の 1 の帝国図を，右のように縦に継ぎ合わせると，大体どのような形になるか．また，同様な地図を縦横に継ぎ合わせるとどうなるか．

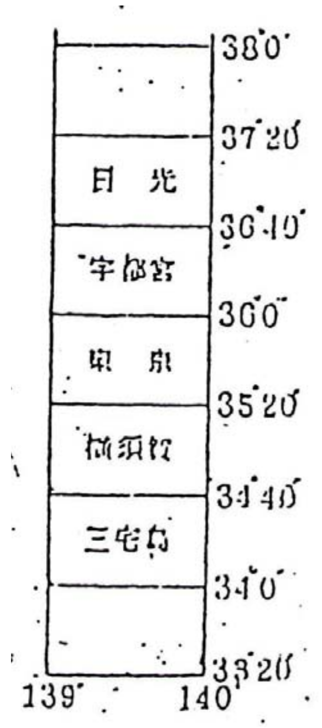



図 3-4-2

問２．上にある地図の周 ABCD を矩形に書き，辺 AB，BC，CD を 20 万分の 1 の縮尺で書くと，AD の長さにはどれ程の誤差ができるか．これを百分率で表せ．また，AD はどれ程の縮尺で書いたことになるかを調べよ．

地球の表面で，東経 130°と 140°との間の部分を 10°ごとの緯線で区切ると，下の図のように球面上の四辺形がいくつかできる．

これらの四辺形をそれぞれ矩形とみなし，その矩形を適当に縮小して底辺を皆等しくする．

次に，これらの各矩形に，その大きさに従って地図を書きこみ，これを継ぎ合せると次の図のような細長い形の地図ができる．

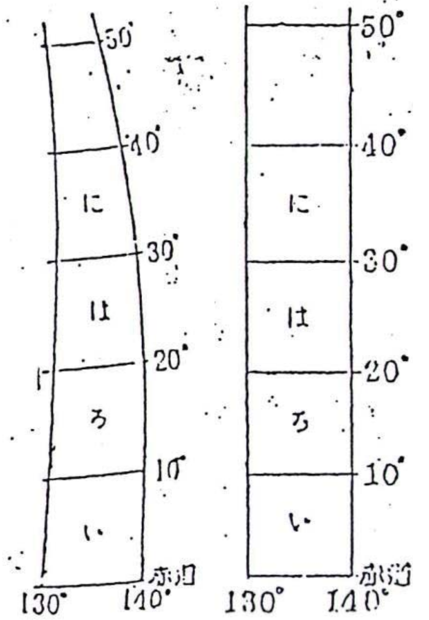



図 3-4-3

問３．この地図で，赤道のところが縮尺 1000 万分の 1 であると，北緯 10°，20°，30°のところでは，それぞれどれ程の縮尺になっているか．また，北緯 10°の緯線は赤道からどれ程の距離のところに引けばよいか．地球の大図で，中心角 1′に対する弧の長さを 1 海里(1852m)として計算せよ．

上の方法で作った地図を　漸長図　という．

問４．下の図は東経 140°ないし 150°，北緯 35°ないし 40°の部分の漸長図である．

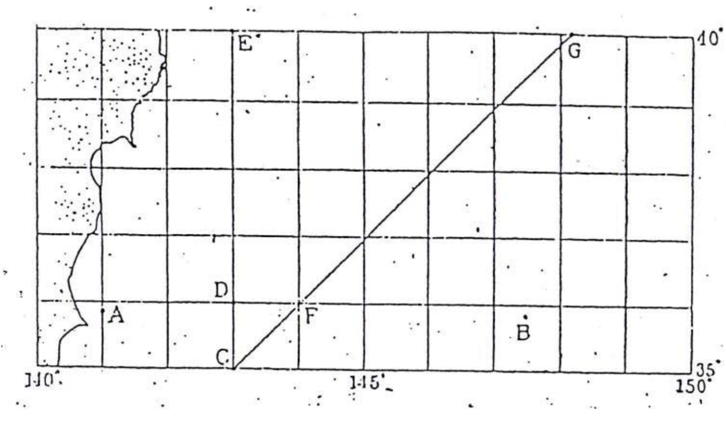



図 3-4-4

次の 2 地点の間を一定の針路で航海するには，船をどの方向に向けて進めればよいか.

(1) A から B まで

(2) C から D まで

(3) C から E まで

(4) C から F まで

(5) C から G まで

問 5．前問でしらべた航路の航程を計算せよ.

漸長図は方位を実際の通りに表す地図である.

問 3 では地球の表面を 10°ごとの緯線で区切って図を作ったのであるが，1°ごと，30′ごとというように，もっと細かく区切って作れば方位は一層正確に表される.

方位を実際の通りに表す地図を　等角図　という.

問 6．漸長図では，地上の長さ面積及び角度はどのように表されるか．平面図とみられる地図とくらべて，その違いを考えよ.

漸長図には全体としての縮尺はないが，その小部分をとれば，大体ある縮尺の図になっている.

ここでは，まず漸長図について扱っている．漸長図とは，いわゆるメルカトル図のことである．ここでは，漸長図の作図にあたる問 2 をさらに詳しくみる．この問について，砂田(2014)を参考に解法を示す.

まず，便宜上赤道（北緯 0°）と北緯 10°のときを考える．図 3-4-5 のように赤道上の二地点を B，C とし，B，C とそれぞれ経度が等しく，緯度が 10°である点をそれぞれ A，D とする．平面図（図 3-4-6）を考える．図 3-4-6 より，地球の中心を O とすると，扇形 OAD と扇形 OBC は，A と B，C と D が，それぞれ経度が同じであるから，中心角が等しいため相似である．次に，断面図（図 3-4-7）から，点 A，D を線分 OB，OC 上に移すことを考える．点 A から，線分 OB に垂線を引き，OB との交点を A’とする．この A’が図 9 の A と一致する点である．今，点 A が北緯 10°より∠AOB=10°である．今地球の半径を 1 とすると，OA=1 である.

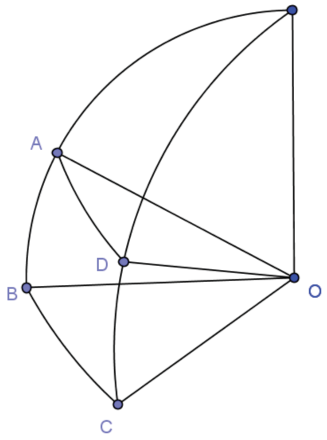



図 3-4-5　地球の一部

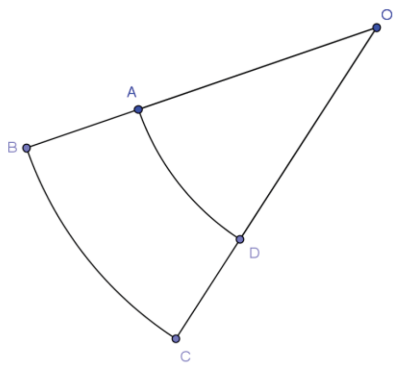



図 3-4-6　平面図

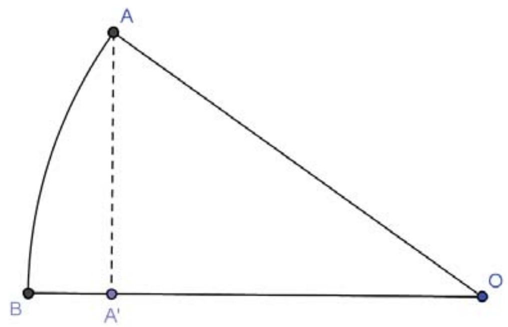



図 3-4-7　断面図

よって，OA'の大きさは

$$\mathrm{OA}' = \mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{AOA}' = 1 \times \cos 10° = \cos 10°$$

となる．ゆえに，図 3-4-7 の結果から，図 3-4-6 において，

$$\mathrm{BC} : \mathrm{AD} = 1 : \cos 10°$$

より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AD}} = \frac{1}{\cos 10°}$$

となる．

　同様の考え方を問 2 に適用させると，

$$\mathrm{BC} : \mathrm{AD} = \cos 36° : \cos 35°20'$$

となるので，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AD}} = \frac{\cos 35°20'}{\cos 36°} \fallingdotseq \frac{0.8158}{0.8090} \fallingdotseq 1.008$$

となる．よって，

$$200000 \div 1.008 = 198412.6 \ldots \fallingdotseq 198400$$

となる．以上より，AD は正しい長さより，0.8％ほど長くなり，198400 分の 1 の縮尺でかいたことになる．

この問の解決過程をみると，図 3-4-5 から図 3-4-6，図 3-4-7 と，与えられた図形から平面図，断面図を作図するといった，投影図の活用によって，解が求められる．断面図については，「立体図形の表現」で触れたように，投影図と同様の作業で得られることから，ここでは立面図と同様に考えてもよい．この問では，与えられた図形を自らみる視点を変え，平面図や断面図といった図を作図することで，解を求めることができる．この事から見取図から平面図や断面図を作図するといった，投影図やその活用の考え方が球面幾何の分析に役立てられていることが明らかとなる．

他の問についてみると，問４，５では，漸長図の性質である等角性を確認する問が設けられている．また問６では，漸長図では保存されない距離や面積についても触れている．これは，問２で緯線が拡大されることを求めていることから，求められるようになっている．

### ⑵ 「§２．中心透視図」

「§２．中心透視図」の内容を以下に示す．

| |
|---|
| 漸長図は方位を正しく表すから，航海や航空に欠くことのできないものである．しかし，大洋を航海したり，遠距離を飛行したりする場合には，なるべく近い航路を見出すために，大円航路の見易い地図が必要になってくる．<br>ここでは大円航路が見易くて，広い地域を表す地図の作り方を考えよう．<br>広い地域の地図を作るには，まず経線・緯線の書き方を定めなければならない．これを定めるのに透視を用いる方法がある．すなわち，地球儀に対し，視点と書面とを適当に選んで，地球儀上の経線と緯線との，透視図を書くのである．<br><br>問１．透視によって大円航路が直線になるような地図を作るには，視点と書面とをどのように定めればよいか．また，経線が直線になるような地図を作るにはどうか．<br><br>問２．直径 10cm の地球儀がある．この北極 N の接平面を書面とし，地球儀の中心 O を視点として，北極から北緯 30′ までの範囲の 2′ おきの経線・緯線の透視図を作れ． |

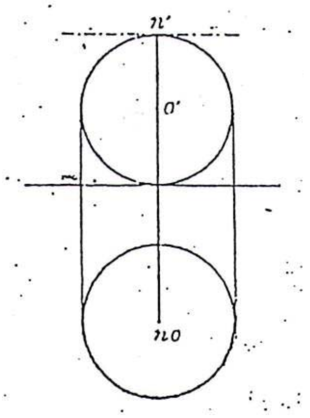


図 3-4-8

視点を地球の中心に起き，透視によって作った地図を　中心透視図　または大圏図　という．また，この地図の作り方を　心射法　ということがある．

次に示すのは，心射法による両極圏である．

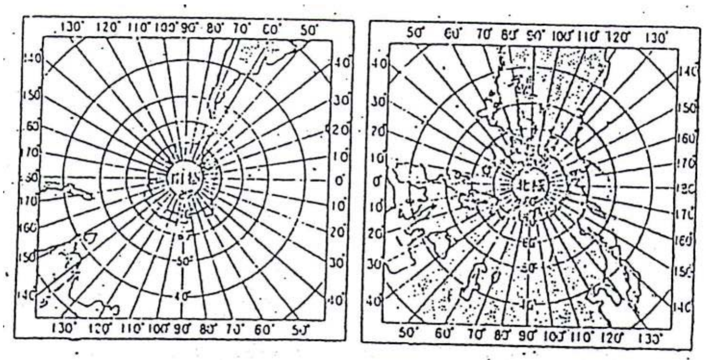


図 3-4-9

汽船が正確に大円航路に沿って進もうとすると，刻々に船の位置を知り，刻々に針路を変えていかなければならない．
それ故，大洋を航海する場合には，中心透視図と漸長図とを併用するのが普通である．
毎日天測などによって船の位置を知り，中心透視図の上で 1 日後に到達すべき地点の位置を定めて，これを漸長図の上に移し，1 日間の針路を定める．このようにして 1 日中は同じ針路で進む．
翌日はまた同じ方法で針路を定めていく．

問３．飛行機で東京からサンフランシスコまで，正確に大円航路上を進もうと

すると，出発のときの進路はどのようにして定めたらよいか.

大円航路に沿って進むときの，経度・緯度と針路との関係を調べよう.

球面上で三つの大円の弧で囲まれる部分を　球面三角形　という.

球面三角形では，一頂点における二辺の接線の作る角の大きさをもって，その頂点における頂角の大きさとする.

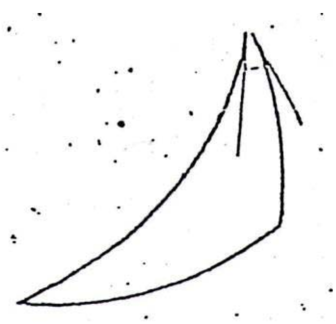


図 3-4-10

問４．一つの大円航路 ABD をとり，赤道との交点を A，D とする．B をこの上の動点とし B を通る経線と赤道との交点を C とする．このときに出来る球面三角形 ABC で，三つの頂角を A，B，C で表すとき，角 C の大きさは何程か．また，航路 ABD を進むとき，A，B における針路を角 A，B を使って表せ.

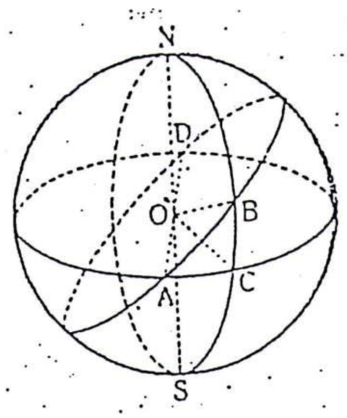



図 3-4-11

上の図で

$$\angle BOC = a,\ \angle COA = b,\ \angle AOB = c$$

とすると，a は B 点の緯度であり，b は A，B 二地点の経度から定まる.

問５．前問の図で，B から OC におろした垂線を BE とし，E から OA におろした垂線を EF とする．角 BFE は頂角 A に等しいことを証明せよ．

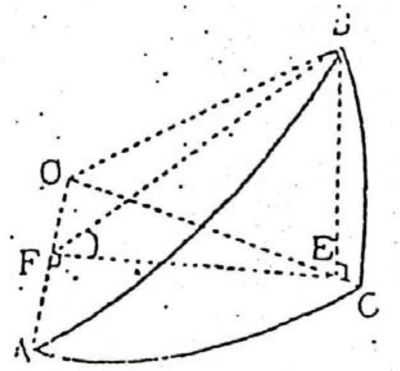



図 3-4-12

問６．上の図で，球の半径を r とする．直線 EF の長さを r，a，b 及び A で表す種々の式を作れ．また，これから a，b，A の間の関係を表す式を導け．A の経度，B の経度・緯度から，B における経路を求める方法を考えよ．

「§２．中心透視図」について，『数学編纂趣意書』4 年「１．立体図形の表現，§６．透視図」では，「透視図は，次章で論ずる地図にも関係がある」(p.11)と述べていることから，透視図との関係をみていく．問２の透視図の作図について，砂田(2015)を参考にすると，次のように作図ができる．

経線は北極を通る直線，すなわち，中心を通る直線となるから，緯線のかき方を考える．この中心透視図で緯線は北極を中心とした円で現れる．そこで緯線をかくためには，半径の大きさがわかればよい．図 3-4-13 は 10°，20°，30°の 3 本の緯線を中心透視図で表したもので，投影図の平面図の部分に現れている．ここでは，北緯 10°の緯線について説明する．まず，立面図に N'O'N₁'＝10°となる点 N₁'を作図する．次に，直線 O N₁'と円 O'の N を通る接線$l$との交点 N₁"を作図する．この 2 点 N' N₁"が中心透視図において北緯 10°の緯線を作図する際の半径となる．よってその長さの半径で円をかいた平面図に中心透視図が表れている．この要領で，2°おきの緯線の透視図がかける．

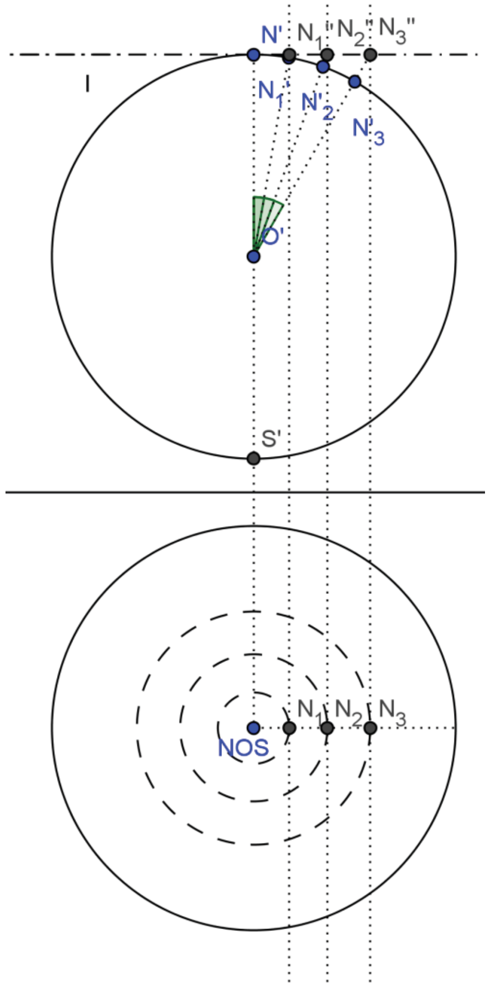


図 3-4-13　中心透視図

砂田(2015)はこの問の特徴について，「透視図の作図の方法で，中心透視図が作図できる点」(p.441)であると述べている．田中(1939)は，図学と地図投影法について密接な関係があると述べていた．中心透視図は，透視図と同様に投影図から作図することができることから，投影図を道具として活用することで，中心透視図が作図できるようになっていたことがわかる．

問 6 について，砂田(2014)を参考にすると，次のように解決することができる．

・三角形 BOE から

$$\mathrm{OE} = \mathrm{OBcosa} \quad \cdots ① \qquad \mathrm{BE} = \mathrm{OBsina} \quad \cdots ②$$

・三角形 OFE から

$$\mathrm{OF} = \mathrm{OEcosb} \quad \cdots ③ \qquad \mathrm{EF} = \mathrm{OEsinb} \quad \cdots ④$$

・三角形 BFE から

$$\mathrm{BF} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{sinA}} \quad \cdots ⑤ \qquad \mathrm{EF} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{tanA}} \quad \cdots ⑥$$

・三角形 BOF から

$$\mathrm{BF} = \mathrm{OBsinc} \quad \cdots⑦ \qquad \mathrm{OF} = \mathrm{OBcosc} \quad \cdots⑧$$

以上から，EF の長さは

$$\mathrm{EF} = \mathrm{OEsinb} = \mathrm{OBcosasinb} = \mathrm{rcosasinb} \quad \cdots⑨$$

$$= \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{tanA}} = \frac{\mathrm{OBsina}}{\mathrm{tanA}} = \frac{\mathrm{rsina}}{\mathrm{tanA}} \quad \cdots⑩$$

また，⑧と⑤より　$\mathrm{BE} = \mathrm{OBsincsinA}$

よって⑩より

$$\mathrm{EF} = \frac{\mathrm{OBsincsinA}}{\mathrm{tanA}} = \mathrm{rsinccosA} \quad \cdots⑪$$

さらに，⑧と三角形 OEF から

$$\mathrm{EF} = \mathrm{OFtanb} = \mathrm{rcosctanb} \quad \cdots⑫$$

この結果から，

⑩，⑪より　$\dfrac{\mathrm{rsina}}{\mathrm{tanA}} = \mathrm{rsinccosA} \quad \therefore \mathrm{sinA} = \dfrac{\mathrm{sina}}{\mathrm{sinc}}$

⑪，⑫より　$\mathrm{rsinccosA} = \mathrm{rcosctanb} \quad \therefore \mathrm{cosA} = \dfrac{\mathrm{tanb}}{\mathrm{tanc}}$

⑨，⑩より　$\mathrm{rcosasinb} = \dfrac{\mathrm{rsina}}{\mathrm{tanA}} \quad \therefore \mathrm{tanA} = \dfrac{\mathrm{tana}}{\mathrm{sinb}}$

中心透視図から球面三角形について考え，最後には球面三角形の三角比の公式を導くまでに至っていることがわかる．これは，球面上の三角形における球面三角法を導く際に，重要な図形の見方につながると考える．

### (3) 「§３．円柱正積図」

「§３．円柱正積図」の内容を以下に示す．

> 平面図とみられる地図では，長さ・面積及び角は正しく表されている．言いかえれば，地上で等しい長さや面積は，円上でも等しく表されるし，地上の角は，そのままの大きさで表される．
>
> 広い地域の地図には，長さを正しく表すものはないが，角を正しく表すものに漸長図がある．
>
> ここでは，面積を正しく表すものを考案しよう．
>
> このような地図を　正積図　という．

問１．等間隔な平行線で経線を表し，緯線をこれに垂直に引くことにして，右の図のい，ろ，はのような矩形の面積が実際の面積に比例するように作ろうと思う．緯線をどうのように引けばよいかを考えよ．ただし，経線と緯線で囲まれる球面四辺形を矩形とみなしてよいものとする．

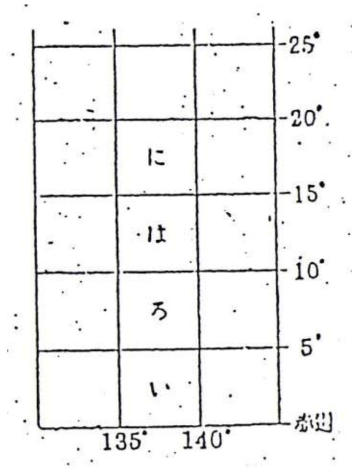



図 3-4-14

問２．上のような方法で作った地図は，正積図であるといってよいか．すなわち，どのような形の土地でも，面積の等しいものは円上でも等しく現れるかどうか．

問３．問１の方法でなるべく正確な正積図を作るには，どのようにすればよいか．

次に，球面上の面積について詳しく調べよう．
円弧が一つの直径を軸として回転するときに出来る面を　球帯　という．

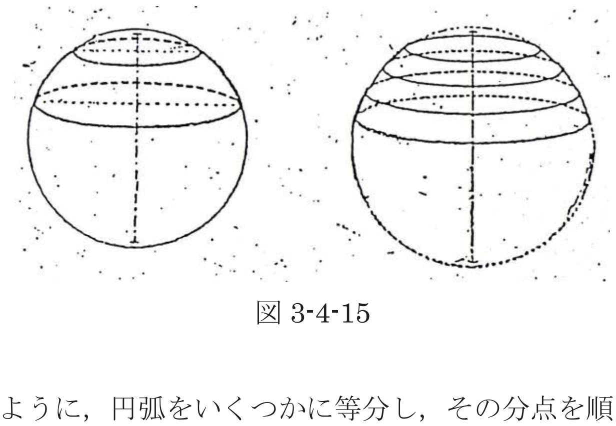


図 3-4-15

右の図に示すように，円弧をいくつかに等分し，その分点を順に結ぶと一つの

折れ線ができる．この折れ線を直径のまわりに回転させると，直円錐台を積み重ねた形の立体が得られる．まず，この立体の側面積の求め方を調べよう．

右の図で，AB，XY を一平面上の二直線とし，C を AB の中点とする．

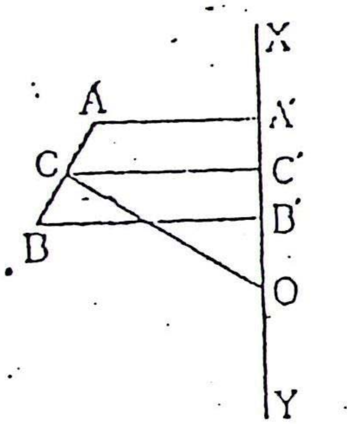



図 3-4-16

A，B，C から XY におろした垂線を AA'，BB'，CC'とし，C における AB の垂線と XY との交点を O とする．

問４．AB の回転によってできる直円錐台の側面積は，AB と CC'との積に比例する．また，A'B'と CO との積にも比例する．これを証明せよ．

問５．上の結果を用いて，前の図に示した折れ線の回転によってできる立体と等しい側面積を有する直円柱の作り方を考えよ．

問６．前問の折れ線を作るとき，円弧の分け方を次第に細かくしていくと，前問で考えた直円柱はどのように変わるかを考えよ．また，その結果から球体の面積を表す公式を作れ．

問７．球面上の面積を正しく直円柱の上に移す方法を工夫せよ．

次に，正積図の作り方を考察せよ．

問８．問１及び問７で作った二種の正積図には，どのような関係があるか．

問１及び問７で作った地図を　円柱正積図　という．

「§３．円柱正積図」では，等積になる地図を作る方法を考えている．例えば，問１では「§１．漸長図」と似た図で，正積図を考えようとしている．「§１．漸長図」問２より，緯度が高くなればなるほど，緯線の長さが拡大される．そこで，経線をその分短くすることで，正積図が作図される．

問６についてみると，図 3-4-16 から，CO が水平になるように動かすと，CO が円柱の底面の半径になることがわかる．同様に，円柱の高さは 2CO となるから，ここで考える円柱の側面積は

$$\mathrm{S} = 2\mathrm{CO} \times \pi \times 2\mathrm{CO} = 4\pi\,\mathrm{CO}^2$$

となる．ここで，$\mathrm{CO} = r$とおくと

$$\mathrm{S} = 4\pi r^2$$

となる．円柱正積図の考え方から，球の表面積の公式を求めることができる．

## 第５節　『数学　第二類』における球面幾何への教材構成の特徴について

前節における球面幾何に関する教材の内容から,「漸長図」,「中心透視図」に焦点を当てて教材構成の特徴をまとめる.

「漸長図」では，図 3-5-1 のように地球の一部について断面図を作成したり，平面図を作図したりし，漸長図について分析をすすめた.

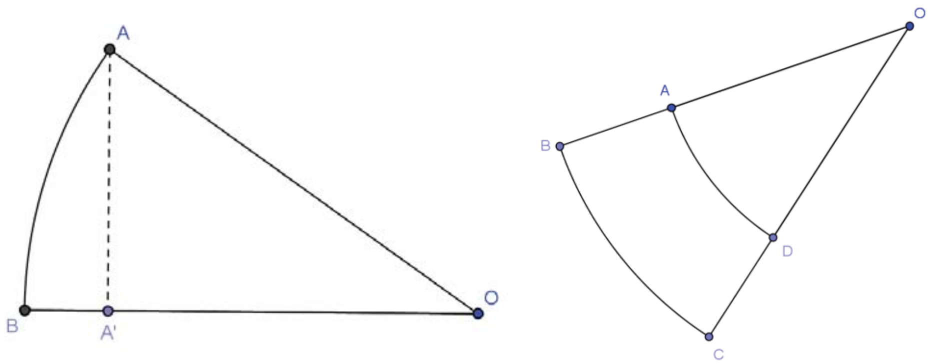



図 3-5-1　断面図と平面図

これまでの内容をみると，4 年「1．立体図形の表現」の「§３．断面図」の「問３．右の投影図で，正四角柱を平面で切った切り口の実形を求めよ.」で，断面図を投影図を用いて作図する活動を行っている．投影図を用いて，立体の内部を分析する活動を既習として行っていたことが,「漸長図」の性質を理解することにつながっていると考える.

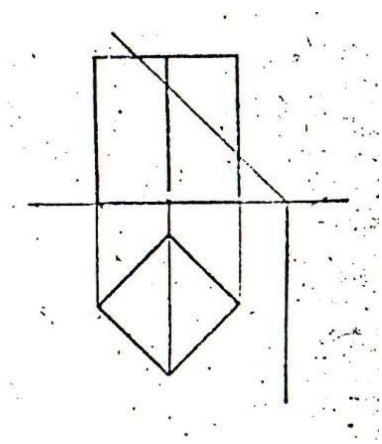


図 3-5-2　図 3-2-15 の再掲

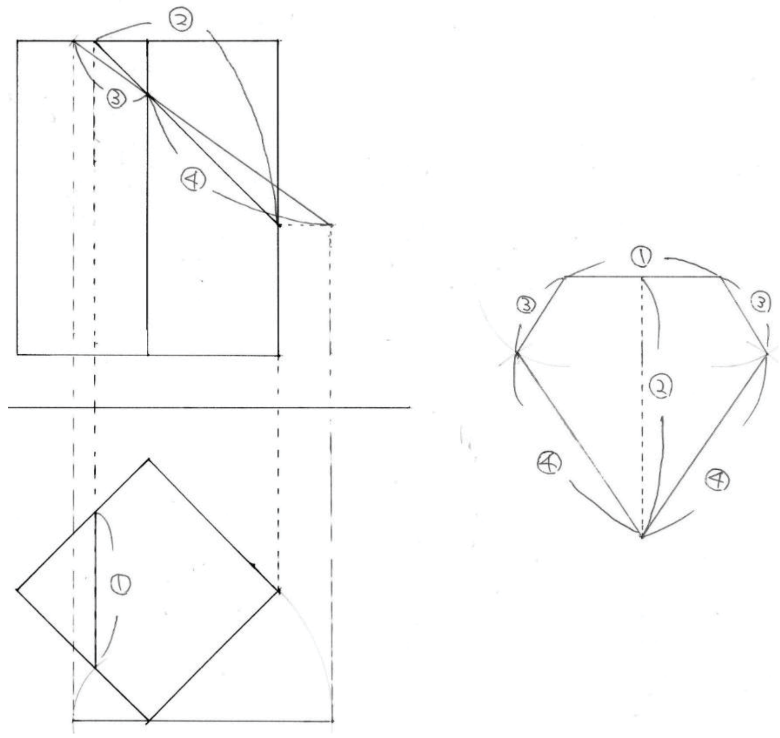



図 3-5-3　図 3-2-16 の再掲

同様に，平面図に表わすことは，これまでの既習内容でもよくみられた活動である．様々な視点の位置から立体を観察し，平面に表すことが求められている．この点については次節で触れる．

次に，「中心透視図」について，透視図との関連をみていく．透視図の作図法を振り返ると，図 3-5-4 より投影図から透視図が作図された．この投影図について，平面図では，基線が画面となり，基線の上側に立体の平面図が表されていた．

筆者は中心透視図の作図を図 3-5-5 のように基線が画面と一致しない投影図を作図し，その投影図から中心透視図を作図した．しかし，図 3-5-4 の透視図の活動を活用し，基線と画面が一致する投影図を作図すると，図 3-5-6 のようになる．この図では，基線の上に平面図（緯線のみ作図されたもの）が表され，平面図と基線の交点が北極である．また，球を直角投影すると円となり，立面図を基線の上に描くと平面図と一致することから，図 3-5-6 では立面図（経緯線が作図されたもの）を基線の下に表わしている．図 3-5-5 と図 3-5-6 は表しているものは同じため，以降の中心透視図の作図は同じだが，地球をみる視点の位置が異なるため，投影図が異なる．地球の位置をみる視点を変えることで，透視図の内容が中心透視図に生きてくることがわかる．

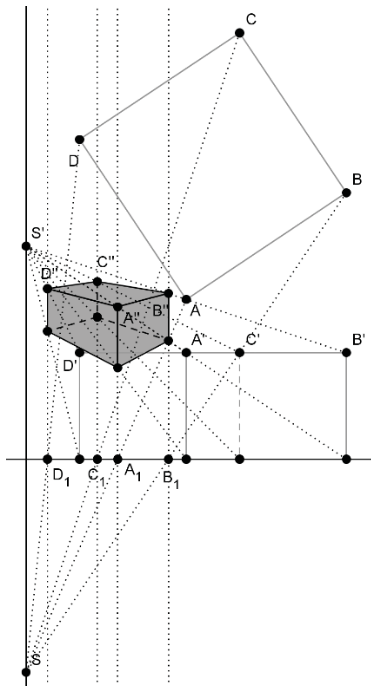


図 3-5-4　図 3-2-32 の再掲

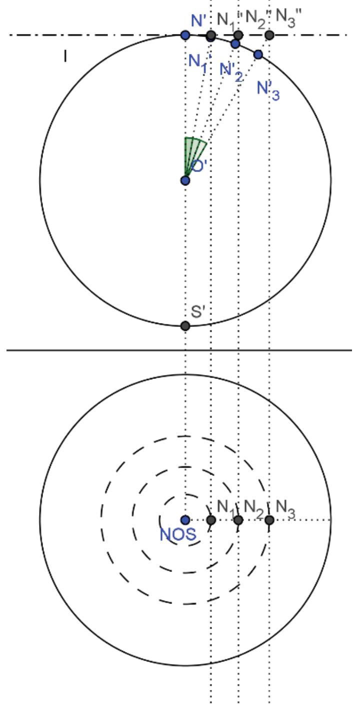


図 3-5-5　図 3-4-13 の再掲

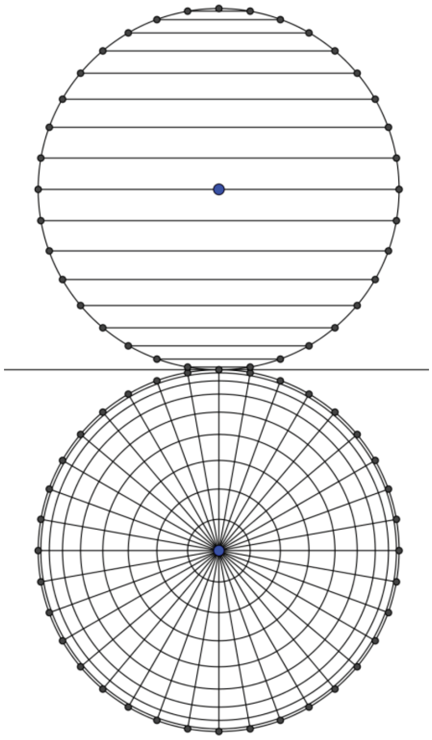


図 3-5-6　地球の投影図

# 第６節　『数学　第二類』における平行投影及び中心投影と球面幾何教材の特徴

## （１）　「空間の想像力」と平行投影及び中心投影

まず,「空間の想像力」と平行投影，中心投影について，１年「図形の書き方」と４年「立体図形の表現」を比較する．２つの節において，扱われている，または提示されている図を順に述べると，次のようになる．

表 3-5-1　扱われている図

| １年「図形の書き方」 | ４年「立体図形の表現」 |
|---|---|
| ・透視図<br>・軸測投影図<br>・正投影図<br>・斜投影（見取図） | ・正投影図<br>・軸測投影図<br>・透視図 |

このほかに，両者ともに斜投影とみられる見取図はいくつかあったが，確実かどうか判断できなかったため，4 年の方には記載しなかった．よって，両者ともに扱われている図に大きな違いはないと判断できる．しかし，その扱い方には大きな違いがある．

１年「図形の書き方」では，先に図を示したり，視点を指定された位置から立体をみたときの見取図を作図したりするなど，教科書による誘導がはっきりとしている．一方で，4 年「立体図形の表現」では，見取図のみが示された状態で投影図を作図するが多く，節の後半では,「投影の方向が画面に垂直でない図法を考えよう」(4 年，p.20)のように，別な視点から立体をみたときの，正確な作図の方法についてまで踏み込まれている．透視図についても，1 年では示されたのみであったが，４年ではその作図についてまで踏み込んでいる．４年になると，作図の種類を増やし，正確な方法を身に付けるようになっている．

４年「球面上の図形」をみると,「§１．漸長図」の問２では，地球に対して，視点を真上や正面からみることで，漸長図について分析していた基礎．立体を自ら決めた視点からみて，平行投影及び中心投影を用いて作図を行っている．このように,『数学　第二類』の問の中に「空間の想像力」さらには平行投影，中心投影を用いた教材が含まれていることがわかる．

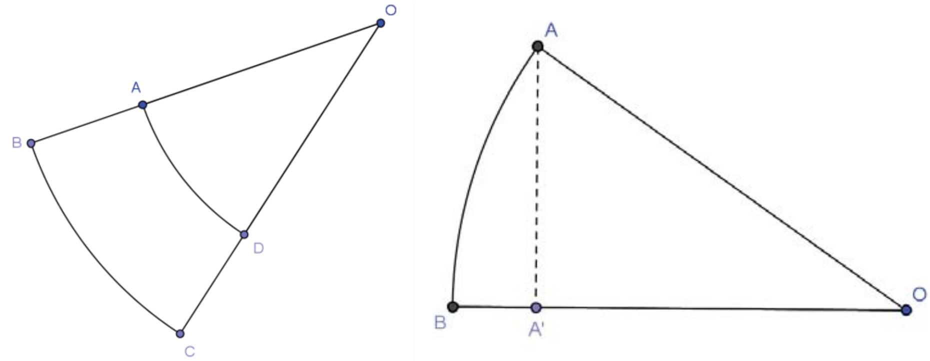



図 3-6-1　地球の平面図と断面図（図 3-4-6，図 3-4-7）

## （2）　「地図投影法」について

次に「地図投影法」について，上で述べたように，地図を作図，分析するために平行投影及び中心投影を用いていたことがわかる．中心透視図についても，下の図を作図することで地図を作ることができたが，そこで用いたのは投影図であった．田中良運(1939)が地図投影法を用器画の教材として扱うことを述べていたが，まさしくそのような構成になっていた．

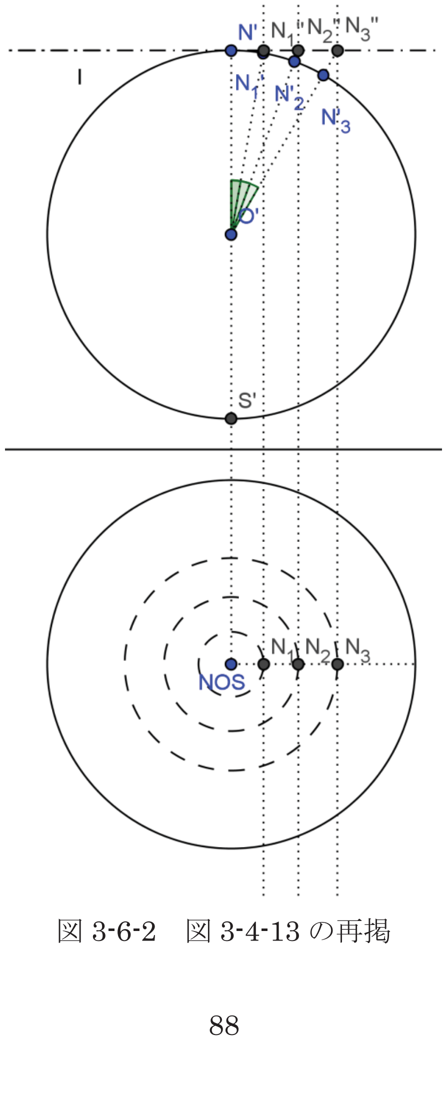



図 3-6-2　図 3-4-13 の再掲

Westaway は, 地図を作成することについて, 経緯線がどのようにかけるかということと, 異なった目的に対して多くの投影法を考案しなければならないことを述べていた．経緯線の投影については，2 年「円と球」で球の中心から極の節平面に対して，どのように投影されるのかを調べ，4 年でより正確な作図の仕方を考えていた．異なる地図投影法を考案することについては，教科書内の記述から，必要に応じて考えることが求められていることがわかる．

「漸長図は方位を正しく表すから，航海や航空に欠くことのできないものである．しかし，大洋を航海したり，遠距離を飛行したりする場合には，なるべく近い航路を見出すために，大円航路の見易い地図が必要になってくる．

ここでは大円航路が見易くて, 広い地域を表す地図の作り方を考えよう.」(4 年, p.40)

さらに，漸長図と中心透視図の扱いを比較する．

漸長図では，図 3-5-1 のように，遠い宇宙から地球をみたようなところに視点を定め，平行投影によって作図がなされている．一方中心透視図では，地球の中心に視点をおき，接平面に投影した地図を考える．地球の内部は有限であること，また，2 年「円と球」で，中心透視図の様子を 1 度経験していることから，自ずと透視図を考えることになる．地球を外部と内部それぞれからみることによって，違う地図が作図される．

# 第４章

# 『数学　第二類』における球面幾何教材の今日的意義

### 本章の意図と構成

本章の意図は，『数学　第二類』の平行投影及び中心投影を活用した地図投影法の教材内容に関する分析を踏まえ，『数学　第二類』における球面幾何教材の今日的な意義を明らかにすることである．

第１節では，現在の数学教育において実践されている，球面幾何に関する先行研究の分析を行い，教材の特徴を明らかにする．

第２節では，第３章で得た『数学　第二類』における球面幾何に関する教材の特徴と，本章第１節で得た教材の特徴とを比較，整理し，『数学　第二類』における球面幾何教材の今日的な意義を明らかにする．

## 第１節　今日における球面幾何に関する授業実践の分析

### (1) 滝沢昌弘による授業実践

滝沢(1998)は，次の2つをねらいとして授業実践を行った．

> 「(1)　数学の理論と現実の事象との間につながりをもたせる．
> (2)　生徒にとって身近な材料である地図をとりあげることによって，数学が“数学以外のところ”で応用され活用されていることを理解させ，数学の有用性を認識させる．」(p.17)

滝沢は，「地図には多くの図法があり，地図を作成するときには三角関数をはじめ，多くの数学が用いられている」(p.17)こと，「地球を完全な球とみなせば，大部分の図法について高校以下の数学を用いて説明することが可能である」(p.17)に着目し，次の授業を考案した．

> 「そこで，陸地と海の境界線上の各点の経度と緯度を，データとしてパソコンに記憶させておいて，それらに式によって変換を施し，さまざまな図法の地図をディスプレイに描くプログラムを考えてみた．そしてパソコンによって各図法の地図をみせるとともに，各図法において数学がどのような形で使われているのかを指導してみた．」(p.17)

滝沢は，プログラムを立ち上げると，図4-1の経度と緯度が垂直かつ等間隔に並んでいる地図が表示されるようにし，経度$\alpha$，緯度$\beta$の座標を$(\alpha, \beta)$と考え，$(\alpha, \beta)$に対して変換を施していくプログラムを考えている．ここで，経度については東経をプラス，西経についてはマイナスとし，緯度については北緯をプラス，南緯をマイナスとしている．

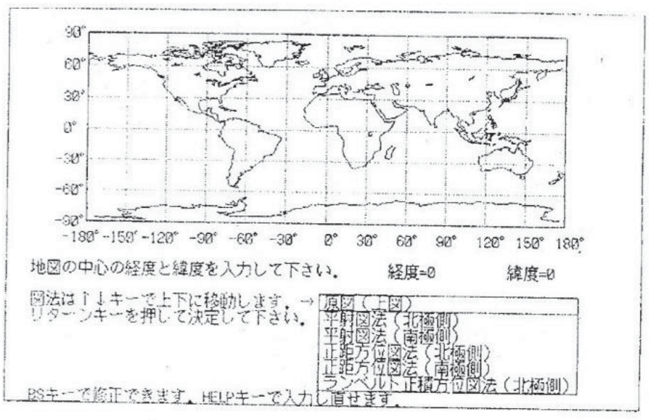



図4-1-1　原図

このプログラムで，図法のメニューを表示すると，原図(図1)，平射図法，正距方位図法，ランベルト正積方位図法，心射図法，サンソン図法，透視円錐図法，単円錐図法，ボンヌ図法，式入力が選択できるようになる．その構造について滝沢は一部を紹介している．その中の透視円筒図法を例に，このプログラムの構造を以下に示す．

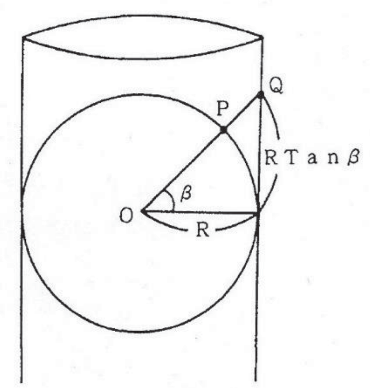



図4-1-2　透視円筒図法の様子

図4-2は，滝沢が示している透視円筒図法の様子である．以下滝沢による説明である．

「球面を円筒で囲み，球の中心Oから直線を伸ばすと，球面との交点Pと円筒との交点Qができる．PをQに対応させて，この円筒の側面を伸ばすと，透視円筒図法が得られる．

変換式は次の通りである．

$(\alpha,\ \beta) = (R\alpha,\ R\tan\beta)$」(p.221)

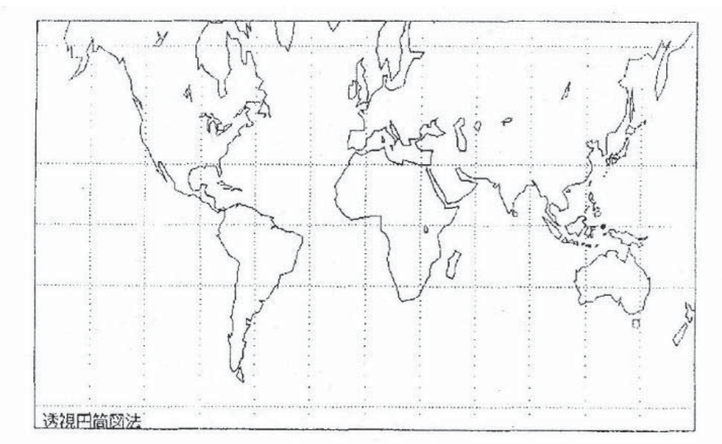



図4-1-3　透視円筒図法による地図

$\alpha$，$\beta$の単位をラジアンとすると，$\alpha$に対応する点は，赤道上の東経0°からPと同経度までの距離を表すので$R\alpha$，$\beta$に対応する点は図4-2の関係から，$R\tan\beta$と表される．このような

変換式により，滝沢は上記の地図を作製した．

次に，実際の授業について整理していく．

滝沢はこの教材を使って，数学Ⅲの関数のところまで学習が済んでいる，高校2年生45名を対象に授業を行った．滝沢は，図法の説明に2時間，パソコンの実習に1時間かけ，いくつかの図法について数学がどのように用いられたかを説明し，パソコンの実習では，学習した図法を選択し，どんな地図になるかを確かめたり，式入力を選択して，前述した図法の変換式のほかに，生徒自らが様々な変換式を入力して，オリジナルな図法を楽しませたりした．

最後に滝沢は，この指導で，普段数学にあまり積極的でない生徒でさえも自発的に取り組んだことを感じ，地図に興味をもっている生徒がいきいきと授業に取り組んだ光景を目の当たりにし，生徒が数学の世界に自然に引き込まれていくのをみて，応用数学の素晴らしさを改めて認識した，とまとめている．

### (2) 野沢和弘，小林徹也による授業実践

野沢，小林(2005)は，「「数学的活動の楽しさ」や「文化や社会生活において数学が果たしている役割」に着目し，生徒が自ら実際に体験し，その実感を通して考える授業を実践することで，生徒が興味・関心を持って活動し，数学観の変容を促す」，「生徒が原典を人の文化的営みを記したものとし，原典を解釈するとともに，原典に載せられた数学的道具を用いて異文化体験するならば，人の営みとして数学を見ることができる」(p.162)という2つのことを考えた．そこで野沢，小林は，文化や社会生活に即している事物ということで，天井に絵画を描く作図器について載せたヴィニョーラの書いた原典を扱い，天井画作図器と数学的なつながりから，円筒図法の地図である透視円筒図法と，滝沢(1998)が「我々が日常最も目にするもの」(p.19)と述べるメルカトル図法を扱うことにした．野沢，小林の研究では，「地図と数学の関連から，数学的活動を行うことで，興味・関心を持つような活動を促し，「文化や社会生活において数学が果たしている役割」を理解できる授業」(p.163)を実践している．

野沢，小林の研究の目的は以下の通りである．

> 「ヴィニョーラの原典の解釈，その原点の中で紹介されている天井画作図器（道具）の使用による異文化体験ならびに，地図と三角関数等の数学との関連の学習から，興味関心を一層喚起し，数学観の変容が授業内で達成することができるかを考察する．」(p.163)

野沢，小林の教材は次の通りである．

野沢，小林は図4-4の原典に載せられた道具を用いた作図を考えている．この道具につい

て次の説明をしている.

「丸い台GHSIの真ん中にある点Aを中心とし，棒AEを軸とする．棒ETと棒DFは，棒AEに交差し，常に平行に保たれている．AEの頂上にある棒ETは，平面に照準を合わせている．もう一方の棒DFは，曲面（円筒）に照準を合わせてある．棒ETの指す平面上の点から，棒DFの指す円筒上の点へと点を置き換えることができるしくみになっている．このとき，軸である棒AEを回転させるとともに，棒ETと棒DFの両方を平行に保ちながら動かす操作を行い，平面上の像をなぞると，円筒上に像を置き換えることができる．このとき，点Eから平面の像を眺めたときと，軸AEと棒DFの交点から曲面に描いた像を眺めたときを見比べると，全く同じ形に見ることができる．」(p.164)

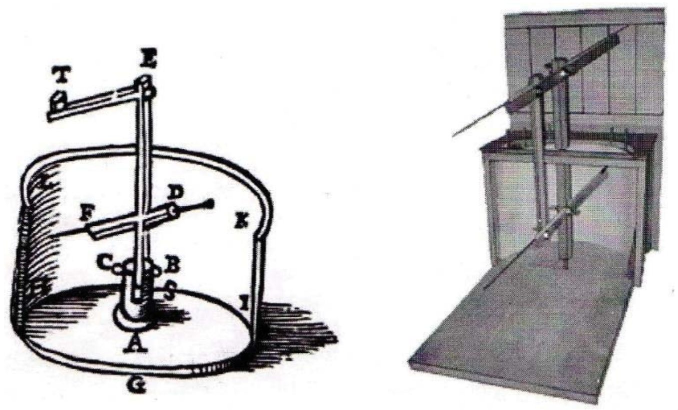


図4-1-4　原典に載せられた道具と作成した道具

この道具によって描かれた図について，この道具を真上からみた図を分析することで，その曲率の変化を調べている.

「Cを中心とする円は円筒であり，辺SRは平面を示している．このとき，点Cを頂点とする角はすべて同じ大きさとなっている．つまり，円柱と平面が離れるほど，像の拡大率は大きくなる．」(p.164)

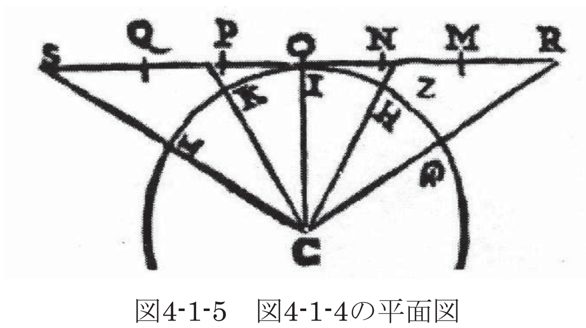


図4-1-5　図4-1-4の平面図

「図5（本論文では図4-1-6）のように，円の半径を1とする．等しい角の大きさを30°とする．このとき，$\mathrm{ST}:\mathrm{TO}$を考える．$\angle\mathrm{TCO}=30°$，$\mathrm{CO}=1$より，

$$\tan\angle\mathrm{TCO}=\frac{\mathrm{TO}}{\mathrm{CO}}$$

ゆえに，

$$\mathrm{TO}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\angle\mathrm{SCO}=60°$，$\mathrm{CO}=1$より，

$$\tan\angle\mathrm{SCO}=\sqrt{3}$$

$$\mathrm{ST}=\mathrm{SO}-\mathrm{TO}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

以上から，$\mathrm{ST}:\mathrm{TO}=2:1$」(p.164，括弧内は引用者)

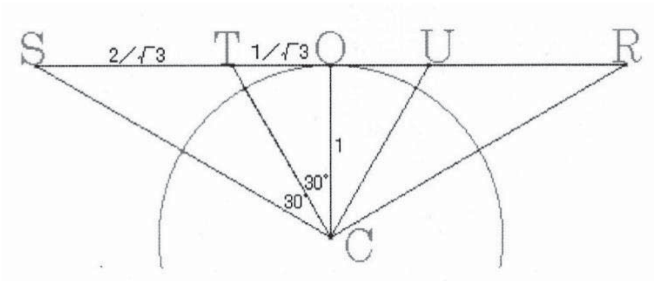



図4-1-6　図4-1-5に数値を書き加えた図

ここで，野沢，小林は「天井画作図器では，平面から円筒状の曲面に像を移すことを考えたが，反対に円筒状の曲面から平面に像を移す場合を考えると，地図投影法の一種である透視円筒図法に非常に似ている．」(p.165)と判断している．

そこで野沢，小林は，生徒に透視円筒図法によって描かれた地図を考えさせている．そして，透視円筒図法によって描かれた地図と形の似たメルカトル図との違いを，数学的に分析させている．

授業の実際は次の通りである．

対象は，数学Ⅱ「三角関数」を既習としている県立高校2年生43人で，45分×3回の授業を行った．各時間の目標は以下の通りである

＜1時間目＞

「「天井画は，どのように描かれているのか」という問題提起に対して，ヴィニョーラの原典の挿絵を解釈することで，道具の操作や仕組みという「異文化」を体験し，実際にその道具を用い，操作し作図するという数学的活動をす

ることで，数学に対する興味関心を高める．また，原典の数学的な考えが，地図の性質と関連していることを認識する．」(p.164)

＜2時間目＞

「透視円筒図法の作図という数学的な活動を通して，地図は三次元の球体である地図を，二次元である平面に映すことを知る．また，地図化にするには，数学が関わっていることを通し，数学の有用性を理解する．」(p.168)

＜3時間目＞

「メルカトル図法は，等角性を保つために緯線経線の縮尺を訂正していることによる緯線経線の拡大の倍率を，2時間目に学習した透視円筒図法の緯線経線の拡大倍率と比較することで，数学的な違いを理解することができる．また，地図には数学が大きく関わっていることを理解する．」(p.169)

1時間目で天井画作図器について，実際に扱って作図をし，その見え方や特徴を見出し，原典に載せられていた道具について分析をしていた．その流れから地図の作図へとつながり，2時間目では透視円筒図法について学習した．3時間目ではメルカトル図法を学び，透視円筒図法とメルカトル図法の違いについて分析した．

野沢，小林は最後に，「ヴィニョーラの原典の解釈と，天井画作図器の数学的な操作を行うことによって，人の営みとして数学をとらえることができた」，「地図という身近な事象が数学と関係し，生活に果たしている役割があることを理解できた」，「数学への興味関心を喚起することができ，さらには数学観の変容を促すことができた」(p.172)とまとめている．

### (3) 中村稔による授業実践

中村(2006)は，野沢，小林(2005)の研究報告から，「球面上の世界の数学を扱う活動を行うことで，生徒が三角法を「具体的な事象の考察への活用できる」ようになる」(p.193)と考え，球面三角法を題材とした授業を行い，生徒の数学観の変容を考察する研究を行った．

研究目的は以下の通りである．

「地球儀を用いた球面三角形の考察，および地球儀上の距離計算を行う活動を通して，数学的な見方や考え方のよさを認識し，数学観の変容が授業内で達成することができるかを考察する．」(p.193)

中村は，球面三角法に関する教材を作成するにあたって，「球面上の距離計算という具体的な授業の到達目標」を定め，「球面三角法を具体的な問題に応用することにより，三

角法の有用性をより実感しやすくなる」(p.194)と考えた．また，中村は「（球面に代表される非ユークリッド空間など）普段と違う空間で数学を考えることにより，物事の見方・考え方が広がる」と考えている．

授業の実際については，次の通りである．

授業は，県立高校2年生を対象に，65分×3回で行われた．各時間の授業目標と活動内容は以下の通りである．

「＜1時間目＞

【授業目標】

球面幾何の基本的概念である大円について，地球儀を使って体験的に理解するとともに，歴史原典の定義を用いて大円の概念を検討し，球面上の最短距離について理解する．また，同経度上の2地点間の距離を計算する．

【学習活動】

① 「東京とニューヨークの最短距離を地球儀を使って考える」

② 「『大円』とは何かを，歴史原典に基づいて検討する」

③ 「明石・コロール間の距離を計算する」

＜2時間目＞

【授業目標】

地球儀上の任意の2地点間の距離の計算方法について考える．またその準備として長さと角度の関係，球面余弦定理について理解する．

【学習活動】

① 「球面余弦定理を証明する」

② 「東京・ロンドン間の距離を計算する」

＜3時間目＞

【授業目標】

三角形の合同条件を正弦・余弦定理によって検討する．また，この手法の応用として，球面三角形の合同条件を球面正弦・余弦定理から導き出すことにより，三角形の有用性を実感する．

【学習活動】

① 「平面三角形の合同条件を検討する」

② 「球面三角形の合同条件を検討する」」(pp.196-199)

中村は最後に，「実際に地球儀を使っての大円の概念の確認，球面三角法を応用した距離計算を行ったことで，生徒は球面幾何を体験的に理解するとともに，球面幾何学の必要

性を認識したことが確認できた」，「生徒の数学観に変容があったことが確認できた」，「普段と違った内容やテクノロジーを用いた授業を行うことで，生徒はより興味を持って授業に取り組むことができた」(pp.200-201)と述べている．

### (4) 佐々木陽平による授業実践

佐々木陽平(2015)は「公理的構成の扱いについて明らかにし，現代の論証指導への改善に活かすべき」(p.98)であると考え，「現代の論証指導を改善するべく，公理的構成の扱いを明らかにし，それに基づいて公理的構成について指導するための教材を開発し，その価値を明らかにすること」を目的として研究を行った．その教材について，具体的な問題を佐々木は「球面上に正方形を作図できるか」とした．その理由は次の通りである．

> 「一方，ユークリッド幾何における初等的な定理が既知ならば，その定理を保証する公理系を求める動機づけをしなければならない．本研究では，その動機付けをするための題材として非ユークリッド幾何に着目する．なぜなら，ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何には共通の公理系と対立する公理系があり，これによって平面における定理について，定理の前提を観点にして定理を整理する必要が出てくると考えるからである．（中略）定義について指導する題材としては三角形で十分であるが，公理的構成の理解をねらう題材としては三角形では十分でないと考える．なぜなら定義に基づいて考えることができれば，三角形の存在はすぐに示せるからである．大事なことは公理を求め公理に基づいて理論を構成することである．つまり，定義に基づいて考えてもその図形が存在するかどうかすぐにわからない題材がよい．そこで，本研究では正方形の作図に着目する．」(pp.99-100，中略は引用者)

佐々木は，正方形の作図について，平面での作図の方法がそのまま球面上でも成り立つか，その例として図 4-1-7 を示している．

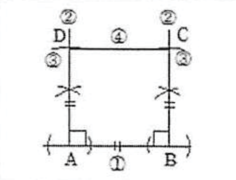
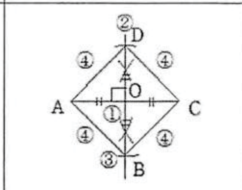
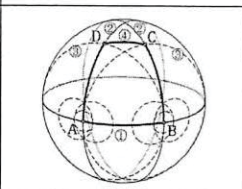
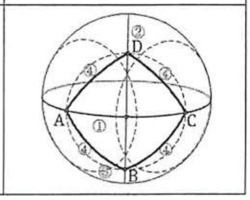
| | 2 直角方法 | 対角線方法 |
|---|---|---|
| 方法 | ①線分 AB<br>②A を通り AB に垂直な直線<br>　B を通り AB に垂直な直線<br>③中心 A 半径 AB の円<br>　中心 B 半径 AB の円<br>④線分 CD | ①線分 AC<br>②AC の垂直二等分線<br>③中心 O 半径 AO の円<br>④線分 AB，線分 BC<br>　線分 CD，線分 DA |
| 平面 |  |  |
| 球面 |  |  |

図 4-1-7　正方形になる／ならない作図方法

佐々木は，「何の数学的事実が効いているのかあるいは既知の数学的知識で何を用いるべきなのか調べるのに証明は有効」(p.100)であるととらえ，平面における「2 直角方法」による正方形の作図の証明を行っている．一方で，球面では∠C＝∠D＞90° であることが予想されるため，「∠C＝∠D であることを保証する前提は平面と球面で同じであるが∠C と∠D の大きさが 90° であることを保証する前提は平面と球面で異なることを見出すことができる」(p.101)と述べている．このことから，「平面と球面で合同に関する性質は同じであるが内角の和に関する性質あるいは平行線に関する性質が異なることを見出すことができる．つまり，証明によって結論に効いている前提が明らかになり，前提を見直すことで合理的な改善の方向性が明らかになるのである．」(p.101)と述べている．

以上から，佐々木は教材の展開を次のように想定している．

まず，「教師が直線を 2 点間の最短距離を延長した図形，円を 1 点から等距離の集合と定義」(p.101)する．そして，「球面上に正方形を作図できるか」と問い，作図させる前に正方形は「4 つの辺が等しく 4 つの角が等しい四角形」，四角形は「4 つの直線で囲まれた図形」と定義する．この後，生徒が作図した方法と図形を取り上げ，それらが正方形かどうかその判断の根拠について整理する．ここで，佐々木は「対角線方法による作図を取り上げるかどうかで授業の様子は異なる」と述べ，「対角線方法による作図をする生徒がいなければ，2 直角方法 1 つに向き合いなぜ失敗したか正面から考え，前提を見直して合理的な改善するのに役立つことを感得させられ（中略）対角線方法による作図する生徒がいれば，それを取り上げ，なぜ正方形になったりならなかったりするのか考えさせる．」(pp.101-102，中略は引

用者)としている．次に，「数学的事実の根拠を問うて，証明によって効いている前提の見直しを図る」(p.102)．ここでは，それぞれの三角形の内角の和に注目させている．最後に，「見出した公理のみに基づいていくつかの定理を証明し，理論全体を整理し，問題の解決過程に現れた数学的事実の整合性を図る」(p.102)としている．

## 第２節　『数学　第二類』における平行投影及び中心投影と球面幾何教材の今日的意義

### (1) 先行研究と『数学　第二類』の比較

前節の内容から，それぞれの授業実践での教材の特徴を整理していく．

滝沢(1998)は，球面上の座標の変換式から，地図を作成するプログラムを作成し，地図投影法について授業を行っている．

野沢，小林(2005)はヴィニョーラの原典から，天井画作図器を用いた活動を取り入れ，平面と曲面の作図から，透視円筒図法，メルカトル図法の2つの地図投影法について，分析し，その2つの性質の違いを数学的に分析した授業を行っている．

中村(2006)は，球面について，球面正弦・余弦定理を与え，地球上の2点間の最短距離を定理によって導き，平面・球面三角形の合同条件を検討している．

佐々木(2015)は，球面上に正方形を作図する活動から，証明による前提の見直しが公理を求める方法になりうることを論じている．

一方で，『数学　第二類』における「球面上の図形」の内容は次の通りである．

第１節では「漸長図（メルカトル図）」について，球面を平面にきれいに表せないことに気付かせ（問１），緯線の誤差がどれほどか求め（問２），緯度の間隔がどのように変化しているのか分析し（問３），等角性について検討し（問４），漸長図の等角性から，狭い範囲での2点間の距離を分析する（問５）．

第２節では，「中心透視図」について，中心透視図の作図の方法について考え（問１），中心透視図の経線・緯線の様子をかき（問２），これらの知識から東京・サンフランシスコ間の航路について，出発時の針路の定め方を考える．以降は球面三角形について，正弦・余弦・正接についての式を考える（問４，５，６）．

第３節では，「円柱正積図」について，面積が等しい地図を作る時の経線・緯線の条件を考え，その図について分析し（問１，２，３），次に球面上の面積について考え（問４，５，６），その結果から改めて円柱正積図について考察している（問７，８）．

今日における地図投影法に関する授業実践を行ったのは，滝沢(1998)，野沢，小林(2005)である．この両者と『数学　第二類』で扱われている地図の種類について，三者ともに共通しているのは，メルカトル図法である．これは，滝沢や『教授要目』でも述べられているが，メルカトル図法が一般によく見かける地図だからである．円筒図法の類についても三者ともに触れているが，投影法がそれぞれ異なる．野沢，小林は透視円筒図法による地図，『数学　第二類』は円柱正積図について触れている．透視円筒図法による地図は，透視の考えを活用しているが，円柱正積図は面積が等しくなるように円柱の側面に変換していき，これはメルカトル図の考え方に近いものである．実際，『数学編纂趣意書』では，「漸長図と大圏図はともに実用上重要な図法であるが，その作り方は対蹠的であ

り，（中略）大圏図の方は地球を透視して経緯線を引き，大局からきめてかかるが，これに反して漸長図の方は微小の部の書き方から始め，これを累積していくのである．正積図は図そのものは重要でないが，これを作る時の考え方は漸長図のそれと全く同じであって，この方法を理解するのに役立つ．」(4年，p.2)と述べている．透視円筒図法は滝沢も取り入れている．滝沢はさらに，平射図法や心射図法など，数多くの投影法を扱っている．

ここで，『数学　第二類』における3つの地図については，すべて自ら性質を考え，場合によっては作図するように問が設定されている．この流れは，野沢，小林の授業に似ている部分がある．野沢，小林は，実際に透視円筒図法を作図し，透視円筒図法，メルカトル図法について，数学的に分析し，拡大倍率を考えている．

しかし，『数学　第二類』の編纂者の1人である田中良運(1939)は，地図投影法が投影図や透視図といった内容の教材の1つとしてとらえ，投影図，透視図などの内容を活用した教材であると考えていた．第３章第４節から，漸長図における緯線の誤差を求めるときに，投影図を用いることで求めることができた．また，砂田(2015)は，透視図は投影図を活用して作図することができ，中心透視図は透視図の作図と同様にできることから，投影図，透視図が大きく関わっていることを明らかにしている．つまり，『数学　第二類』では，投影図，透視図を道具として活用する教材として，「球面上の図形」を扱っている．これは，先行研究との大きな違いである．

2年「３．円と球」でも球について触れられている．ここでの内容を整理する．

「１．大円と小円［１］」では，問１で球面と平面との交線が円となることを確認し，大円，小円の定義を学ぶ．問３では，球面上の2点を通る大円がただ1つしかないことを確認する．「２．接平面と接線」では，問３で中心透視図につながる，接平面に経線と緯線を投影したときの様子を考える問が設定されている．「３．大円と小円［２］」では，問１で大円弧と小円弧の長さを比較する方法を考え，問２では立面図を作図させ，その長さを比較している．

中村(2006)や佐々木(2015)は，地図投影法を使わずに球面に関する教材を作っている．中村は，最初の授業で，生徒に地球儀と輪ゴムを渡し，大円を直観的に確認し，歴史原典の定義を用いて大円の概念を検討している．しかし，大円がなぜ最短距離を表しているのかを証明する活動や，小円に関する内容までは触れられていない．その点について，『数学　第二類』の方がより丁寧に学ぶようになっているといえる．中村の授業をみると，生徒の活動の様子として，次の図が挙げられている．この図の下の方には，地球の立面図が作図されている．授業の主題ではないが，平行投影を用いて地球を平面上に表わし，距離を考えようとしていることがわかる．さらに，上の図から下の図へ，地球をみる視点の位置が変化しているのもわかる．『数学　第二類』では，立面図から大円と小円を分析する問が含まれている．生徒が図のように立面図を扱って考えていることから，中村の活動にさらに『数学　第二類』のように大円と小円の違いを考える活動を取り入れることによっ

て，より球面に関する分析がなされるのではないかと考える．

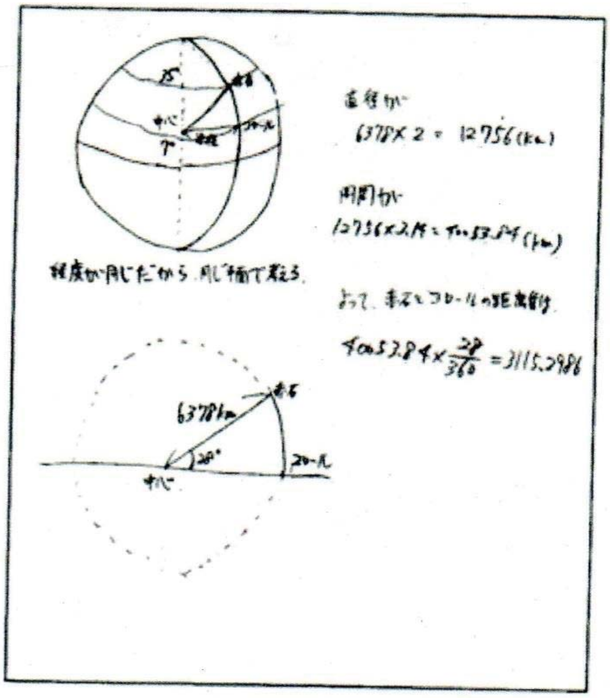
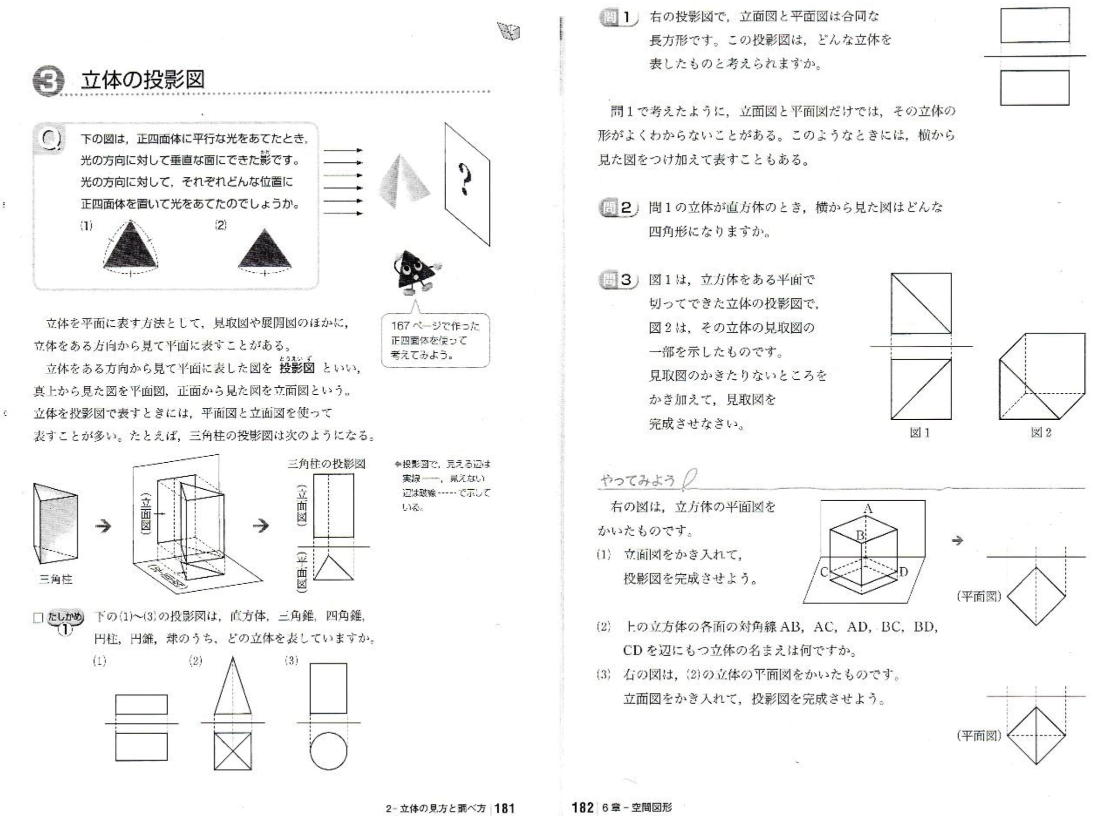



図4-2-1　生徒の活動の様子

佐々木(2015)の授業と『数学　第二類』を比較すると，佐々木は球面上での操作や作図を行っているのに対して，『数学　第二類』は球面を平面に表して作業をしているため，内容が大きく異なる．しかし，中村同様，大円と小円について，大円がなぜ最短距離を表しているのかといった内容を『数学　第二類』のように取り入れることによって，2点間の最短距離，すなわち平面でいう直線が大円であることがよりわかりやすくなると考えられる．

### ⑵ 『数学　第二類』における平行投影及び中心投影と球面幾何教材の価値と今日的意義

土屋陽子(1998)は，投影図の扱いについて，現行の教科書と『数学　第二類』を比較した結果，現行の教科書では，「立体の外形を投影図で表すあるいはこれを投影図からよみとるといった活動が中心であり，投影図の取り扱いは，空間図形の外形を平面上に表わすための一手段にとどまっている」(p.6)のに対して，『数学　第二類』では，「空間図形の形状を知るために，投影図を積極的に用いている」(p.6)と述べている．これは，現在の教科書をみると，同様のことがいえる．



## ③ 立体の投影図

Q　下の図は，正四面体に平行な光をあてたとき，光の方向に対して垂直な面にできた影です。光の方向に対して，それぞれどんな位置に正四面体を置いて光をあてたのでしょうか。

(1)　(2)

167ページで作った正四面体を使って考えてみよう。

立体を平面に表す方法として，見取図や展開図のほかに，立体をある方向から見て平面に表すことがある。

立体をある方向から見て平面に表した図を **投影図** といい，真上から見た図を平面図，正面から見た図を立面図という。

立体を投影図で表すときには，平面図と立面図を使って表すことが多い。たとえば，三角柱の投影図は次のようになる。

三角柱　(立面図)　(平面図)　三角柱の投影図

←投影図で，見える辺は実線——，見えない辺は破線-----で示している。

□ たしかめ1　下の(1)~(3)の投影図は，直方体，三角錐，四角錐，円柱，円錐，球のうち，どの立体を表していますか。

(1)　(2)　(3)

2- 立体の見方と調べ方 181

問1　右の投影図で，立面図と平面図は合同な長方形です。この投影図は，どんな立体を表したものと考えられますか。

問1で考えたように，立面図と平面図だけでは，その立体の形がよくわからないことがある。このようなときには，横から見た図をつけ加えて表すこともある。

問2　問1の立体が直方体のとき，横から見た図はどんな四角形になりますか。

問3　図1は，立方体をある平面で切ってできた立体の投影図で，図2は，その立体の見取図の一部を示したものです。見取図のかきたりないところをかき加えて，見取図を完成させなさい。

図1　図2

やってみよう

右の図は，立方体の平面図をかいたものです。

(1)　立面図をかき入れて，投影図を完成させよう。

A　B　C　D　(平面図)

(2)　上の立方体の各面の対角線AB，AC，AD，BC，BD，CDを辺にもつ立体の名まえは何ですか。

(3)　右の図は，(2)の立体の平面図をかいたものです。立面図をかき入れて，投影図を完成させよう。

(平面図)

182 6章－空間図形

図4-2-2　『新しい数学１』(東京書籍)

「球面上の図形」では，地図を製作する，もしくは地図の特徴を把握するために，地球に対して投影図を作図するなど，投影図を道具として分析をするようになっていた．『数学　第二類』における「球面上の図形」の内容は，投影図，透視図を道具として扱うという特徴を持つ．立体を平面に表現する教材として，球を扱うことは大いに意味があることであると考える．球面を平面に表そうとしたとき，ある性質を保存しようとすると，別の性質を失う特徴がある．例えば，漸長図（メルカトル図）は等角ではあるが，距離は緯度が高くなるほど異なる．そのため，必要に応じて様々な投影法を考える必要がある．場面に応じた投影法を考え，その際に球を様々な視点から，投影図，透視図を活用するといった平行投影及び中心投影を用いて分析することは，今日の数学教育において，十分扱う価値のある教材であると考える．

# 終章

# まとめと今後の課題

## 第１節　本研究のまとめ

本研究の目的は，球面幾何が導入された『数学　第二類』について，4 年「２．球面上の図形」を扱うまでの平行投影・中心投影といった平行投影及び中心投影の内容を明確にし，球面幾何を扱うに当たって平行投影及び中心投影の活用がどのような影響を与えていたのか，その特徴と価値を明らかにし，今日の数学教育において球面幾何を扱う価値を得ることであった．

上記の研究目的を達成するために，次の課題を設定した．第一の課題は,『数学　第二類』の編纂の背景を明らかにし，現在までの研究で『数学　第二類』の教材にはどのような特徴や価値があるのかを明らかにすることである（第１章）．第二の課題は,『数学　第二類』の編纂者が，球面を含む空間図形について，立体を平面上に表わすことについて，地図投影法についてどのように考えていたのかを明らかにし，分析の視点を得ることである（第２章）．第三の課題は,『数学　第二類』における球面幾何に関する内容を明らかにし，第二の課題で挙げた分析の視点から,『数学　第二類』について考察し，その特徴を示すことである（第３章）．第四の課題は，現在の数学教育における球面幾何に関する教材やその授業について整理し,『数学　第二類』の価値とその今日的な意義を明らかにすることである（第４章）．

第一の課題に対して,『数学　第二類』は数学教育改良運動，さらには，尋常小学算術の成立による，数学教育再構成運動の影響を大きく受け，成立したことが明らかとなった．その中で，図法や球面といった内容が新たに導入され，その目的が図形に関する空間直観力の涵養であることが明らかとなった．また，土屋(1998)から,『数学　第二類』では，投影図を操作（変形）させて使う問を含んでいるという特徴が明らかとなった．片岡(2010)から，中等立体幾何の教育は,「直観」,「実験実測」,「労作」,「実用」,「融合」などをその目標として掲げながら,「用器画」の取り入れに意欲を持ち，議論の盛衰を経ながらも,『数学４，５第二類』を実現し，円錐曲線の学習に結び付け証明にまで踏み込んでいることについて,「用器画」を数学に取り込むことにとどまらず，数学的な探求に活かすという意味で内容的な「融合」を実現しているといえることがわかった．

第二の課題に対して，まず,「空間の想像力」とは「１．経験的な世界に，抽象的に構成された幾何的な対象や関係と局所的に同型なパターンを同定できること．」，「２．頭の中で図形を考えそれに幾何学的操作を施した結果を，模型や図を用いずに想像できること．」，「３．空間で，いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること．」の３つがあり，さらに，２．については，「ａ．三次元の図形から三次元の図形へ」，「ｂ．三次元のものから二次元のものへ」，「ｃ．二次元のものから三次元のものへ」と 3 種類に分かれていることがわかった．このうち，ｂ．について，平行投影及び中心投影を含んでおり，その考えについて明らかにした．『数学　第二類』の編纂者の一人である田中(1939)は，地図投影法を用器画の教材の一つとしてとらえていたことも示された．

第三の課題に対して，『数学　第二類』では，第２章で示した平行投影及び中心投影を空間図形の分析に道具として扱っていることが明らかとなった．地図投影法については，球面を平面に正確に表せないことから，必要に応じて様々な投影法を考えるように構成されていることが明らかとなった．扱っている地図投影法を比較すると，漸長図では地球の外部から地球を平行投影を用いて分析をし，中心透視図では地球の内部から透視図を用いて地球を分析するように構成され，平行投影，中心投影を道具として球面を分析するようになっていることが明らかとなった．

第四の課題に対して，現在の数学教育では，平行投影及び中心投影を道具として球面幾何の教材を扱う例はない．『数学　第二類』における「球面上の図形」の内容は，投影図，透視図を道具として扱うという特徴を持つ．球面を平面に表そうとしたとき，ある性質を保存しようとすると，別の性質を失う特徴がある．そのため，必要に応じて様々な投影法を考える必要がある．場面に応じた投影法を考え，その際に球を様々な視点から，投影図，透視図など，平行投影，中心投影を用いて分析することは，今日の数学教育において，十分扱う価値のある教材であることが示された．

## 第２節　今後の課題

本研究における今後の課題は３つある．

１つ目は，「空間の想像力」を養うための立体幾何の分析である．本研究から，特に島田(1990)の述べる「空間の想像力」の「３．空間で，いろいろなところに基準点と基準の方向を移して考えられること．」について重要性を感じた．立体を，視点を自由に動かしてみることができるための，立体幾何に関する分析が必要である．本研究では，『数学　第二類』の「球面上の図形」のみで止まっている．『数学　第二類』全体を通した研究が必要である．

２つ目は，現在の数学教育に球面幾何教材を導入するためのカリキュラムを構成することである．本研究では，『数学　第二類』における平行投影及び中心投影を用いた球面幾何教材について分析をしてきた．『数学　第二類』では投影図，透視図を道具として用いるように構成されていた．現在の数学教育では，投影図について，中学校第１学年で学習するが，投影図を道具とした空間の分析についてまでは行われていない．そこで，球面幾何に関する内容を扱うまでのカリキュラムについて，吟味する必要がある．

３つ目は，２つ目のカリキュラムについての授業実践を行うことである．

以上の課題について，今後の研究で解決させていきたい．

## 引用・参考文献一覧


(1) 片岡啓．(2010)．「『数学 4，5 第二類』に至る中学校立体幾何の改革過程―「用器画」との融合をめぐって―」．数学教育史研究．第 10 号．pp.21-32.

(2) 前田隆一．(1979)．『算数教育論―図形指導を中心として―』．金子書房.

(3) 蒔苗直道．(2015)．「算数・数学科教育の目的と歴史」．『教科教育学シリーズ③　算数・数学科教育』．橋本美保，田中智志監修．藤井斉亮編著．一藝社.

(4) 長崎栄三．(1990a)．「数学教育再構成運動と数学第一類・第二類の誕生」．国立教育研究所研究集録．第 20 号．pp.85-102.

(5) 長崎栄三．(1990b)．「数学第一類・第二類の検定教科書の編纂とその思想」．国立教育研究所研究集録．第 21 号．pp.43-56.

(6) 長崎栄三．(1993)．「数学第一類・第二類の検定教科書の使用と教科書国定化―戦時下の中学校数学教育―」．国立教育研究所研究集録．第 26 号．pp.53-66.

(7) 長崎栄三．(1995)．「中学校数学教育の新しいパラダイムの出現―戦時下の中学校数学教育論の検討から―」．学芸大数学教育研究．第 7 号．pp.71-80.

(8) 中村稔．(2006)．「正弦・余弦定理の活用に関する授業研究―平面・球面三角法の応用を通して―」．中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)．筑波大学数学教育学研究室．pp.192-204.

(9) 野沢和弘，小林徹也．(2005)．「地図を題材にした数学の授業実践に関する一考察―天井画作図器を用いて―」．中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)．筑波大学数学教育学研究室．pp.162-174.

(10) 小倉金之助，鍋島新太郎．(1957)．『現代数学教育史』．大日本図書株式会社.

(11) 佐々木陽平．(2015)．「学校数学における公理的構成に焦点を当てた教材開発とその実践に関する研究」．学芸大数学教育研究．第 27 号．pp.97-104.

(12) 島田茂．(1990)．『教師のための問題集』．共立出版株式会社．pp.94-154.

(13) 塩野直道．(1970)．『数学教育論』．新興出版社啓林館.

(14) 杉山吉茂．(2009)．『中等科数学教育学序説　杉山吉茂教授講義筆記』．東洋館出版社.

(15) 砂田大樹．(2014)．「『数学　第二類』における非ユークリッド幾何に関する研究―球面幾何に焦点を当てて―」．第 47 回秋季研究大会発表集録．日本数学教育学会．pp.447-450.

(16) 砂田大樹．(2015)．「『数学　第二類』における投影図を用いた教材に関する研究―透視図及び中心透視図に焦点を当てて―」．第 48 回秋季研究大会発表集録．日本数学教育学会．pp.439-442.

(17) 滝沢昌弘．(1998)．「地図と数学」．日本数学教育学会誌．第 80 巻．第 11 号．pp.17-22.

(18) 田中良運．(1936)．「F.W.Westaway Craftsmansphip in the Teaching of Elementary Mathematics.」．日本中等教育学会誌．第 18 巻．第 1 号．p.49.
(19) 田中良運．(1939)．「地図投影法の原理について」．『数学教育』第 26 集．目黒書店．pp51-72.
(20) 土屋陽子．(1998)．「「数学第二類」における空間図形教材に関する一考察」．日本数学教育学会誌．第 80 巻．第 7 号．pp.2-10.
(21) 日本放送出版協会．(1942)．『中学校高等女学校数学及理科教授要目』.
(22) 中等学校教科書株式会社．(1943，1944)．『数学　中学校用　１，２，３，４　第二類　中学校用』.
(23) 中等学校教科書株式会社．(1943，1944)．『数学編纂趣意書　１，２，３，４　第二類　中学校用』.
(24) 文部科学省．(2008)．『中学校学習指導要領解説　数学編』．教育出版株式会社.
(25) 藤井斉亮，俣野博ほか 39 名．(2012)．『新しい数学１』．東京書籍株式会社.
(26) 『広辞苑　第六版』．(2008)．岩波書店.
(27) Westaway．(1937)．「Map Projection」．『Craftsmanship in the Teaching of Elementary Mathematics』．Blackie And Son Limited．pp.517-537.
https://archive.org/details/craftsmanshipint032576mbp