

令和2年度

修士論文

Polar space group における 3-orbifold について

弘前大学 教育学研究科 学校教育専攻 教科実践コース 数学教育領域  
指導教員：山本 稔

19GP303 木村 明堯

## 1 はじめに

ユークリッド空間上の合同変換からなる群 (合同変換群) は平行移動からなる群を正規部分群として含み, 直交群を部分群として含む. そして合同変換群は平行移動からなる群と直交群の半直積の構造をもつ. ユークリッド空間特に不連続に作用し, 格子群を平行移動の群とする合同変換群を結晶群という. この結晶群は orbifold とよばれる幾何構造をもつことが知られている. 平面における結晶群の場合は, ユークリッド平面をモデルとする 2-orbifold の分類が対応し, 平面の敷き詰め方が 17 種類あることが証明される. また, ユークリッド平面をモデルとする 2-orbifold は 2 次元トーラスからの有限次数の分岐被覆として表されることから, 2-orbifold における Euler number (orbifold Euler number) というものを導入すると, orbifold Euler number は常に 0 になるという結果が生まれる.

そこで空間結晶群と 3-orbifold の関係について興味を持ち, Johnson, Burnett, and Dunbar による論文 ([2]) をゼミで扱った. 空間結晶群は 230 通りあり, 向きを保つ合同変換からなる空間結晶群 (polar space group) については 65 通り存在する. しかし, [2] には polar space group の orbifold の構成の手順が記されていない. そこで本論文では, その過程を詳細に図示することとする. また, 平面のときと同様にユークリッド空間をモデルとする 3-orbifold は 3 次元トーラスからの有限次数の分岐被覆として表されるため, orbifold Euler number は常に 0 になることが知られている.

この論文の構成は以下の通りである. セクション 2 では準備として結晶群に関わる群論からの基本事項を述べる. セクション 3 では結晶群の幾何構造を調べるために有用な orbifold の定義や性質を述べる. セクション 4 では平面結晶群と 2-orbifold の関係について, 河野 [4] をもとに紹介する. 空間結晶群における固定部分群は 3 次直交行列の部分群として捉えることができるため, 球面をモデルとする orbifold を調べる必要がある. そこで, セクション 5 では [4] をもとに, 2 次元球面にモデルとする orbifold について紹介する. セクション 6 では [2] で紹介されている polar space group と 3-orbifold の関係について 3-orbifold の構成方法を中心により詳細に述べる.

## 謝辞

本論文の作成にあたり, 終始適切な助言を賜わり丁寧に指導して下さった山本稔先生に感謝いたします. 約 3 年半, 先生の下で勉強をすることができて本当に幸せでした. 同期生である藤村陽介さん, 畑中沙織さんは学部 1 年生からの付き合いであり, 互いに切磋琢磨することができました. ここに感謝いたします. また, 数学教育領域の先生方をはじめとする教育学部, 教育学研究科の先生方にも様々な場面で大変お世話になりました. ありがとうございます.

## 2 準備

**定義 2.1.** 集合  $X$  が **距離空間** であるとは、すべての  $x, y \in X$  に対して、実数  $d(x, y)$  が定められていて、次の3つの条件を満たすことである。

1. 任意の  $x, y \in X$  について  $d(x, y) \geq 0$  であり、 $d(x, y) = 0$  となるのは  $x = y$  の場合に限る。
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ .
3.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ .

**例 2.2.**  $\mathbb{R}^n$  の2点  $P, Q$  の座標をそれぞれ、 $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$  としたとき、 $P, Q$  の距離を

$$\left( \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

と表すこととする。このように与えられる  $P, Q$  の距離を記号  $d(P, Q)$  で表し、ユークリッド距離とよぶ。 $\mathbb{R}^n$  にこのように距離を定めたものを  **$n$ 次元ユークリッド空間** とよび、 $\mathbb{E}^n$  で表す。

**定義 2.3.** 距離空間  $X, Y$  の間の全単射  $f: X \rightarrow Y$  が **等長写像(isometry)** とは、すべての  $x, y \in X$  に対して

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

が成り立つことである。ここで  $d_X, d_Y$  は、それぞれ  $X, Y$  における距離を表す。また、距離空間  $X, Y$  の間に等長写像が存在するとき、 $X$  と  $Y$  は合同であるという。特に  $X = Y$  のとき、等長写像を合同変換とよぶ。

**定義 2.4.** 合同変換  $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  が、ベクトル  $\mathbf{b}$  を用いて

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

と表されるとき、 $f$  を **平行移動** とよぶ。

**定理 2.5** ([5]).  $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  が合同変換ならば、直交行列  $A$  と  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  が存在し、

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

と表せる。特に直交行列  $A$  が  $\det A = 1$  のとき、 $f$  を **向きを保つ合同変換** という。

**定義 2.6.** 合同変換全体は写像の合成を積とし、群となる。これを **合同変換群** とよび、 $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$  で表す。また、 $n$ 次直交行列からなる群を  $O(n)$ 、行列式が1の  $n$ 次直交行列からなる群を  $SO(n)$  で表す。

**定義 2.7.** 群  $G$  が集合  $X$  に **作用する** とは、 $g \in G$  に対して写像

$$\varphi_g: X \rightarrow X$$

が定まっており、

1. 任意の  $g, h \in G$  に対して,  $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$  が成立する.
2.  $G$  の単位元  $e$  に対して,  $\varphi_e$  は  $X$  の恒等写像である. つまり, 任意の  $x \in X$  について,  $\varphi_e(x) = x$  となる.

の条件を満たすことをいう.

**注意 2.8.** この定義では積  $gh$  の作用は, まず  $h$  の作用を施してから  $g$  の作用を施すように定められている. このような群の作用を **左作用** とよぶ. また,  $\varphi_g(x)$  を  $g(x)$  と略記することがある.

**定義 2.9.** 群  $G$  が集合  $X$  に作用しているとき,  $x \in X$  に対して

$$G \cdot x = \{g(x) \in X \mid g \in G\} \subset X$$

とおき,  $x$  の  $G$  による **軌道** とよぶ.

**定義 2.10.** 群  $G$  が集合  $X$  に作用しているとき,  $x \in X$  に対して

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\} \subset G$$

とおき,  $G_x$  を  $x$  における **固定部分群** とよぶ.

また, すべての  $x \in X$  に対して,  $G_x$  が単位元のみからなるとき,  $G$  の  $X$  への作用は **固定点をもたない** という.

**定理 2.11** (軌道・固定部分群定理). 群  $G$  が集合  $X$  に作用しているとき,  $x \in X$  の固定部分群  $G_x$  と軌道  $G \cdot x$  について,  $G$  の  $G_x$  の剰余類と,  $G \cdot x$  の間に一対一対応が存在する. そして,  $G$  を有限群とすると,  $G$  の位数は,  $G_x$  の位数と  $G \cdot x$  の要素の個数の積に等しい. すなわち

$$|G| = |G_x| |G \cdot x|$$

が成り立つ.

証明.  $G$  の要素  $g, h$  が,  $G_x$  による同じ剰余類に属する条件は,  $g^{-1}h \in G_x$  であるが, これは  $(g^{-1}h)(x) = x$  つまり,  $g(x) = h(x)$  と同値である. つまりこの式は,  $g(x)$  と  $h(x)$  が軌道  $G \cdot x$  の要素として一致することを意味する. したがって,  $g$  が属する剰余類に対して,  $G \cdot x$  の要素  $g(x)$  を対応させる写像により,  $G_x$  による剰余類の集合から軌道  $G \cdot x$  への全単射が得られる. さらに,  $G_x$  による剰余類の個数は  $|G|/|G_x|$  であり, これが  $|G \cdot x|$  に等しいので, 定理が示された.  $\square$

**定義 2.12.**  $\mathbb{R}^n$  の 1 次独立なベクトル  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  に対し, 平行移動  $t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n}$  を

$$(t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{b}_j$$

で定める. これらを用いて

$$\Gamma_{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n} = \{t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n} \mid m_i \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$$

とおく.  $\Gamma_{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n}$  をベクトル  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  で定まる **格子群** という. また, 原点を始点とする  $m_1\mathbf{b}_1 + \dots + m_n\mathbf{b}_n$  の終点全体の集合を **格子** といつ次のように表される.

$$L_{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n} = \left\{ \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{b}_j \mid m_j \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{E}^n$$

そして格子に含まれる点を格子点という.

**定義 2.13.**  $\mathbb{E}^n$  の部分集合を  $X$  とする.  $\mathbb{E}^n$  の点  $Q$  が  $X$  の **集積点** であるとは, すべての正の数  $r$  に対して,  $Q$  を中心とする半径  $r$  の円の内部に  $Q$  以外の  $X$  の点を含むことである.

**命題 2.14.**  $\mathbb{R}^n$  の 1 次独立なベクトル  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  で生成される格子は集積点をもたない.

証明. 格子に属さないような  $\mathbb{R}^n$  の点  $Q$  をとる.  $Q$  を中心とする球を, 少なくとも 1 つ, 格子点を含むようにとる. この球に含まれる格子点は有限個なので, これらの点と  $Q$  との距離の最小値が正の数として定まる. この正の数を  $a$  とし,  $Q$  を中心として半径  $r$  が  $r < a$  を満たす球をとると, この球の内部には格子点が存在しない. また,  $Q$  が格子点であるときも同様な議論で,  $Q$  を中心とする球を十分小さくにとって, 内部に含まれる格子点が  $Q$  のみであるようにすることができる. したがって, 格子  $L_{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n}$  は集積点をもたない.  $\square$

**定義 2.15.**  $\mathbb{E}^n$  の合同変換群  $\Gamma$  が  $\mathbb{E}^n$  に不連続に作用するとは,  $\mathbb{E}^n$  上の任意の点  $\mathbf{x}$  に対して, 軌道  $\Gamma \cdot \mathbf{x}$  が集積点を持たないことと定義する, このとき  $\Gamma$  を  $\mathbb{E}^n$  の合同変換からなる **不連続群**, あるいは,  $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$  の **離散部分群** という.

ここで,  $\mathbb{E}^1$  の合同変換群  $\text{Isom}(\mathbb{E}^1)$  について触れる.  $\text{Isom}(\mathbb{E}^1)$  の要素は, 実数  $b$  を用いて

$$t(x) = x + b$$

で表される平行移動, または, 実数  $c$  についての鏡映

$$r(x) = -x + 2c$$

である.

$\mathbb{R}$  の部分集合  $X$  が下に有界で, 最小の要素をもたないとき, 下限  $\inf X$  は,  $X$  の集積点となる. 実際, 下限を  $c$  とおくと,  $c$  は  $X$  に含まれず, 下限の定義から任意の正の数  $r$  について,  $c < x < c + r$  を満足する  $x \in X$  が存在するからである.

**命題 2.16.**  $\Gamma$  を  $\mathbb{E}^1$  の合同変換からなる不連続群で固定点をもたないとすると,  $g \in \Gamma$  はある正の実数  $b$  と整数  $n$  を用いて, 平行移動

$$g(x) = x + nb$$

で表される. さらに, 群としての同型  $\Gamma \cong \mathbb{Z}$  が成り立つ.

証明.  $\Gamma$  の要素は  $\mathbb{E}^1$  の合同変換で固定点をもたないので、平行移動である。原点  $O$  の  $\Gamma$  の作用による軌道を  $L$  で表す。  $\Gamma$  の作用が不連続であることから、  $L$  は数直線において集積点をもたない集合である。  $L$  の要素で正であるもの全体を  $L_+$  とおくと、  $L_+$  には最小の要素が存在する。なぜなら、実数の連続性から  $L_+$  には下限  $b$  が存在するが  $b$  が  $L_+$  の要素でないとする、  $b$  は  $L_+$  の集積点となり、  $\Gamma$  の作用が不連続であることに反するからである。したがって、  $b$  は  $L_+$  の最小の要素となる。

平行移動  $t$  を  $t(x) = x + b$  で定める。任意の  $g \in \Gamma$  は平行移動なので、実数  $d$  を用いて、  $g(x) = x + d$  と表される。このとき  $d$  を  $b$  で割った余りを  $r$  とする。つまり、

$$d = nb + r, \quad n \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < b$$

と表す。もし、  $r \neq 0$  とすると、  $t^{-n}g \in \Gamma$  より、平行移動  $x \mapsto x + r$  が  $\Gamma$  に含まれることになる。これは  $b$  が  $L_+$  の最小の要素であることに反するので、  $r = 0$  となる。したがって、  $g$  はある整数  $n$  を用いて、  $g(x) = x + nb$  と表される。つまり、  $\Gamma$  は群として平行移動  $t$  で生成され、  $\Gamma$  の要素は  $g = t^n, n \in \mathbb{Z}$  と表される。群の同型写像  $\varphi: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$  は、  $\varphi(t^n) = n$  によって定まる。  $\square$

**命題 2.17.**  $\Gamma$  を  $\mathbb{E}^n$  の合同変換からなる不連続群で、固定点をもたないとする。このとき、  $\mathbb{E}^n$  の点  $\mathbf{x}$  に対して、距離  $d(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$  は、  $g \in \Gamma, g \neq e$  とするとき、正の最小値が存在する。

証明. 実数の集合

$$X = \{d(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \mid g \in \Gamma, g \neq e\}$$

について、  $\Gamma$  の作用が不連続で、固定点をもたないことから、下限  $\inf X$  が正の数となる。この下限を  $\alpha$  とおく。また、  $g \neq h$  となるような  $g, h \in \Gamma$  に対して

$$d(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})) \geq \alpha \tag{2}$$

が成立する。これは  $d(\mathbf{x}, g^{-1}h(\mathbf{x})) \geq \alpha$  と  $g$  が合同変換であることから得られる。すると、  $\alpha = \min X$  となる。実際、  $\alpha \notin X$  とすると、  $\beta > \alpha$  を満たすような、任意の  $\beta \in \mathbb{R}$  に対して、  $\mathbf{x}$  を中心とする半径  $\alpha$  と  $\beta$  の円の間に軌道  $\Gamma \cdot \mathbf{x}$  の要素が無数に含まれることになり、これは (2) に反する。よって、  $X$  には正の最小値が存在することが示された。  $\square$

**定理 2.18.**  $\Gamma$  は  $\mathbb{E}^n$  の向きを保つ合同変換からなる不連続群で、固定点をもたないとする。このとき、  $\Gamma$  は  $n$  個以下の平行移動で生成される。

証明. 定理 2.5 より、  $\mathbb{E}^n$  の向きを保つ固定点をもたない合同変換は平行移動である。したがって、  $\Gamma$  の要素はすべて平行移動であることがわかる。  $\mathbb{E}^n$  の点  $\mathbf{x}$  をとる。命題 2.17 より、  $g \neq e$  であるような  $\Gamma$  の要素  $g$  で距離  $d(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$  を最小にするようなものが存在する。この距離の最小値を  $\alpha_1$  とし、最小値を実現する  $g$  を  $t_1$  とおく。さらに、  $\mathbf{x}$  と  $t_1(\mathbf{x})$  を結ぶ直線上にある軌道  $\Gamma \cdot \mathbf{x}$  の要素はすべて、ある整数  $m_1$  を用いて、  $t_1^{m_1}(\mathbf{x})$  と表される。なぜなら、もしこのような形に表されない点  $\mathbf{y}$  が存在すると仮定すると、命題 2.16 の証明と同様の議論で、適当な整数  $k$  に対して、

$0 < d(\mathbf{x}, t_1^k(\mathbf{y})) < \alpha_1$  を満たすようにすることができて、これは  $\alpha_1$  の最小性に反するからである。平行移動の集合

$$\{t_1^{m_1} \mid m_1 \in \mathbb{Z}\} \quad (3)$$

が  $\Gamma$  と一致していれば、 $\Gamma$  は 1 個の平行移動  $t_1$  で生成されることになる。また、上の平行移動の集合が  $\Gamma$  と一致しないときには、(3) の形で表されない  $g \in \Gamma$  のうち、距離  $d(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$  を最小にするものを  $t_2$  とおき、この距離の最小値を  $\alpha_2$  とおく。上と同じような操作をして、平行移動の集合

$$\{t_1^{m_1} t_2^{m_2} \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

を考え、これがまた  $\Gamma$  と一致していない場合は、 $t_3, \dots$  と作業を繰り返す。繰り返しにより、

$$\{t_1^{m_1} \cdots t_{n-1}^{m_{n-1}} \mid m_i \in \mathbb{Z}\}$$

まで構成できたとする。これが  $\Gamma$  と一致しないときには、この形で表されない  $g \in \Gamma$  のうち、距離  $d(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$  を最小にするものを  $t_n^{m_n}$  とおき、この距離の最小値を  $\alpha_n$  とおく。このとき  $\Gamma = \{t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n} \mid m_i \in \mathbb{Z}\}$  であること、すなわち  $\Gamma$  の要素は

$$t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n} \quad (m_i \in \mathbb{Z})$$

と表されることを示す。 $t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}(\mathbf{x})$  の形で表されない  $\Gamma \cdot \mathbf{x}$  の要素  $\mathbf{z}$  があるとすると、適当な整数  $k_i$  について  $t_1^{k_1} \cdots t_n^{k_n}(\mathbf{z})$  と  $\mathbf{x}$  の距離が  $\alpha_n$  よりも小さくなるようにできる。これは  $\alpha_n$  の最小性に反する。よって、 $\Gamma$  は  $n$  個の平行移動  $t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}$  で生成されることが示された。□

**定義 2.19.**  $\mathbb{E}^n$  の合同変換からなる不連続群  $\Gamma$  に対して、次の条件を満たす領域  $\Delta$  を  $\Gamma$  の**基本領域**(fundamental domain) とよぶ。

1. 領域  $\Delta$  の内部の相異なる 2 点は、 $g \in \Gamma$  では互いに移りあわない。
2.  $\mathbb{E}^n = \bigcup_{g \in \Gamma} g \cdot \Delta$

特に格子群の基本領域を、**単位胞**(unit cell) という。

**定義 2.20.**  $\mathbb{E}^n$  の合同変換群の部分群  $\Gamma$  が  **$n$  次元結晶群** とは、 $\Gamma$  が次の条件を満たすことである。

1.  $\Gamma$  の作用は不連続である。
2.  $\Gamma$  の要素で平行移動であるもの全体のなす群は、格子群  $\Gamma_{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n}$  である。

**命題 2.21.**  $\Gamma$  を  $n$  次元結晶群として、 $t$  を  $\Gamma$  に含まれる平行移動とする。このとき任意の  $g \in \Gamma$  に対して、 $gtg^{-1}$  は  $\Gamma$  に含まれる平行移動である。

証明.  $g \in \Gamma$  を直交行列  $A$  とベクトル  $\mathbf{b}$  を用いて、

$$g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

と表すと、逆変換  $g^{-1}$  は

$$g^{-1}(\mathbf{x}) = {}^tA\mathbf{x} - {}^tA\mathbf{b}$$

で与えられる。  $\Gamma$  は  $\mathbb{E}^n$  の合同変換群の部分群なので、  $\Gamma$  に含まれる平行移動  $t$  について、  $gtg^{-1} \in \Gamma$  である。  $gtg^{-1}$  が平行移動であることを示す。ここでベクトル  $\mathbf{x}$  に対する  $gtg^{-1}$  の作用を計算すると、

$$\begin{aligned} gtg^{-1}(\mathbf{x}) &= gt({}^tA\mathbf{x} - {}^tA\mathbf{b}) \\ &= g({}^tA\mathbf{x} - {}^tA\mathbf{b} + \mathbf{c}) \\ &= A({}^tA\mathbf{x} - {}^tA\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{x} + A\mathbf{c} \end{aligned}$$

となるため、  $gtg^{-1}$  は平行移動である。以上より  $gtg^{-1}$  は  $\Gamma$  に含まれる平行移動である。  $\square$

**命題 2.22.**  $n$  次元結晶群  $\Gamma$  の部分群  $\Gamma \cap O(n)$  は  $\Gamma$  に含まれる平行移動が定める格子  $L_{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n}$  を不変にする。

証明. 命題 2.21 の証明により  $\mathbf{c} \in L_{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n}$ ,  $A \in \Gamma \cap O(n)$  に対して、ベクトル  $A\mathbf{c}$  は、  $\Gamma$  に含まれる平行移動を定めるので、  $L_{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n}$  の要素となる。したがって、  $L_{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n}$  は、  $\Gamma \cap O(n)$  の作用でそれ自身に移される。  $\square$

**定義 2.23.** 群  $G$  の部分群  $N$  が **正規部分群**(normal subgroup) であるとは、  $N$  の要素  $x$  と  $G$  の要素  $g$  に対して常に

$$gxg^{-1} \in N$$

が成り立つことである。

**例 2.24.**  $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$  について、平行移動全体のなす部分群  $\mathbb{T}$  は正規部分群である。これは命題 2.21 の証明の議論から従う。

**定義 2.25.**  $H, N$  を群とする。群準同型  $\varphi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$ ,  $\varphi(h) = \varphi_h$  が与えられたとき、直積集合  $N \times H$  に次で積を定義することで、  $N \times H$  は群になる。これを  $\varphi$  に関する **半直積** といい、  $N \rtimes_{\varphi} H$  で表す。

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1\varphi_{h_1}(g_2), h_1h_2)$$

**定理 2.26.** 群  $G$  の正規部分群  $N$  と、部分群  $H$  について  $G$  の任意の要素が  $gh$ ,  $g \in N$ ,  $h \in H$  と一意的に表されるとする。  $h \in H$  に対して写像  $\varphi_h: N \rightarrow N$  を  $\varphi_h(g) = hgh^{-1}$ ,  $g \in N$  で定めると  $\varphi_h \in \text{Aut}(N)$  となる。また  $\varphi_h$  は

$$\varphi_{hk} = \varphi_h\varphi_k, \quad h, k \in H$$

を満たす。さらに、  $G$  と  $N \rtimes_{\varphi} H$  は写像  $gh \mapsto (g, h)$  によって同型となる。簡単のため  $N \rtimes_{\varphi} H$  を  $N \rtimes H$  で表す。

**例 2.27.** ユークリッド空間  $\mathbb{E}^n$  の合同変換群 ( $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ ) は平行移動全体のなす正規部分群  $\mathbb{T}$ , 部分群として  $n$  次直交群  $O(n)$  をもち,  $\mathbb{T} \cap O(n) = \{e\}$  (ここでいう  $e$  は単位元 (恒等変換) の意味) である. また,  $\mathbb{E}^n$  の合同変換  $f$  は  $n$  次直交行列  $A$  と  $\mathbb{R}^n$  のベクトル  $\mathbf{b}$  によって,

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

と一意的に表される. ゆえに, 半直積としての表示

$$\text{Isom}(\mathbb{E}^n) = \mathbb{T} \rtimes O(n)$$

が得られる. 上の合同変換  $f$  を  $(\mathbf{b}, A)$  で表すと, 合同変換群における積は

$$(\mathbf{b}_1, A_1)(\mathbf{b}_2, A_2) = (\mathbf{b}_1 + A_1\mathbf{b}_2, A_1A_2)$$

となる.

**定義 2.28.**  $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$  の部分群  $\Gamma$  に対して, 写像  $\psi: \Gamma \rightarrow O(n)$  を  $\psi(\mathbf{b}, A) = A$  によって定める. このとき  $\psi(\Gamma)$  を  $J$  と書き,  $J$  を  $\Gamma$  の **点群**(point group) という.

平面結晶群は, 1 次独立な 2 つのベクトル  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  方向の平行移動

$$t_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}_1, \quad t_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}_2$$

で生成される格子群  $\Gamma_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2}$  を正規部分群として含む. 平面結晶群を分類するには, まず, 格子

$$L_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2} = \{m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 \mid m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$$

のタイプによって分類する. なぜならば直交変換によって格子の位置が不変にならなくてはならないからである.

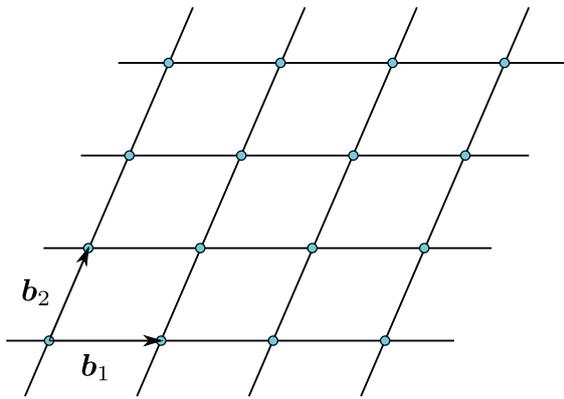
まず最初に考えられるのがベクトル  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  が一般の平行四辺形をなす場合である. このような格子を **斜方格子** とよぶ. さらに対称性が高い格子として  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  が長方形をなす場合, 及び菱形をなす場合がある.

格子が位数 3 以上の回転対称性を持つ場合には, 可能な回転の位数は 3, 4, 6 であることを考慮すると,  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$  かつ, これらのなす角度が  $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}$  の場合があり得るが,  $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{6}$  のときは同じ格子と定める.

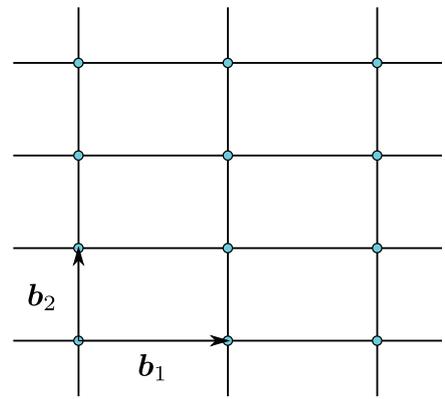
これらをまとめて基本的な格子は **斜方格子**, **長方格子**, **菱形格子** (面心長方格子), **六角格子**, **正方格子** である (図 1).

### 3 orbifold

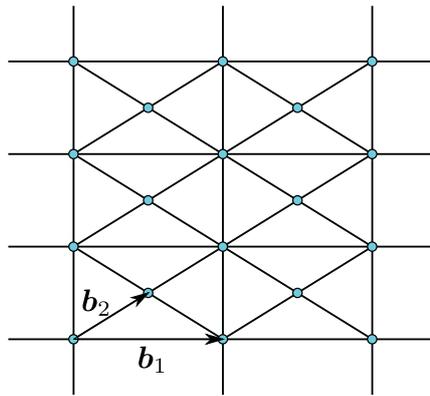
**定義 3.1.** 距離空間  $X$  が **コンパクト** であるとは,  $X$  の部分集合  $A$  が無限個の要素を含むとき,  $A$  は必ず  $X$  に集積点をもつことである.



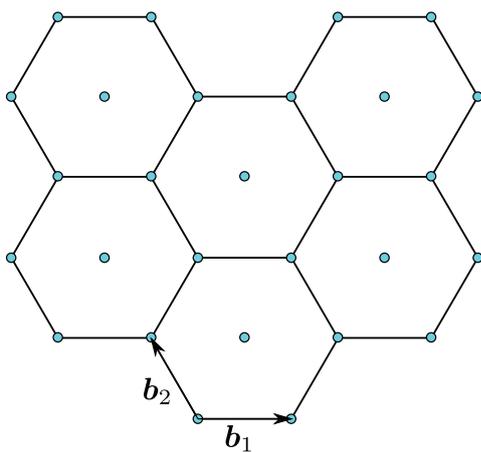
斜方格子



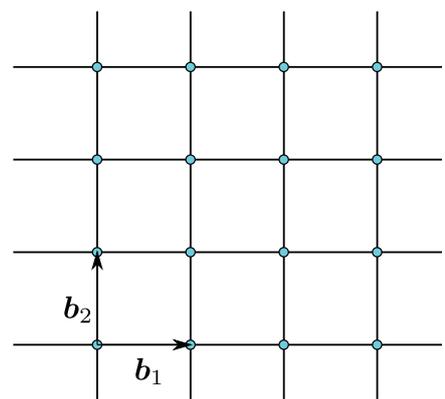
長方格子



菱形格子



六角格子



正方格子

図1 2次元における格子の種類

**命題 3.2.**  $\Gamma$  を  $\mathbb{E}^n$  の合同変換からなる不連続群とするとき. 軌道  $\Gamma \cdot \mathbf{x}$  と  $\Gamma \cdot \mathbf{y}$  の距離を

$$d(\Gamma \cdot \mathbf{x}, \Gamma \cdot \mathbf{y}) = \min_{g, h \in \Gamma} d(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{y}))$$

で定義することができて, この距離について, 軌道全体の集合  $\mathbb{E}^n/\Gamma$  は距離空間になる.

証明. まず, 上式の右辺で,  $g, h \in \Gamma$  とするときの距離の最小値が実際に存在することを示す. 実数の連続性より, 下限

$$\inf_{g, h \in \Gamma} d(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{y})) \quad (4)$$

が存在する. ここで,  $\Gamma$  は合同変換からなることから,

$$d(g(\mathbf{x}), h(\mathbf{y})) = d(\mathbf{x}, g^{-1}h(\mathbf{y}))$$

が成立し, また,  $g, h \in \Gamma$  を動かすとき,  $g^{-1}h$  は  $\Gamma$  の要素をすべて動くので,

$$d(\Gamma \cdot \mathbf{x}, \Gamma \cdot \mathbf{y}) = \min_{g \in \Gamma} d(\mathbf{x}, g(\mathbf{y}))$$

とも表すことができる. ゆえに式 (4) は

$$\inf_{g \in \Gamma} d(\mathbf{x}, g(\mathbf{y}))$$

とも表される. ここで, 命題 2.17 の証明の議論を用いることにより,  $\Gamma$  が不連続であることから, この下限は,  $g \in \Gamma$  についての  $d(\mathbf{x}, g(\mathbf{y}))$  の最小値であることが分かる.

次に, このように定めた  $d(\Gamma \cdot \mathbf{x}, \Gamma \cdot \mathbf{y})$  が距離空間の条件を満たすことを示す.  $d(\Gamma \cdot \mathbf{x}, \Gamma \cdot \mathbf{y}) \geq 0$  であることは, 定義式より直ちにしたがう. また  $\Gamma \cdot \mathbf{x} \neq \Gamma \cdot \mathbf{y}$  とすると,  $\mathbf{x}$  は,  $\Gamma \cdot \mathbf{y}$  の要素でなく, また,  $\Gamma$  の作用が不連続であることから,  $d(\mathbf{x}, g(\mathbf{y}))$  は正の最小値をもつ. したがって,  $d(\Gamma \cdot \mathbf{x}, \Gamma \cdot \mathbf{y}) = 0$  となるのは,  $\Gamma \cdot \mathbf{x} = \Gamma \cdot \mathbf{y}$  のときに限る. 距離空間の条件 2 は, 定義式より直ちに得られる. 最後に条件 3 を示す. 軌道  $\Gamma \cdot \mathbf{x}, \Gamma \cdot \mathbf{y}, \Gamma \cdot \mathbf{z}$  の要素  $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'$  をそれぞれとる. ユークリッド距離の 3 角不等式と  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  の距離の定義から,

$$d(\Gamma \cdot \mathbf{x}, \Gamma \cdot \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}', \mathbf{z}') \leq d(\mathbf{x}', \mathbf{y}') + d(\mathbf{y}', \mathbf{z}')$$

が得られる. ここで,  $\mathbf{y}'$  を固定して,  $\mathbf{x}', \mathbf{z}'$  についての最小値をとると, 求める式

$$d(\Gamma \cdot \mathbf{x}, \Gamma \cdot \mathbf{z}) \leq d(\Gamma \cdot \mathbf{x}, \Gamma \cdot \mathbf{y}) + d(\Gamma \cdot \mathbf{y}, \Gamma \cdot \mathbf{z})$$

が得られる. □

**定義 3.3.** 軌道全体の集合に命題 3.2 で定まる距離を入れた距離空間を **軌道空間** とよび.  $\mathbb{E}^n/\Gamma$  で表す. また,  $\mathbb{E}^n$  から軌道空間への写像

$$p: \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^n/\Gamma$$

を  $n$  次元ユークリッド空間から軌道空間への射影とよぶ.

**定理 3.4.**  $\Gamma$  が  $\mathbb{E}^n$  の合同変換からなる不連続群で、固定点をもたないとする。射影  $p: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n/\Gamma$  において、 $\mathbb{E}^n$  の任意の点  $\mathbf{x}$  に対して、正の数  $\varepsilon$  を十分小さくとると、 $\mathbf{x}$  の  $\varepsilon$  近傍  $U_\varepsilon(\mathbf{x})$  への制限は、等長写像

$$p|_{U_\varepsilon(\mathbf{x})}: U_\varepsilon(\mathbf{x}) \rightarrow U_\varepsilon(\Gamma \cdot \mathbf{x})$$

を与える。

証明.  $\mathbb{E}^n$  の点  $\mathbf{x}$  に対して、 $\Gamma$  が不連続群で、固定点をもたないことから、命題 2.17 より、恒等変換でない  $g \in \Gamma$  に対する  $d(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$  の正の最小値が存在する。この最小値を  $r$  とおき、 $\varepsilon = \frac{r}{4}$  とする。近傍  $U_{\frac{r}{4}}(\mathbf{x})$  の点  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  をとる。このとき

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = d(\Gamma \cdot \mathbf{y}, \Gamma \cdot \mathbf{z}) \quad (5)$$

を示す。ここで右辺は、軌道  $\Gamma \cdot \mathbf{y}, \Gamma \cdot \mathbf{z}$  の軌道空間における距離で

$$d(\Gamma \cdot \mathbf{y}, \Gamma \cdot \mathbf{z}) = \min_{g \in \Gamma} d(\mathbf{y}, g(\mathbf{z}))$$

であった。3角不等式より、

$$d(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, g(\mathbf{z})) + d(g(\mathbf{z}), g(\mathbf{x}))$$

が成り立つ。ここで、 $d(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \geq r$  および、

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \frac{r}{4}, \quad d(g(\mathbf{z}), g(\mathbf{x})) = d(\mathbf{z}, \mathbf{x}) < \frac{r}{4}$$

を用いると、

$$d(\mathbf{y}, g(\mathbf{z})) > \frac{r}{2}$$

が得られ、一方  $d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) < \frac{r}{2}$  である。これは、軌道空間における  $\Gamma \cdot \mathbf{y}$  と  $\Gamma \cdot \mathbf{z}$  の距離は  $\mathbb{E}^n$  における  $\mathbf{y}$  と  $\mathbf{z}$  の距離で表されることが分かり、式 (5) が示された。以上により、 $\varepsilon \leq \frac{r}{4}$  とすれば、 $p$  の  $U_\varepsilon(\mathbf{x})$  への制限は、等長写像

$$p: U_\varepsilon(\mathbf{x}) \rightarrow U_\varepsilon(\Gamma \cdot \mathbf{x})$$

を与える。 □

定理 3.4 より、 $\Gamma$  が  $n$  次元ユークリッド空間の合同変換からなる不連続群で、固定点をもたないとき、軌道空間  $\mathbb{E}^n/\Gamma$  の各点は、 $\mathbb{E}^n$  の球の内部と合同な近傍をもつことが示された。

さて、 $\Gamma$  が  $n$  次元ユークリッド空間の合同変換からなる不連続群で、固定点をもたないとする。定理 3.4 で示したように、射影  $p: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n/\Gamma$  について、 $\mathbb{E}^n$  の任意の点  $\mathbf{x}$  に対して、正の数  $\varepsilon$  を十分小さくとると、 $\mathbf{x}$  の  $\varepsilon$  近傍  $U_\varepsilon(\mathbf{x})$  への制限は、等長写像

$$p: U_\varepsilon(\mathbf{x}) \rightarrow U_\varepsilon(\Gamma \cdot \mathbf{x})$$

を与える。このとき、軌道  $\Gamma \cdot \mathbf{x}$  の  $\varepsilon$  近傍  $U_\varepsilon(\Gamma \cdot \mathbf{x})$  から出発すると、 $p$  によって、 $U_\varepsilon(\Gamma \cdot \mathbf{x})$  への等長写像が定義されるような  $\mathbb{E}^n$  のある点の開近傍は

$$U_\varepsilon(g(\mathbf{x})), \quad g \in \Gamma$$

と表される。これらは互いに合同変換群  $\Gamma$  の要素の作用でうつりあう、上のような  $U_\varepsilon(g(\mathbf{x}))$  から 1 つ選び、それを  $U$  とおくと、 $p$  の  $U$  への制限の逆写像として、等長写像

$$\varphi: U_\varepsilon(\Gamma \cdot \mathbf{x}) \longrightarrow U$$

が得られる。このようにして、軌道空間の各点の開近傍から、 $\mathbb{E}^n$  の球の内部への等長写像を構成することができる。軌道空間の異なる点について、上のような開近傍の族  $\{U_i\}_{i \in I}$  をとると、

$$\mathbb{E}^n / \Gamma = \bigcup_{i \in I} U_i$$

と表される。それぞれの  $U_i$  が  $\mathbb{E}^n$  のある球の内部と合同である。このような  $U_i, U_j$  について、 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  とすると、 $\mathbb{E}^n$  の球の内部への等長写像

$$\varphi_i: U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i), \quad \varphi_j: U_j \longrightarrow \varphi_j(U_j)$$

について、

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

は  $\mathbb{E}^n$  における等長写像となる。つまり、 $\varphi_i$  によって、軌道空間  $M = \mathbb{E}^n / \Gamma$  の局所的なモデルが  $\mathbb{E}^n$  に構成され、それらの変換は、 $n$  次元ユークリッド空間における等長写像で与えられている。この構成で、変換  $\varphi_{ij}$  が向きを保つようにとれるとき、軌道空間  $M$  は、向き付け可能であるという。そうでないとき、軌道空間  $M$  は向き付け不可能であるという。

**定義 3.5.** 距離空間  $X, Y$  の間の連続写像  $\pi: X \longrightarrow Y$  が **被覆写像**(covering map) であるとは、 $Y$  の任意の点  $y$  について、 $y$  のある開近傍  $U$  が存在し、次の条件を満たすことである。

1.  $U$  の  $\pi$  による逆像は

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i$$

と  $X$  の開集合  $\tilde{U}_i$  ( $i \in I$ ) の互いに共通部分をもたない和集合で表される。

2. 写像  $\pi$  を  $\tilde{U}_i$  に制限した

$$\pi|_{\tilde{U}_i}: \tilde{U}_i \longrightarrow U$$

は等長写像である。

被覆写像  $\pi: X \longrightarrow Y$  において、 $Y$  の任意の点  $y$  に対して、 $\pi^{-1}(y)$  が、 $d$  個の点からなるとき、 $\pi$  を次数  $d$  の被覆写像とよぶ。

**定義 3.6.** 距離空間  $X$  と  $Y$  の間の連続写像  $\pi: X \rightarrow Y$  が **分岐被覆**(branched covering) であるとは、**分岐集合** とよばれる  $Y$  の閉集合  $S$  で、 $S \neq Y$  であるものがあって、 $\pi$  の  $S$  の補集合  $Y' = Y \setminus S$  の逆像  $X' = \pi^{-1}(Y')$  への制限  $p'$  が、被覆写像  $p': X' \rightarrow Y'$  を与えることである。 $Y'$  の点  $y$  の逆像が  $d$  個の点からなるとき、 $\pi$  を次数  $d$  の分岐被覆とよぶ。

**定義 3.7.** 距離空間  $M$  が距離空間  $X$  をモデルとする orbifold であるとは  $M$  が次の条件を満たすような開集合族  $\{U_i\}_{i \in I}$  の和集合として表されることである。

1.  $X$  のある点の近傍として表される開集合,  $\tilde{U}_i$  ( $i \in I$ ) と連続写像  $p_i: \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ , および,  $\tilde{U}_i$  に作用する  $X$  の等長変換からなる有限群  $G_i$  があって,  $p_i$  は等長写像

$$\tilde{U}_i/G_i \longrightarrow U_i$$

を導く.

2.  $\tilde{U}_i$  の点  $x_i$  と  $\tilde{U}_j$  の点  $x_j$  に対して,  $p_i(x_i) = p_j(x_j)$  ならば,  $x_i$  を含む  $\tilde{U}_i$  の開集合  $\tilde{V}_i$  と,  $x_j$  を含む  $\tilde{U}_j$  の開集合  $\tilde{V}_j$ , 及び等長写像  $\varphi_{ij}: \tilde{V}_i \rightarrow \tilde{V}_j$  で, すべての  $x \in \tilde{V}_i$  に対して

$$p_j \circ \varphi_{ij}(x) = p_i(x)$$

を満たすものが存在する.

特に, すべての有限群  $G_i$  が恒等変換のみからなる群であるとき,  $M$  は,  $X$  をモデルとする幾何構造をもつという. また,  $X = \mathbb{E}^n$  のときは,  $M$  を  $n$  次元 orbifold または,  $n$ -orbifold とよぶ.

**例 3.8.**  $G_i = C_6, X = \mathbb{E}^2, M = \mathbb{E}^2/C_6$  のとき, orbifold の構成は図 2 のようになる. 原点  $O$  に  $C_6$  の固定点を設置する.  $\mathbb{E}^2$  の原点の開近傍における  $U_\varepsilon(O)/C_6$  と, 無限にのびた円錐の頂点における開近傍  $U_\varepsilon(P)$  は合同になっている. また, orbifold の定義 2 における  $\varphi_{ij}$  は  $\mathbb{E}^2$  の原点を中心とした  $\frac{2\pi}{6}$  回転に相当している.

**例 3.9.**  $\Gamma$  が  $\mathbb{E}^n$  の合同変換からなる不連続群で, 固定点をもたないとき,  $\mathbb{E}^n/\Gamma$  は  $\mathbb{E}^n$  をモデルとする幾何構造をもつ.

**定義 3.10.**  $M$  を  $\mathbb{E}^n$  をモデルする  $n$ -orbifold とする.  $x \in M$  が,  $\mathbb{E}^n$  の原点の開近傍  $\tilde{U}$  と  $\tilde{U}$  に作用する  $\mathbb{E}^n$  の合同変換からなる有限群  $G$  で,  $\tilde{U}/G$  と合同な近傍をもつとき, 点  $x$  をタイプ  $G$  の **特異点**(singular point) とよぶ.

ここで,  $M$  のセル分割で, それぞれのセル  $e_i$  について,  $e_i$  の境界を除くすべての点  $x$  の開近傍が, 同じ有限群  $G_i$  を用いて,  $U/G_i$  と合同になるようなものをとる. ここで  $U$  は,  $\mathbb{E}^n$  の原点の開近傍のことである. さらに,  $e_i$  の次元を  $d_i$  とする. このとき,  $M$  の orbifold Euler number を

$$\chi^{orb}(M) = \sum_i (-1)^{d_i} \frac{1}{|G_i|}$$

と定義する. ここで和はすべてのセルについてとる. とくに, すべての  $G_i$  が単位元のみからなるときは,  $\chi^{orb}(M)$  は通常 Euler number に一致する.

## 4 平面結晶群における 2 次元 orbifold

まず  $\mathbb{E}^2$  における合同変換について述べる.  $l$  を  $\mathbb{E}^2$  上の直線とする.  $P \in \mathbb{E}^2$  に対して,  $P$  と対称な位置にある点を対応させる合同変換  $r: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$  を直線  $l$  に関する **鏡映**(reflection) とよぶ.

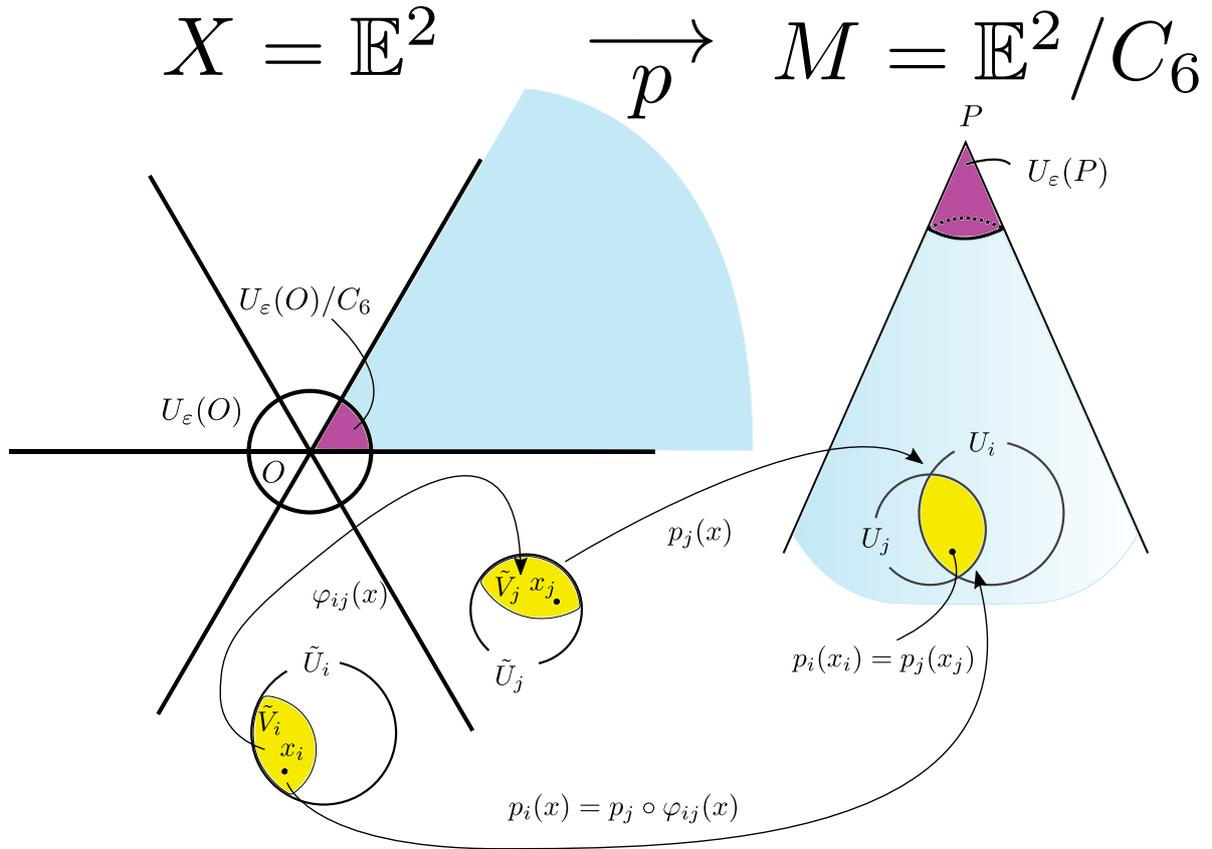


図2 orbifold の定義

直線  $l$  を鏡映の軸とよび、軸を明示する必要があるときは、鏡映  $r$  を  $r_l$  で表す。

点  $C$  を中心として、反時計回りに  $\theta$  回転させる **回転移動**(rotation) を  $a_{C,\theta}$  で表す。中心や回転角を明示する必要がないときは、 $C, \theta$  を省略することがある。

ベクトル  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$  を用いて

$$t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

と表される合同変換は、**平行移動**(translation) である。この平行移動を  $t_{\mathbf{b}}$  と表示する。

$\mathbb{E}^2$  の直線  $l$  と  $l$  上のベクトル  $\mathbf{b}$  をとる。鏡映  $r_l$  と平行移動  $t_{\mathbf{b}}$  の合成  $t_{\mathbf{b}}r_l$  を、直線  $l$  とベクトル  $\mathbf{b}$  についての **並進鏡映**(glide reflection) とよび、 $s_{l,\mathbf{b}}$  で表す。直線  $l$  を並進鏡映の軸とよぶ。これを単に  $s$  と略記することもある。ベクトル  $\mathbf{b}$  を零ベクトル  $\mathbf{0}$  とすると、上の並進鏡映は  $l$  についての鏡映となる。したがって、鏡映は並進鏡映の特別な場合とみなすことができる。

今、 $\mathbb{E}^2$  上の 1 点  $P$  を固定するような回転移動のなす不連続群  $\Gamma$  を考える。 $P$  を原点になるような座標をとると、回転移動全体は 2 次特殊直交群  $SO(2)$  となる。つまり、 $\Gamma$  は  $SO(2)$  の離散部分群と言い換えられる。原点を中心とする半径 1 の円を  $S^1$  とおくと、 $S^1$  は  $\Gamma$  の作用で不変である。

**命題 4.1.**  $SO(2)$  の離散部分群は有限である。

証明.  $SO(2)$  の離散部分群  $\Gamma$  の位数が有限でないとすると,  $S^1$  上の  $\boldsymbol{x} = (1, 0)$  の軌道  $\Gamma \cdot \boldsymbol{x}$  は無限個の点からなる. ここで  $S^1$  を円弧に分割していくと, いずれかの円弧が無限個の  $\Gamma \cdot \boldsymbol{x}$  の要素を含むことになる. 分割をいくらでも細かくとれるので, これは  $\Gamma \cdot \boldsymbol{x}$  が集積点をもたないことに矛盾する. したがって,  $\Gamma$  の位数は有限である.  $\square$

**定理 4.2.**  $SO(2)$  の離散部分群は巡回群  $C_n$  である.

証明.  $SO(2)$  の離散部分群を  $\Gamma$  とする.  $\Gamma$  が恒等変換のみからなるときは,  $C_1$  とみなせるので,  $\Gamma$  は恒等変換以外の要素を含むとする. 命題 4.1 より,  $\Gamma$  の位数は有限なので,  $\Gamma$  に含まれる回転のうち, 回転角が正の最小値をとるものが存在するので, その回転角を  $\theta, 0 < \theta < 2\pi$  とする. 回転角が  $\theta$  の回転移動を  $a$  で表す. ここで,  $n\theta \geq 2\pi$  を満たすような最小の自然数  $n$  をとる.  $n$  の最小性より,  $(n-1)\theta < 2\pi \leq n\theta$  となるが, もし,  $(n-1)\theta < 2\pi < n\theta$  とすると  $\theta$  の最小性に反する. したがって,  $n\theta = 2\pi$  が成立する. また,  $\Gamma$  は回転角  $\phi$  がある自然数  $k$  について,

$$(k-1)\theta < \phi < k\theta$$

を満たすような回転を含まない. 実際, このような回転  $a'$  が存在すると, 合成  $a'a^{-(k-1)}$  を考えることにより,  $\theta$  の最小性に反することが分かる. したがって  $\Gamma$  は回転角  $\frac{2\pi}{n}$  の回転移動で生成される巡回群  $C_n$  である.  $\square$

**定理 4.3.**  $O(2)$  の離散部分群  $\Gamma$  が向きを逆にする変換を含むならば, 2面体群  $D_n$  である.

証明.  $\Gamma$  は鏡映を含むので, その1つを  $r$  とする.  $\Gamma$  の要素のうち, 向きを保つもの全体は定理 4.2 より, 巡回群  $C_n$  となる.  $\Gamma$  は

$$\Gamma = C_n \cup rC_n$$

と剰余類に類別されるので, 2面体群  $D_n$  となる.  $\square$

**定理 4.4.** 平面結晶群  $\Gamma$  に含まれる恒等変換でない回転移動について, その位数は 2, 3, 4, 6 のいずれかである.

証明.  $\Gamma$  に含まれる恒等変換ではない回転移動を  $a$  として, その回転の中心を原点  $O$  とする座標をとる. 命題 4.1 によって,  $a$  の位数は有限であるから, それを  $n$  とする. 格子  $L_{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2}$  に含まれる大きさが最小の零ベクトルではないベクトルを  $\boldsymbol{b}$  として, 原点  $O$  を始点とする  $\boldsymbol{b}$  の終点を  $P$  とおく. 回転移動  $a$  の回転角を  $\frac{2\pi}{n}$  として, まず,  $n \leq 6$  であることを示す. 図 3 のように,  $n > 6$  と仮定して,  $Q = a(P)$  とすると,  $Q \in L_{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2}$  で,  $d(P, Q) < d(O, P)$  となるので, これは  $\boldsymbol{b}$  の大きさの最小性に反する. したがって,  $n \leq 6$  である.

次に  $n = 5$  と仮定すると, 上の点  $P$  に,  $O$  を中心とする回転角  $\frac{4\pi}{5}$  の回転を施して得られる点を  $R$  とする.  $O$  を始点,  $R$  を終点とするベクトルを  $\boldsymbol{b}'$  とおくと, 図 3 のように, ベクトル  $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'$  の大きさは,  $\boldsymbol{b}$  の大きさよりも小さくなり,  $\boldsymbol{b}$  の大きさの最小性に反する. したがって,  $n \neq 5$  である. 以上で定理が証明された.  $\square$

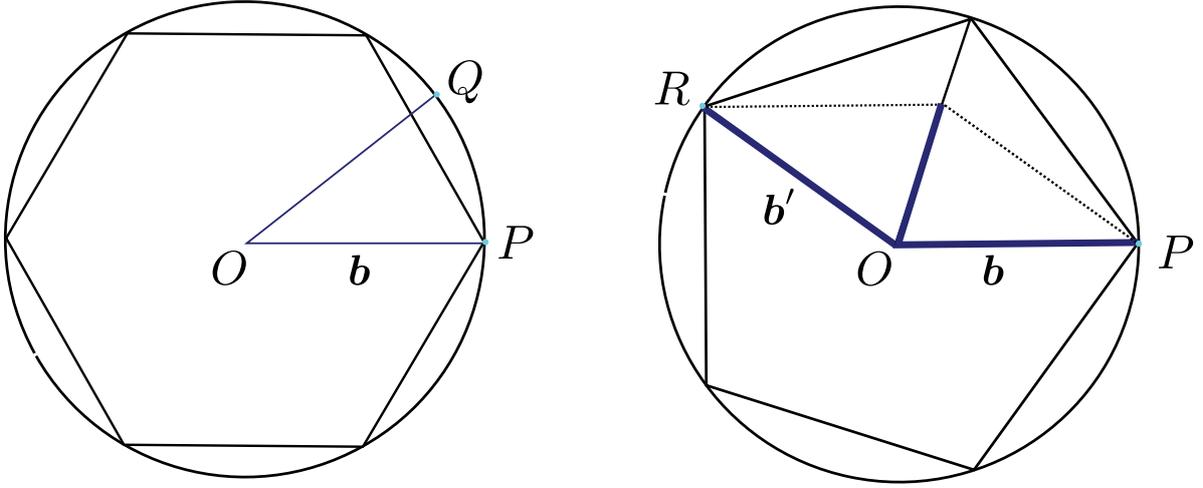


図3 結晶群の回転移動の位数の制限

**定理 4.5.**  $x \in \mathbb{E}^2$  に対し, 平面結晶群  $\Gamma$  の固定部分群  $\Gamma_x$  は次のいずれかと同型である.

1. 恒等変換のみからなる群  $\{e\}$
2. 巡回群  $C_2, C_3, C_4, C_6$
3. 2面体群  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_6$

証明. 固定部分群  $\Gamma_x$  が向きを保つ変換のみからなるときは定理 4.4 より, 1 または 2 の場合が生じる.  $\Gamma_x$  が向きを逆にする変換を含むとき, それは, 点  $x$  を通る直線に関する鏡映である. そのような鏡映を  $r$  とする.  $\Gamma_x$  の要素で向きを保つ変換全体からなる部分群を  $\Gamma_x^+$  とおくと,  $\Gamma_x$  は

$$\Gamma_x = \Gamma_x^+ \cup r\Gamma_x^+$$

と剰余類に類別される. ここで,  $\Gamma_x^+$  は, 定理に挙げた 1 または 2 の群と同型であるから  $\Gamma_x$  は 2 面体群となり, 求める結論が得られる.  $\square$

**定理 4.6.**  $\Gamma$  を  $\mathbb{E}^2$  の合同変換からなる不連続群とする. このとき, 軌道空間  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  は 2-orbifold すなわち,  $\mathbb{E}^2$  をモデルとする orbifold の構造をもつ.

証明. 軌道空間  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  への射影を  $p: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2/\Gamma$  で表す.  $\Gamma$  が固定点をもたないとき, 定理 3.4 と例 3.9 で述べたように,  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  は,  $\mathbb{E}^2$  をモデルとする幾何構造をもつ.

$\Gamma$  が固定点をもつとして, その 1 つを  $x$  とする. 定理 4.2, 定理 4.3 より固定部分群  $\Gamma_x$  は巡回群  $C_n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), または, 2面体群  $D_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) である. 固定点  $x$  の  $\varepsilon$  近傍  $U_\varepsilon(x)$  を十分小さくとり,  $U_\varepsilon(x)$  の点  $y$  に対して,  $g(y)$  (ただし,  $g \in \Gamma, g \notin \Gamma_x$ ) は,  $U_\varepsilon(x)$  に含まれないようにできる. 実際, 命題 2.17 の証明の議論と同様にして, 距離  $d(x, g(x))$  は,  $g \in \Gamma, g \notin \Gamma_x$  について, 正の最小値  $r$  ををもつので, 正の数  $\varepsilon$  を  $r$  に対して, 十分小さくとればよい. 射影  $p: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2/\Gamma$  を  $U_\varepsilon(x)$  に制限すると,

$$p|_{U_\varepsilon(x)}: U_\varepsilon(x) \rightarrow p(U_\varepsilon(x))$$

は、等長写像  $U_\varepsilon(\mathbf{x})/G \rightarrow p(U_\varepsilon(\mathbf{x}))$  を導く。ここで  $G$  は  $C_n$  または  $D_n$  である。

このようにして、軌道空間  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  は、 $\mathbb{E}^2$  の点の近傍  $\tilde{U}_i$  の  $p_i = p|_{\tilde{U}_i}$  による像  $U_i$  ( $i \in I$ ) の和集合として表され  $p_i$  は等長写像

$$\tilde{U}_i/G_i \longrightarrow U_i$$

を導く。ここで  $G_i$  は、恒等変換のみからなる群、 $C_n$  または  $D_n$  である。ここで、 $p(\tilde{U}_i) = U_i$  となるような、 $\tilde{U}_i$  の選び方は、1通りに決まらないが、それらは、互いに  $\mathbb{E}^2$  の等長変換でうつりあう。また、写像  $p_i: \tilde{U}_i \rightarrow U_i, p_j: \tilde{U}_j \rightarrow U_j$  が共に、 $C_n$  または  $D_n$  の軌道空間への射影になっているとき、 $U_i \cap U_j$  の開集合  $W$  について、 $p_i, p_j$  によって  $W$  にうつるような  $\tilde{U}_i, \tilde{U}_j$  の開集合の選び方は、1通りに決まらないが、それらは  $C_n$  または  $D_n$  の作用でうつりあう。このことから、 $\mathbb{E}^2$  をモデルとする orbifold の条件 2 がしたがう。□

**例 4.7.** 巡回群  $C_n$  の  $\mathbb{E}^2$  への作用について、射影  $p: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2/C_n$  は分岐被覆であり、分岐集合は、軌道空間である無限にのびた円錐の頂点  $P$  となる。2面体群  $D_n$  の  $\mathbb{E}^2$  への作用についても、射影  $p: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2/D_n$  は分岐被覆である。軌道空間を無限にのびた扇形領域で表したとき、分岐集合は、境界の領域となる。

さらに、定理 4.6 の証明から、次の命題が成り立つことがわかる。

**命題 4.8.**  $\Gamma$  を  $\mathbb{E}^2$  の合同変換からなる不連続群とする。このとき、射影  $p: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2/\Gamma$  は分岐被覆である。分岐集合  $S$  としては、 $\Gamma$  の固定点の集合の  $p$  による像がとれる。

**定理 4.9.**  $\Gamma$  を平面結晶群とする。このとき、2-orbifold  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  は、トーラス  $T$  からの次数が有限の分岐被覆  $\pi: T \rightarrow \mathbb{E}^2/\Gamma$  として表される。

証明. 平面結晶群の定義から、 $\Gamma$  と  $\mathbb{E}^2$  の平行移動からなる群の共通部分  $\Gamma \cap \mathbb{T}$  は格子群となり、 $\Gamma$  の正規部分群である。軌道空間  $\mathbb{E}^2/(\Gamma \cap \mathbb{T})$  は  $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  である。 $\mathbb{E}^2/\Gamma$  は  $T$  の剰余群  $\Gamma' = \Gamma/(\Gamma \cap \mathbb{T})$  の作用による軌道空間とみることができる ( $\mathbb{E}^2/\Gamma = (\mathbb{E}^2/(\Gamma \cap \mathbb{T})) / (\Gamma/(\Gamma \cap \mathbb{T}))$ ) とみている)。  $\Gamma'$  の  $T$  への作用は不連続であり、 $T$  はコンパクトであることから、各点の軌道は有限個の要素からなる。なぜなら、軌道が無数個の要素をもつとすると、 $T$  がコンパクトであるから、定義 3.1 より軌道が集積点をもつことになり、作用が不連続になることに反するからである。また、 $T$  の点  $x$  の固定部分群  $\Gamma'_x$  は、恒等変換のみからなるか、 $C_n, D_n$  のいずれかである。したがって定理 2.11 より、 $\Gamma'$  は有限群であることがわかる。射影  $\pi': T \rightarrow T/\Gamma'$  は、 $\Gamma'$  の位数を次数とし、 $\Gamma'$  の固定点の集合の像を分岐集合とする分岐被覆となる。□

定理 4.9 より、平面結晶群に対して、 $T$  からの分岐被覆で与えられる 2-orbifold が対応することが分かった。平面結晶群を分類するには、このような 2-orbifold を分類すればよい。

$\Gamma$  が平面結晶群のとき、定理 4.3 より、有限群  $G_i$  の可能性としては

1. 恒等変換のみからなる群  $\{e\}$
2. 巡回群  $C_2, C_3, C_4, C_6$

3. 2面体群  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_6$

のいずれかの場合に限られる.

**定理 4.10.**  $\Gamma$  を平面結晶群とする. このとき軌道空間  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  の orbifold Euler number について,

$$\chi^{orb}(\mathbb{E}^2/\Gamma) = 0$$

が成り立つ.

証明.  $\Gamma$  は平面結晶群であるから, 軌道空間  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  は  $\mathbb{E}^2$  をモデルとする orbifold であり, 定理 4.9 より,  $T$  からの次数が有限の分岐被覆  $\pi: T \rightarrow \mathbb{E}^2/\Gamma'$  として表される. 分岐被覆の次数は,  $\Gamma'$  の位数  $|\Gamma'|$  であり, これを  $d$  とおく.

軌道空間  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  のセル分割を orbifold Euler number の定義に適合するように与える. このセル分割は,  $\Gamma$  の作用による基本領域のセル分割を与え, これに  $\Gamma$  の作用を施すと,  $\Gamma \cap \mathbb{T}$  の基本領域である単位胞のセル分割を与える. すなわち,  $T$  のセル分割を導く. この  $T$  のセル分割における, 0次元セル, 1次元セル, 2次元セルの個数をそれぞれ  $\nu_0, \nu_1, \nu_2$  とおく. 分岐被覆  $\pi$  の分岐集合に含まれていないセルについては,  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  の1個のセルに  $T$  のセル  $d$  個が対応する. つまり,  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  の分岐集合に含まれていない0次元セル, 1次元セル, 2次元セルの個数をそれぞれ  $k, \ell, m$  とすれば,  $T$  のセルの個数は  $k, \ell, m$  をそれぞれ  $d$  倍したものになる.

セルが分岐集合に含まれ, セル内部の点を  $\mathbf{x}$  とすると, 定理 2.11 より,  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  の1個のセルに  $T$  のセル  $d/|\Gamma\mathbf{x}|$  個が対応する. つまり,  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  において, 分岐集合に含まれていない0次元セル, 1次元セル, 2次元セルの個数をそれぞれ  $k, \ell, m$  とし, 分岐集合に含まれている0次元セル  $k'$  個の  $v_1, v_2, \dots, v_{k'}$ , 1次元セル  $\ell'$  個の  $e_1, e_2, \dots, e_{\ell'}$ , 2次元セル  $m'$  個の  $f_1, f_2, \dots, f_{m'}$ , における計算は, 有限群  $G$  を用いると,  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  における orbifold Euler number は

$$\begin{aligned} \chi^{orb}(\mathbb{E}^2/\Gamma) &= \left( k + \frac{1}{|G_{v_1}|} + \frac{1}{|G_{v_2}|} + \dots + \frac{1}{|G_{v_{k'}}|} \right) \\ &\quad - \left( \ell + \frac{1}{|G_{e_1}|} + \frac{1}{|G_{e_2}|} + \dots + \frac{1}{|G_{e_{\ell'}}|} \right) \\ &\quad + \left( m + \frac{1}{|G_{f_1}|} + \frac{1}{|G_{f_2}|} + \dots + \frac{1}{|G_{f_{m'}}|} \right) \end{aligned}$$

となり,

$$d \left( k + \frac{1}{|G_{v_1}|} + \frac{1}{|G_{v_2}|} + \dots + \frac{1}{|G_{v_{k'}}|} \right) = \nu_0$$

$$d \left( \ell + \frac{1}{|G_{e_1}|} + \frac{1}{|G_{e_2}|} + \dots + \frac{1}{|G_{e_{\ell'}}|} \right) = \nu_1$$

$$d \left( m + \frac{1}{|G_{f_1}|} + \frac{1}{|G_{f_2}|} + \dots + \frac{1}{|G_{f_{m'}}|} \right) = \nu_2$$

であるから,

$$\nu_0 - \nu_1 + \nu_2 = d\chi^{orb}(\mathbb{E}^2/\Gamma)$$

が得られる. 左辺は,  $T$  の Euler number  $\chi(T)$  であり, つねに 0 となる. したがって,  $\chi^{orb}(\mathbb{E}^2/\Gamma) = 0$  となり, 定理が証明された.  $\square$

**命題 4.11.**  $\Gamma$  を平面結晶群とする. 軌道空間  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  の特異点を  $p_1, \dots, p_k$  として, それらのタイプを, それぞれ  $C_{n_1}, \dots, C_{n_k}$  とするとき,  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  と同相な閉曲面  $\Sigma$  の Euler number は,

$$\chi(\Sigma) = \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_j}\right)$$

で与えられる.

証明. 特異点  $p_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) を 0 次元セルとして含むような,  $\Sigma$  のセル分割をとる.  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  の orbifold Euler number は,  $\Sigma$  の Euler number を用いて,

$$\chi^{orb}(\mathbb{E}^2/\Gamma) = \chi(\Sigma) - k + \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j}$$

と表される. 定理 4.10 により, 軌道空間  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  の orbifold Euler number について,  $\chi^{orb}(\mathbb{E}^2/\Gamma) = 0$  が成り立つことを合わせると, 求める式が得られる.  $\square$

**例 4.12** (平面結晶群 P2). 格子が斜方形で, 点群として  $C_2$  のタイプをもつとする. この平面結晶群  $\Gamma$  を P2 と表す. このとき,

$$\frac{1}{2}m_1\mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{b}_2, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$$

の位置に位数 2 の固定部分群が生まれる. また, 基本領域として平行 4 辺形の半分がとれる. 軌道空間  $\mathbb{E}^2/\Gamma$  は, 基本領域の平行 4 辺形の境界の貼り合わせとして, 図 4 のように表される. 軌道空間は  $\mathbb{S}^2$  と同相であり, 4 つの  $C_2$  タイプの特異点をもつ orbifold となる. これを記号 S2222 で表す. また, orbifold Euler number は

$$\chi^{orb}(\mathbb{E}^2/\Gamma) = \frac{1}{2} \times 4 - 4 + 2 = 0$$

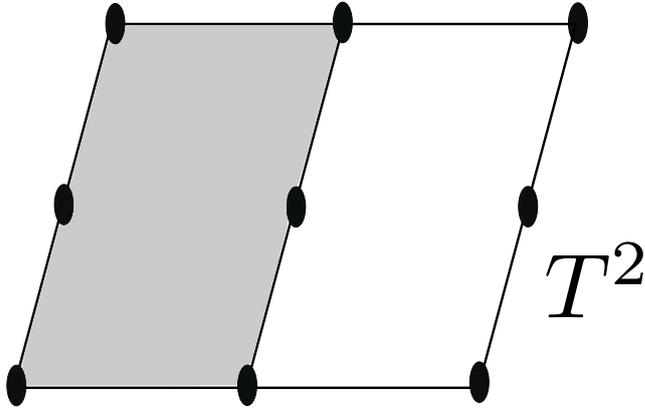
となる.

**例 4.13** (平面結晶群 P4mm). 格子が正方形で, 点群として  $D_4$  のタイプをもつとする. この平面結晶群  $\Gamma$  を P4mm と表す.  $\Gamma$  を平面結晶群 P4mm とする. 基本領域は, 直角 2 等辺 3 角形がとれ, 軌道空間は 2 次元閉円板  $D^2$  と同相である. また,  $D_4, D_4, D_2$  のタイプの特異点をもつので, この orbifold を D4'4'2' と表す. orbifold Euler number は

$$\chi^{orb}(\mathbb{E}^2/\Gamma) = \left(\frac{1}{8} \times 2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \times 3 + 1 = 0$$

となる.

P2



● 位数2の固定部分群

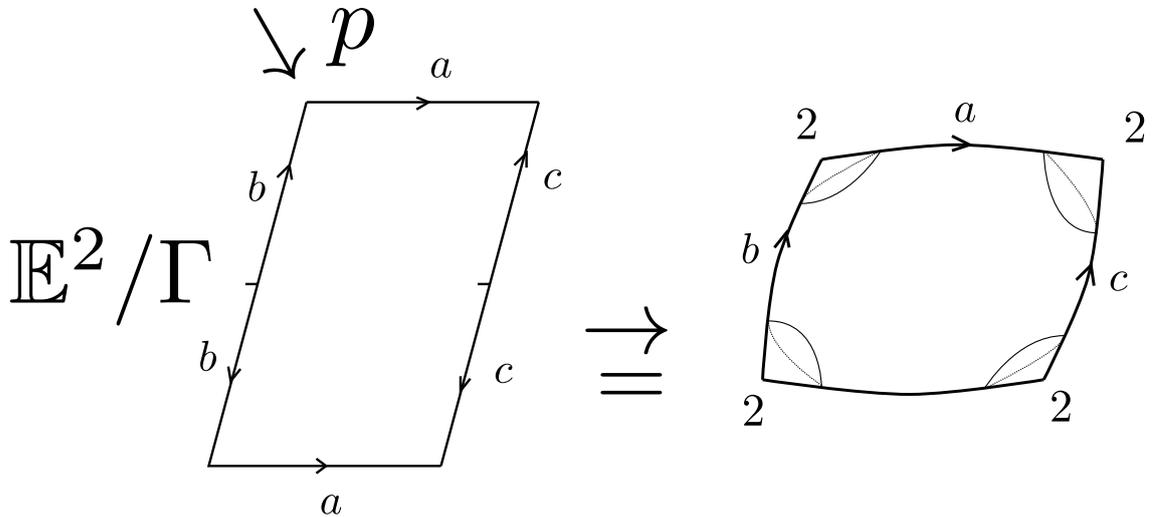


図4 P2における orbifold

## 5 S<sup>2</sup> をモデルとする orbifold

平面結晶群の分類からわかるように、空間結晶群を分類するには  $O(3)$  の離散部分群を決定する必要がある。そこでこのセクションでは、球面  $S^2$  をモデルとする orbifold を調べる。

正  $p$  角形が、各頂点のまわりに  $q$  個集まってできる正多面体を膨らませてできる球面を、大円の弧を辺として分割することを、球面の正則分割とよぶ。この正則分割を  $\{p, q\}$  で表す。すると、内角が

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}$$

の3角形が得られるので、球面の面積のことを考慮すると、不等式

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} > \pi$$

# P4mm

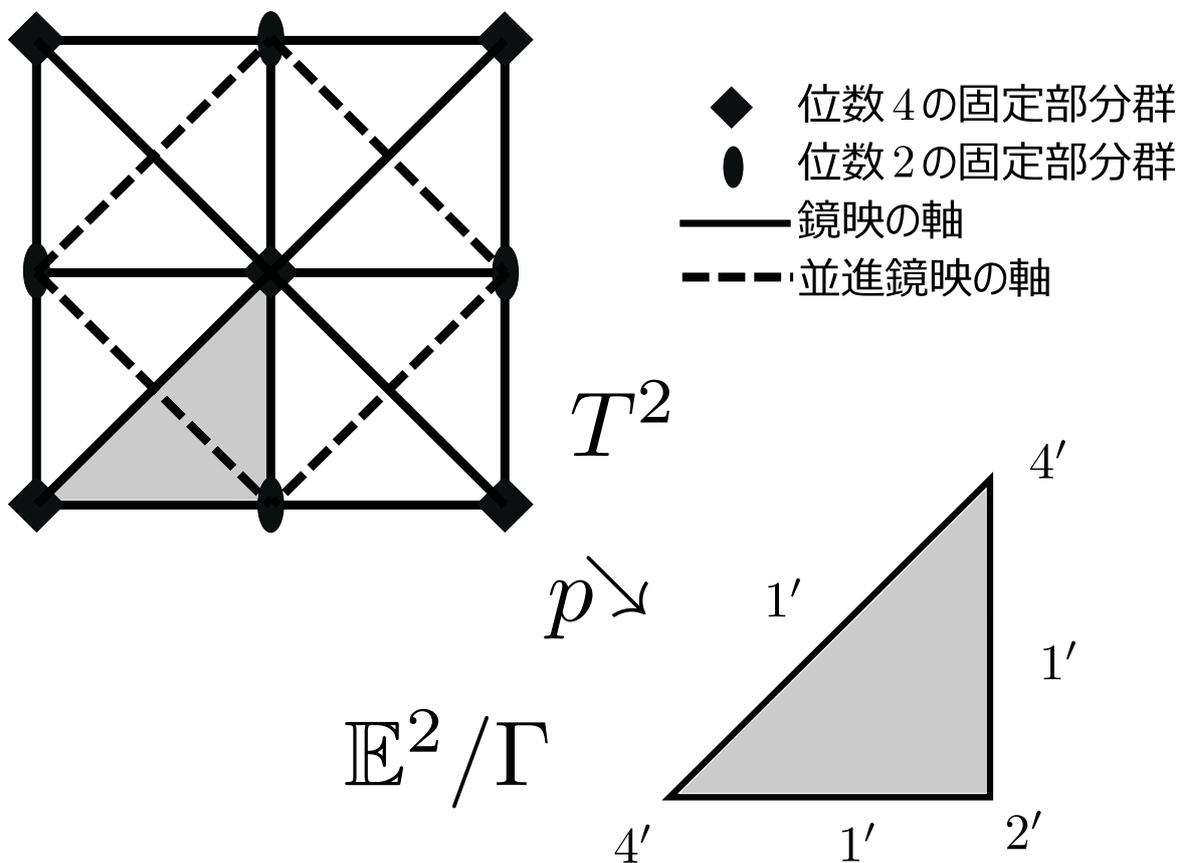


図5 P4mm における orbifold

が得られる。したがって、

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$$

となる。ここで  $p, q$  を 2 以上の整数として、上の不等式を満たす  $(p, q)$  を求めると、 $(2, n), (n, 2), n \geq 2$  及び、 $(3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5)$  が得られる。上の  $(3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5)$  はそれぞれ、正 4 面体、正 6 面体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体に対応しており、正多面体はこの 5 種類になることが示された。

次に、 $p, q, r$  を 2 以上の整数として、球面上の大円の弧で囲まれた 3 角形で、内角が

$$\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$$

であるものを考える。このとき、球面上の 3 角形の内角の和が  $\pi$  よりも大きいことから、

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

が得られる．この不等式を満たす  $(p, q, r)$  は， $p \geq q \geq r$  とすると， $(n, 2, 2), n \geq 2$  及び， $(3, 3, 2), (4, 3, 2), (5, 3, 2)$  となり，上の正則分割に対応していることが分かる．

このようにして得られる  $\mathbb{S}^2$  上の 3 角形を  $\Delta_{pqr}$  で表す． $\Delta_{pqr}$  のそれぞれの辺に関する鏡映を  $r_1, r_2, r_3$  とする．ここで，辺  $l$  に関する鏡映は， $l$  と原点を含むユークリッド空間の平面についての鏡映である．鏡映  $r_1, r_2, r_3$  で生成される群を  $\Delta(p, q, r)$  で表し，タイプ  $(p, q, r)$  のシュバルツ 3 角形群とよぶ． $\Delta(p, q, r)$  は  $\text{Isom}(\mathbb{S}^2)$  の有限部分群であるが， $O(3)$  の部分群ともみなすことができる．

$\Delta(p, q, r)$  の要素で  $\mathbb{E}^3$  の向きを保つもの全体からなる群を  $\Delta^+(p, q, r)$  で表す． $\Delta^+(p, q, r)$  は， $\Delta(p, q, r)$  の指数 2 の部分群である．また，内角が  $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}$  の頂点を，それぞれ， $A, B$  として， $A$  と  $\mathbb{E}^3$  の原点を結ぶ直線についての  $\frac{2\pi}{p}$  回転を  $a$ ， $B$  と原点を結ぶ直線についての  $\frac{2\pi}{q}$  回転を  $b$  とすると， $\Delta^+(p, q, r)$  は  $a, b$  で生成され，

$$a^p = b^q = (ab)^r = e \text{ (恒等変換)}$$

が成り立つ．

3 次直交群  $O(3)$  は  $\mathbb{S}^2$  に作用し， $\mathbb{S}^2$  おける合同変換群  $\text{Isom}(\mathbb{S}^2)$  とみなすことができる． $O(3)$  の離散部分群を  $\Gamma$  とすると，軌道空間  $\mathbb{S}^2/\Gamma$  は  $\mathbb{S}^2$  をモデルとする orbifold の構造をもつ．この orbifold の特異点は  $\Gamma$  の固定点に対応する． $\mathbb{S}^2$  の点  $x$  に対して，固定部分群  $\Gamma_x$  は，巡回群  $C_n$ ，2 面体群  $D_n$  と同型である．

**定理 5.1.** 軌道空間  $\mathbb{S}^2/\Gamma$  の特異点のタイプを  $C_{n_1}, \dots, C_{n_k}$  とする． $\mathbb{S}^2/\Gamma$  と同相な閉曲面  $\Sigma$  と  $(n_1, \dots, n_k)$  は，以下のように分類される．

1.  $\mathbb{S}^2$ ,  $k = 0$
2.  $\mathbb{S}^2$ ,  $k = 2$ ,  $(n, n), n \geq 2$
3.  $\mathbb{S}^2$ ,  $k = 3$ ,  $(n, 2, 2), n \geq 2, (3, 3, 2), (4, 3, 2), (5, 3, 2)$
4.  $\mathbb{R}P^2$ ,  $k = 0$
5.  $\mathbb{R}P^2$ ,  $k = 1$ ,  $n \geq 2$

証明. orbifold  $\mathbb{S}^2/\Gamma$  について，命題 4.11 と同様にして

$$\chi^{orb}(\mathbb{S}^2/\Gamma) = \chi(\Sigma) - \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \quad (6)$$

が成り立つ．射影  $p: \mathbb{S}^2 \rightarrow \Sigma$  が分岐被覆となることから，分岐被覆の次数を  $d$  とすると，定理 4.10 の証明と同様に，

$$\chi(\mathbb{S}^2) = d\chi^{orb}(\mathbb{S}^2/\Gamma)$$

となる．ここで， $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$  で， $d$  は，有限群  $\Gamma$  の位数に等しい．したがって，

$$\frac{2}{d} = \chi(\Sigma) - \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \quad (7)$$

が得られる。まず、式 (7) より、 $\chi(\Sigma) > 0$  となるので、閉曲面の分類から、 $\chi(\Sigma) = 2$  または、 $\chi(\Sigma) = 1$  がしたがう (種数  $g$  の向き付け可能な閉曲面  $\Sigma_g$  について、 $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ 、種数  $k$  の  $\mathbb{R}P^2$  の連結和からなる、向き付け不可能な曲面  $N_k$  について、 $\chi(N_k) = 2 - k$  であることが知られている)。ここで、 $\chi(\Sigma) = 2$  のとき、 $\Sigma$  は  $S^2$  と同相で、 $\chi(\Sigma) = 1$  のとき、 $\Sigma$  は  $\mathbb{R}P^2$  と同相である。

$\chi(\Sigma) = 2$  のとき、

$$\chi(\Sigma) = \frac{2}{d} + \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \geq \frac{2}{d} + \frac{1}{2}k \quad (8)$$

を用いると、 $k \leq 3$  が得られる。

$k = 0$  のときは、 $d = 1$  となり、 $\Gamma$  は恒等変換のみからなる。

$k = 1$  のとき、式 (7) は、

$$\frac{2}{d} = 1 + \frac{1}{n}$$

となり、これを満たす  $d, n$  は存在しない。

$k = 2$  のとき、式 (7) は、

$$\frac{2}{d} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$$

となる。この場合は、 $n_1 = n_2 = n, d = n$  のときに限り軌道空間として実現される。

$k = 3$  のとき、式 (7) より、

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > 1$$

となる。このとき、 $\Delta^+(p, q, r)$  の作用による、 $S^2$  の軌道空間が得られる。

次に  $\chi(\Sigma) = 1$  のとき、式 (8) より、 $k \leq 1$  が得られる。 $k = 0$  のときは、 $S^2$  において、原点に関して対称な点を同一視する、 $C_2$  の作用の軌道空間として、 $\mathbb{R}P^2$  が得られる。また、 $k = 1$  のときは、 $Snn$  からさらに原点に関して対称な点を同一視して、 $\mathbb{R}P^2$  と同相で、タイプ  $C_n$  の特異点を 1 個もつ軌道空間が得られる (図 6)。□

定理 5.1 で得られた軌道空間を、orbifold の記号で次のように表す。

1.  $S$
2.  $Snn, n \geq 2$
3.  $Sn22, n \geq 2, S332, S432, S532$
4.  $P$
5.  $Pn, n \geq 2$

次に、軌道空間  $S^2/\Gamma$  が、タイプ  $D_n$  の特異点をもつ場合を考える。まず、 $S^2/\Gamma$  は、タイプ  $D_1$  の特異点に対応した境界をもつ曲面となる。 $S^2/\Gamma$  のダブル  $S^2/\Gamma \cup S^2/\Gamma$  をとると、2 重分岐被覆  $S^2/\Gamma \cup S^2/\Gamma \rightarrow S^2/\Gamma$  が存在し、orbifold Euler number は  $\chi^{orb}(S^2/\Gamma \cup S^2/\Gamma) = 2\chi^{orb}(S^2/\Gamma)$  を満たす。 $|\Gamma| = d$  とすると、 $d\chi^{orb}(S^2/\Gamma) = \chi(S^2) = 2$  より、 $\chi^{orb}(S^2/\Gamma) = \frac{2}{d}$  となる。したがっ

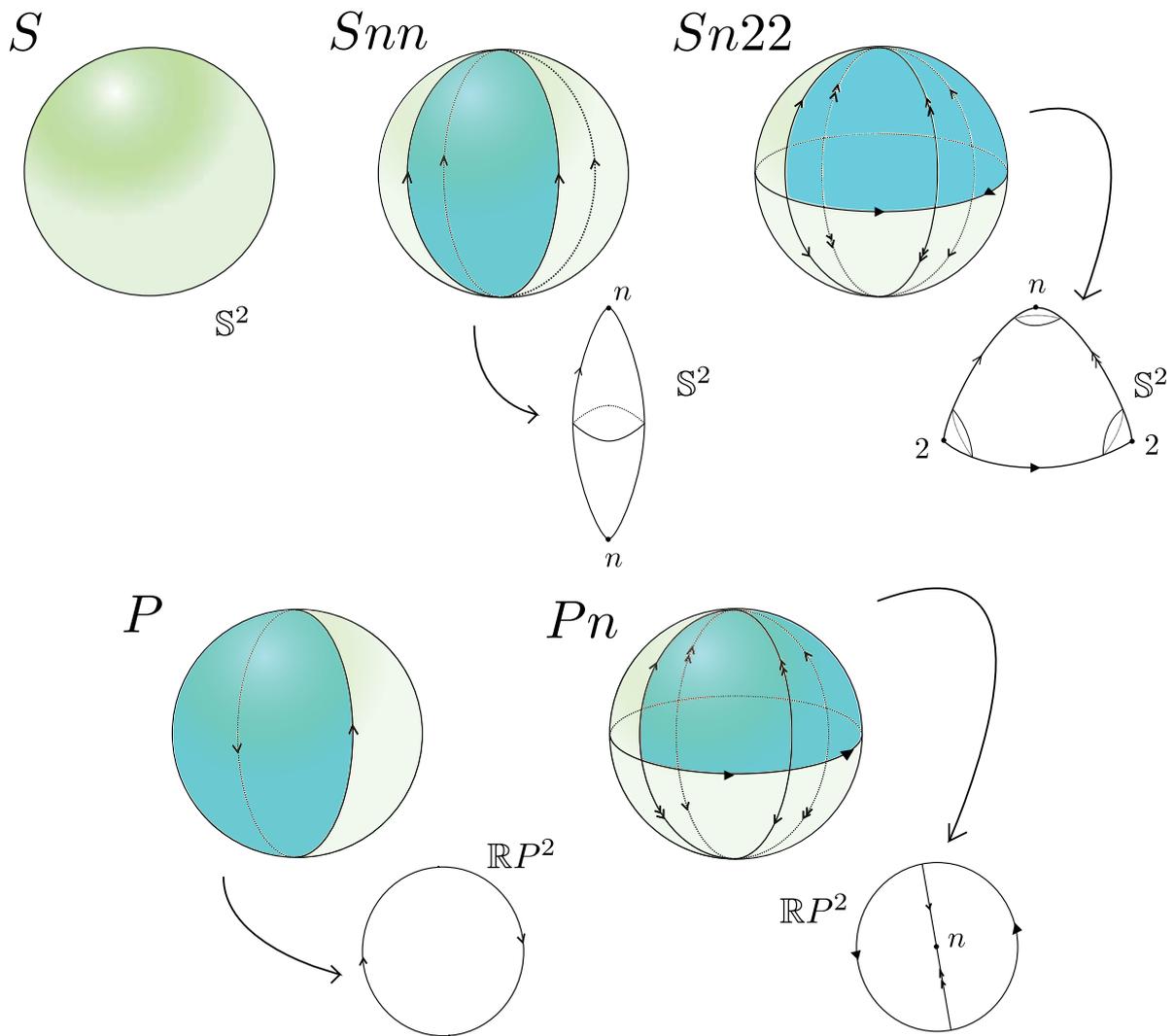


図6 タイプ  $C_n$  をもつ  $S^2$  をモデルとする orbifold

て,  $\chi^{orb}(S^2/\Gamma \cup S^2/\Gamma) > 0$  であり,  $S^2/\Gamma \cup S^2/\Gamma$  は, 定理 5.1 で分類した orbifold のいずれかになる. orbifold  $S^2/\Gamma$  を分類するには, 定理 5.1 の orbifold について, 鏡映の軸を調べればよい.

まず,  $S^2$  について,  $xy$  平面についての鏡映を考えると, 2 重被覆

$$S \longrightarrow D$$

が得られる.  $D$  は 2 次元閉円板で, 境界に沿ってタイプ  $D_1$  の特異点をもつ.

$Snn, n \geq 2$  については, 2 通りの鏡映の軸が存在することから, 2 重被覆

$$Snn \longrightarrow Dn, \quad Snn \longrightarrow Dn'n'$$

がある (図 7).

$Sn22, n \geq 2$  については,  $\Delta_{n22}$  が 2 等辺 3 角形であることから, 2 通りの鏡映の軸が存在し, 2

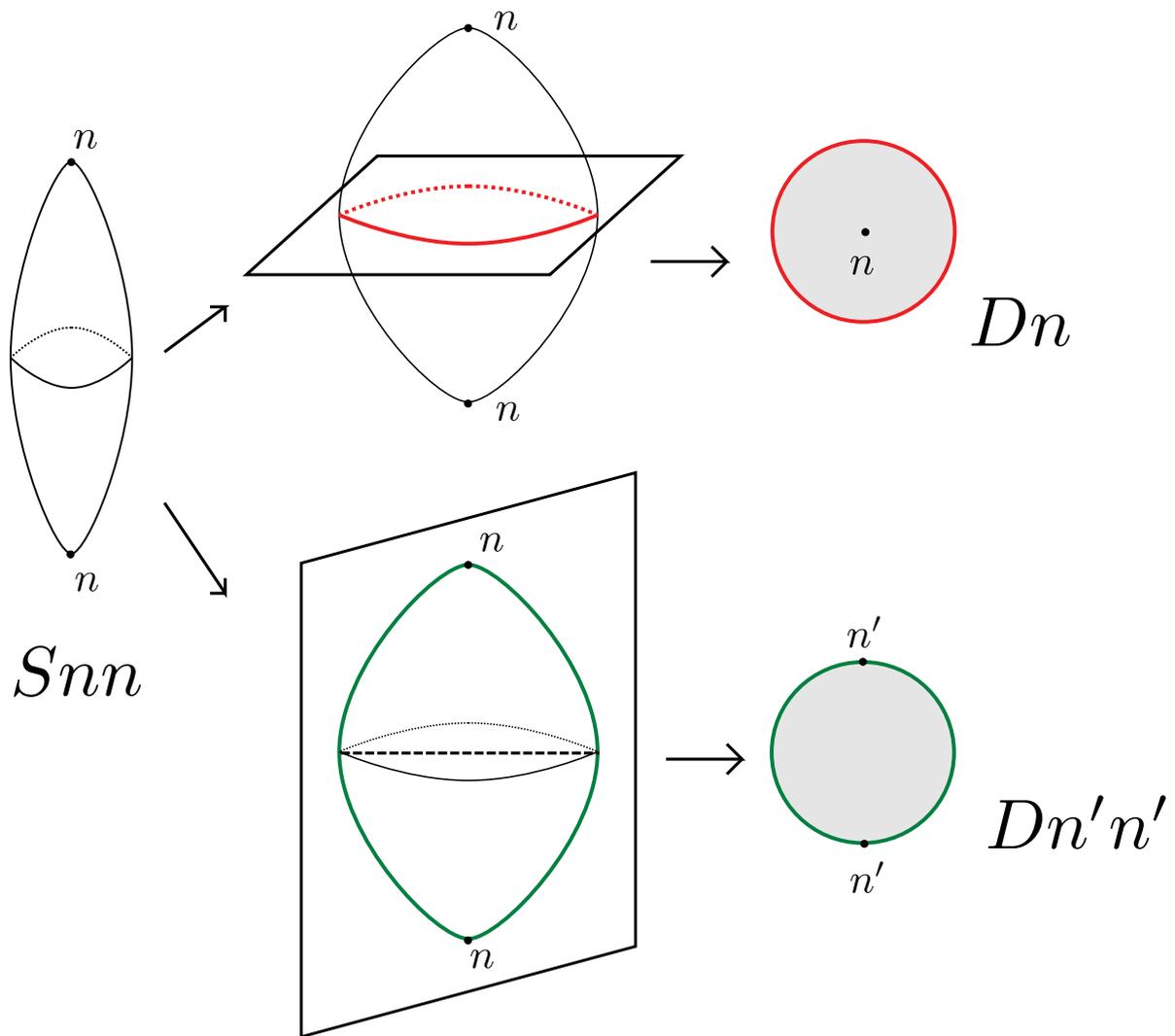


図7  $S_{nn}$  のダブル

重被覆

$$S_{n22} \longrightarrow D_{n'2'2'}, \quad S_{n22} \longrightarrow D_{2n'}$$

が得られる.

$S_{332}$  についても,  $\Delta_{332}$  が 2 等辺 3 角形であることから, 2 通りの鏡映の軸が存在し, 2 重被覆

$$S_{332} \longrightarrow D_{3'3'2'}, \quad S_{332} \longrightarrow D_{32'}$$

がある (図 8).

$S_{432}, S_{532}$  については, それぞれ 2 重被覆

$$S_{432} \longrightarrow D_{4'3'2'}, \quad S_{532} \longrightarrow D_{5'3'2'}$$

がとれる (図 9).  $P, P_n$  については鏡映の軸は存在しない. 以上で  $O(3)$  の離散部分群が分類された.

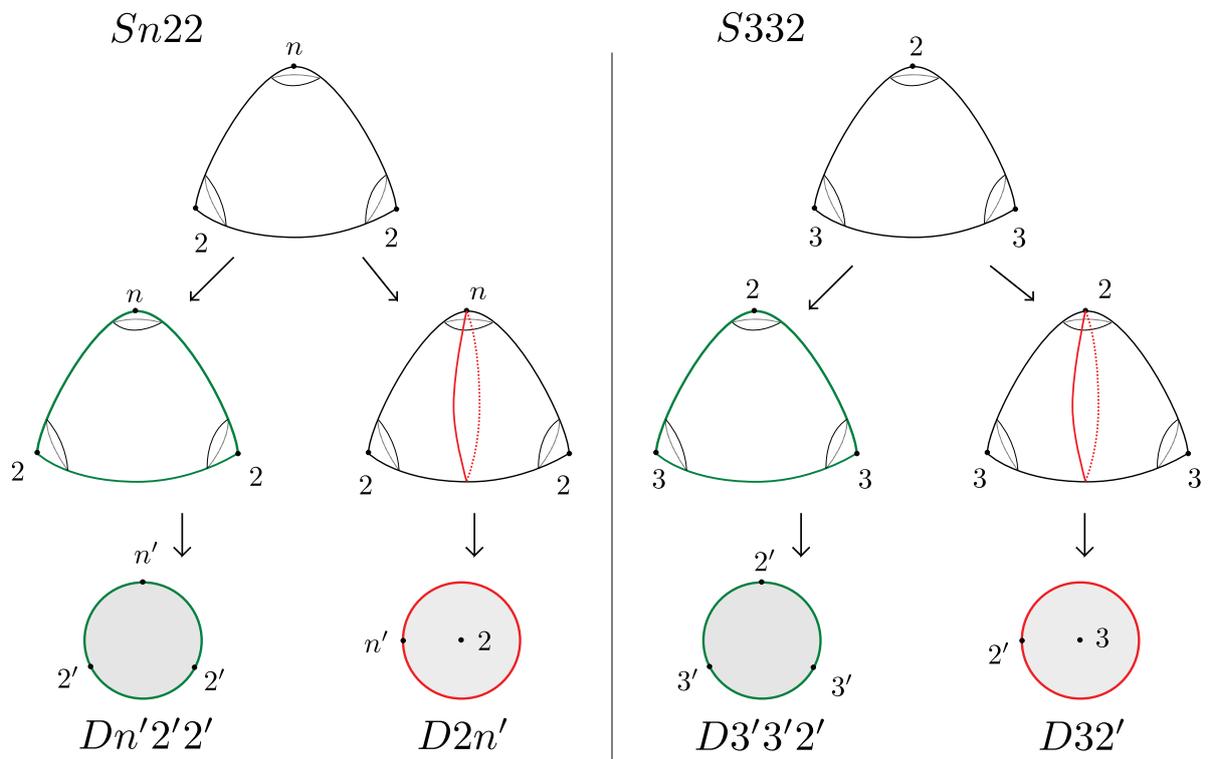


図 8  $S_n22, S_{332}$  のダブル

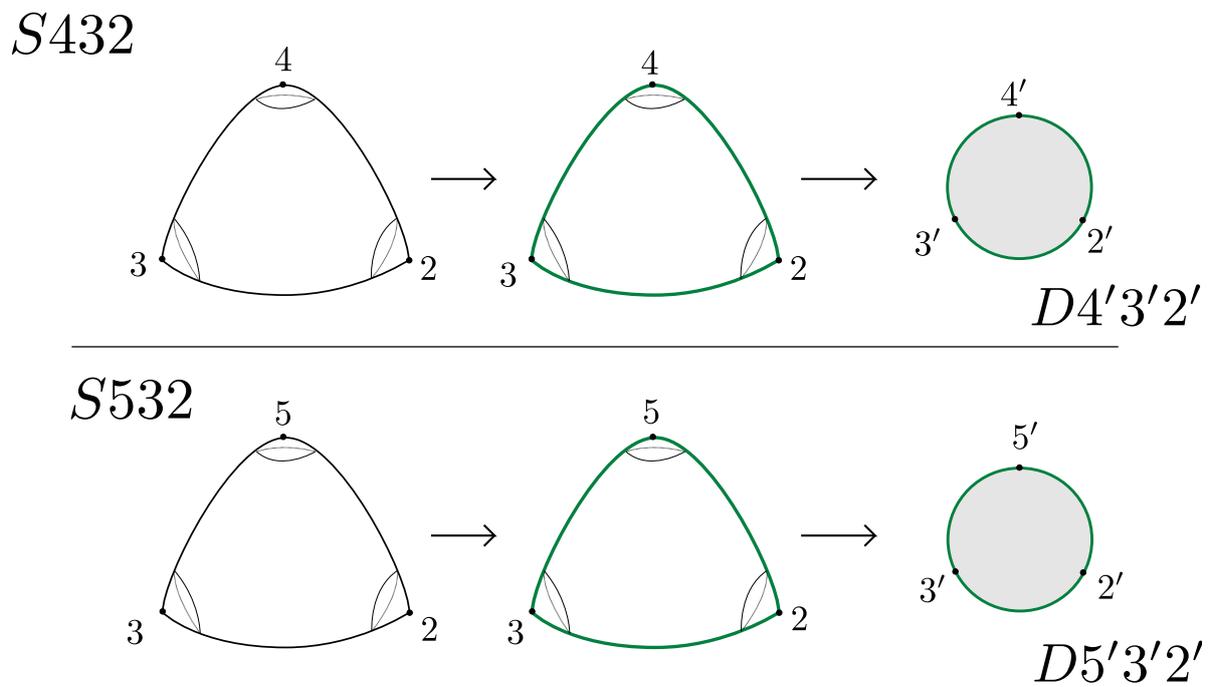


図 9  $S_{432}, S_{532}$  のダブル

orbifold	群の位数	orbifold	群の位数
$S$	1	$D$	2
$Snn$	$n$	$Dn$	2n
$Sn22$	2n	$Dn'n'$	2n
$S332$	12	$Dn'2'2'$	4n
$S432$	24	$D2n'$	4n
$S532$	60	$D3'3'2'$	24
$P$	2	$D32'$	24
$Pn$	2n	$D4'3'2'$	48
		$D5'3'2'$	120

表1  $O(3)$  の離散部分群

## 6 3次元空間群における 3-orbifold

まず  $\mathbb{E}^3$  の合同変換について述べる.  $\mathbb{E}^3$  内の平面  $L$  についての対称移動を  $r_L$  で表し, 平面  $L$  に関する **鏡映** とよぶ. また, 2つの平面  $L_1, L_2$  が直線  $l$  で交わる時, 鏡映の合成  $r_{L_1}r_{L_2}$  は直線  $l$  は直線  $l$  を軸とする回転移動となる.  $L_1, L_2$  が平行である時, 鏡映の合成  $r_{L_1}r_{L_2}$  は平行移動になる. 平行移動は  $\mathbb{R}^3$  で表示すると, ベクトル  $\mathbf{b}$  を用いて

$$t(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

と表される. この平行移動を  $t_{\mathbf{b}}$  と表示する.

直線  $l$  と,  $l$  に平行なベクトル  $\mathbf{b}$  に対して,  $l$  を軸とする  $\theta$  回転,  $a_{l,\theta}$  と, 平行移動  $t_{\mathbf{b}}$  の合成  $a_{l,\theta}t_{\mathbf{b}}$  を,  $l$  を軸とし, ベクトル  $\mathbf{b}$  に関する回転角  $\theta$  の **らせん移動** とよぶ. (平行移動と回転移動は, らせん移動の特別な場合とみることができる.)

平面  $L$  と  $L$  上のベクトル  $\mathbf{b}$  を指定して, 平面  $L$  に関する  $r_L$  と平行移動  $t_{\mathbf{b}}$  の合成  $t_{\mathbf{b}}r_L$  を, 平面  $L$  とベクトル  $\mathbf{b}$  に関する **並進鏡映** とよぶ. (鏡映は並進鏡映の特別な場合)

平面  $L$  と  $L$  に垂直な直線  $l$  を指定して, 鏡映  $r_L$  と, 回転移動  $a_{l,\theta}$  の合成  $a_{l,\theta}r_L$  を, 平面  $L$  と軸  $l$  に関する回転角  $\theta$  の **回転鏡映** とよぶ.

平面結晶群のときと同様に, 軌道空間  $\mathbb{E}^3/\Gamma$  には,

$$d(\Gamma \cdot \mathbf{x}, \Gamma \cdot \mathbf{y}) = \min_{g \in \Gamma} d(\mathbf{x}, g(\mathbf{y}))$$

で定めることにより, 距離空間の構造を入れることができ,  $\mathbb{E}^3$  をモデルとする orbifold の構造をもつ.  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  を3つの1次独立なベクトルとしたとき, 空間結晶群  $\Gamma$  は, 格子群  $\Gamma_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3}$  を正規部分群として含み,  $\mathbb{E}^3$  の  $\Gamma_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3}$  による軌道空間は, 3次元トーラス  $T^3$  である. 軌道空間

$\mathbb{E}^3/\Gamma$  は、剰余群  $\Gamma/\Gamma_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3}$  の  $T^3$  への作用による軌道空間とみなすことができる。ここで、 $T^3$  がコンパクトであることと、 $\Gamma$  の作用が不連続であることを考慮すると、上の剰余群の位数は有限で、次数が有限の分岐被覆写像

$$\pi: T^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3/\Gamma$$

が得られる。

空間結晶群  $\Gamma$  の固定部分群  $\Gamma_x$  は、3 次直交群  $O(3)$  の離散部分群である。定理 4.4 より、平面結晶群の点群に含まれる回転の位数は、1, 2, 3, 4, 6 のいずれかになることを示した。このことを空間結晶群の場合にも適用すると、空間結晶群の点群に含まれる回転、及び回転鏡映の位数は 1, 2, 3, 4, 6 のいずれかになることが示される。これを考慮すると、空間結晶群における点群は、 $O(3)$  の離散部分群のうち、次の 32 種類の orbifold に対応するものになる。

- $S$
- $S22, S33, S44, S66$
- $S222, S322, S422, S622$
- $S332, S432$
- $P, P2, P3$
- $D, D2, D3, D4, D6$
- $D2'2'2', D3'2'2', D4'2'2', D6'2'2'$
- $D22', D23'$
- $D3'3'2', D32', D4'3'2'$

ここで、 $D24'$  と  $D26'$  がリストに入っていないのは、これらがそれぞれ位数 8 と 12 の回転鏡映を含むからである。また同様の理由で、 $P4$  と  $P6$  も除外されている。位数 5 の回転を含む  $S55, S522, S532$  などものぞかれている。これらの 32 種類の空間結晶群における点群は、含まれる回転の軸によって、次の 7 種類の結晶系に分けられる

1. 三射晶 (triclinic): 回転軸をもたない。
2. 単射晶 (monoclinic): 位数 2 の回転軸を 1 本もつ。
3. 直方晶 (orthorhombic): 互いに直交する位数 2 の回転軸を 3 本もつ。
4. 正方晶 (tetragonal): 位数 4 の回転軸を 1 本もつ。
5. 三方晶 (trigonal): 位数 3 の回転軸を 1 本もつ。
6. 六方晶 (hexagonal): 位数 6 の回転軸を 1 本もつ。
7. 立方晶 (cubic): 位数 3 の回転軸を 4 本もつ。

32 種類の点群を、これらの結晶系によって分け、さらに結晶学の国際記号を加えてまとめたものが以下の表 2 である

空間結晶群は格子群  $\Gamma_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3}$  を正規部分群として含む。したがって、空間結晶群を分類するには、3 次元格子

$$L_{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3} = \{m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3 \mid m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}\}$$

結晶系	国際記号	orbifold	群の位数
三射晶	1	$S$	1
-	$\bar{1}$	$P$	2
単射晶	2	$S22$	2
-	m	$D$	2
-	2/m	$D2$	4
直方晶	222	$S222$	4
-	mm2	$D2'2'$	4
-	mmm	$D2'2'2'$	8
正方晶	4	$S44$	4
-	$\bar{4}$	$P2$	4
-	4/m	$D4$	8
-	422	$S422$	8
-	4mm	$D4'4'$	8
-	$\bar{4}2m$	$D22'$	8
-	4/mmm	$D4'2'2'$	16
三方晶	3	$S33$	3
-	$\bar{3}$	$P3$	6
-	32	$S322$	6
-	3m	$D3'3'$	6
-	$\bar{3}m$	$D23'$	12
六方晶	6	$S66$	6
-	$\bar{6}$	$D3$	6
-	6/m	$D6$	12
-	622	$S622$	12
-	6mm	$D6'6'$	12
-	$\bar{6}m2$	$D3'2'2'$	12
-	6/mmm	$D6'2'2'$	24
立方晶	23	$S332$	12
-	$m\bar{3}$	$D32'$	24
-	432	$S432$	24
-	$\bar{4}3m$	$D3'3'2'$	24
-	$m\bar{3}m$	$D4'3'2'$	48

表 2 32 種類の点群

の対称性に注目するのが自然である。3次元の格子は、対称性によって、3次元ブラベ格子とよばれる14種類に分類される。これを図10に示した。ここで、3次元ブラベ格子の周期性の単位となるベクトルの大きさを、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  これらのベクトルのなす角を  $\alpha, \beta, \gamma$  で表している。また、Pは単純 (primitive), Fは面心 (face-centered), Iは体心 (Innenzentrum), Cは底心 (C-base centered) を表す。

**定義 6.1.** 空間結晶群における点群が  $SO(3)$  の離散部分群になっているもの、すなわち、向きを保つような合同変換からなる空間結晶群を、polar space group という。

polar space group における点群は以下の通り (括弧の中は対応する orbifold を表している)。

- 1 (S)
- 2 (S22)
- 222 (S222)
- 4 (S44)
- 422 (S442)
- 3 (S33)
- 32 (S322)
- 6 (S66)
- 622 (S622)
- 23 (S332)
- 432 (S432)

[2] では空間結晶群の orbifold の図を特に、 $\mathbb{E}^3/\Gamma$  が  $S^3$  に同相になるものを中心に紹介している。このとき、分岐集合は  $S^3$  内に埋め込まれた形になる。しかし、[2] では具体的に 3-orbifold の構成について説明していないため、分岐集合がなぜ図のようになるのか、すぐわからない。そこで以下では  $S^3$  に同相になる polar space group の 3-orbifold を3つと、 $S^2 \times S^1$  に同相になる 3-orbifold の構成方法について紹介する。

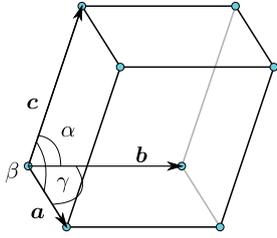
らせん移動の記号  $R_q$  は、 $\frac{2\pi}{R}$  の回転のたびに回転軸方向に  $\frac{q}{R}$  だけずらす意味を表している。(単位胞の長さを1とみる。)

**例 6.2** (空間結晶群 P422)。この場合は点群に 422 をもち、単純正方格子をもつ場合である。基本領域は三角柱になる。この時、紙面に垂直な位数2の回転軸が、格子のなすベクトルの中心の位置に生まれる。紙面に平行な2回回転軸、 $2_1$  らせん回転軸は、単位胞の長さを1とした時の、 $0, \frac{1}{2}, 1$  の高さに生成される。図6のように三角柱の面をはりあわせると、この orbifold は  $S^3$  に同相で、分岐集合として、点群 422 のタイプをもつ点が4個、点群 222 のタイプをもつ点が2個、点群 4 のタイプをもつ辺が2つ、点群 2 のタイプをもつ辺が7つ存在する。 $2_1$  らせん軸は分岐集合として orbifold 上には実現されない。なぜならば、例えば三角柱の底面の  $2_1$  らせん軸上の点の開近傍を考える。すると、上面には  $\pi$  回転された開近傍が生まれる。orbifold の構成で上面と底面がはり

三斜格子

$$a \neq b \neq c$$

$$\alpha, \beta, \gamma \neq 90^\circ$$

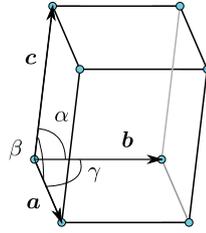


単斜格子

$$a \neq b \neq c$$

$$\alpha, \gamma = 90^\circ$$

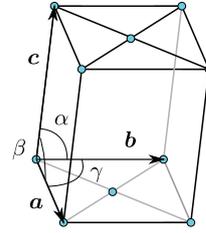
$$\beta \neq 90^\circ$$



$$a \neq b \neq c$$

$$\alpha, \gamma = 90^\circ$$

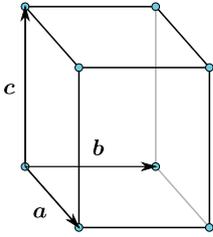
$$\beta \neq 90^\circ$$



斜方格子

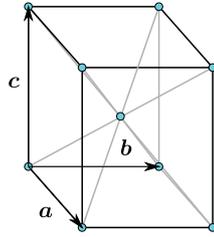
$$a \neq b \neq c$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$



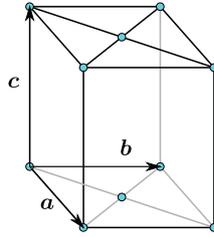
$$a \neq b \neq c$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$



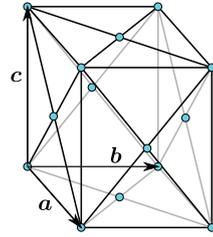
$$a \neq b \neq c$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$



$$a \neq b \neq c$$

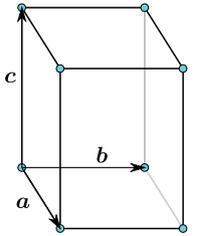
$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$



正方格子

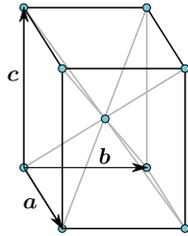
$$a = b \neq c$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$



$$a = b \neq c$$

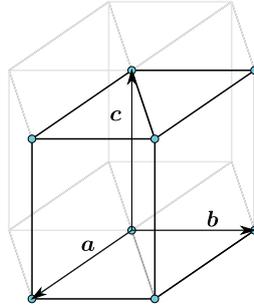
$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$



六方格子

$$a = b \neq c$$

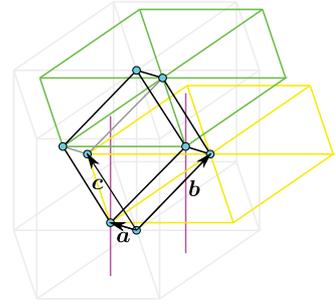
$$\alpha, \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$$



菱面体格子

$$a = b = c$$

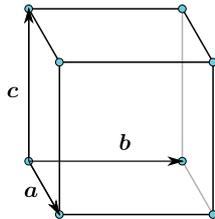
$$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ, 60^\circ, 109.47^\circ$$



立方格子

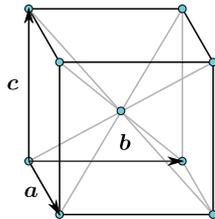
$$a = b = c$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$



$$a = b = c$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$



$$a = b = c$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$$

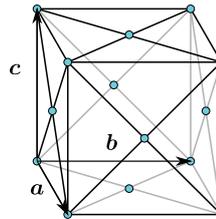


図10 14種類のブラベ格子

あわされることで、合計  $2\pi$  となるからである。

**例 6.3** (空間結晶群  $I422$ )。この場合は点群に  $422$  をもち、体心正方格子をもつ場合である。単位胞の重心の位置にある格子点の位置は、単位胞の長さを  $1$  とした時の  $\frac{1}{2}$  の高さにあることに注意。基本領域は三角柱になる。紙面に平行な  $2$  回回転軸が、 $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$  の高さにも生成される。三角柱の角を切り取り、 $2$  つの部品をそれぞれ変形していく。面をはりあわせると、この orbifold は  $S^3$  に同相で、分岐集合として、点群  $422$  のタイプをもつ点が  $2$  個、点群  $222$  のタイプをもつ点が  $2$  個、点群  $4$  のタイプをもつ辺が  $1$  つ、点群  $2$  のタイプをもつ辺が  $5$  つ存在する。

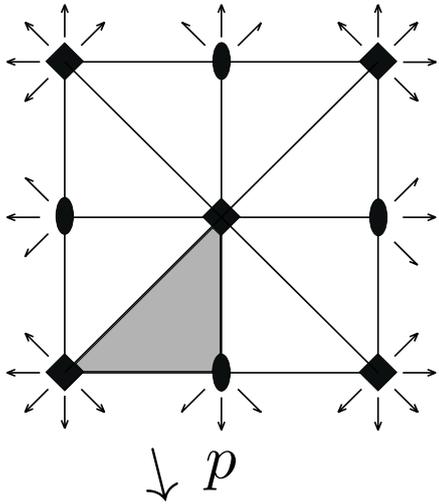
**例 6.4** (空間結晶群  $I4_122$ )。この場合は点群に  $422$  をもつが、位数  $4$  をもつ回転軸が  $\frac{\pi}{2}$  回転して、 $\frac{1}{4}$  平行移動するらせん移動に変わる。基本領域は三角柱になる。図 8 のように三角柱の面をはりあわせると、この orbifold は  $S^3$  に同相で、分岐集合として、点群  $222$  のタイプをもつ点が  $2$  個、点群  $2$  のタイプをもつ辺が  $4$  つ存在する。

**例 6.5** (空間結晶群  $C2$ )。この場合は点群に  $2$  をもち、底心単斜格子をもつ場合である。基本領域は平行六面体になる。図 20 のように各層が  $S^2$  に同相になり、上面と底面の  $S^2$  をはりあわせると、この orbifold は  $S^2 \times S^1$  に同相で、分岐集合として、点群  $2$  のタイプをもつ円周が  $2$  つ存在する。

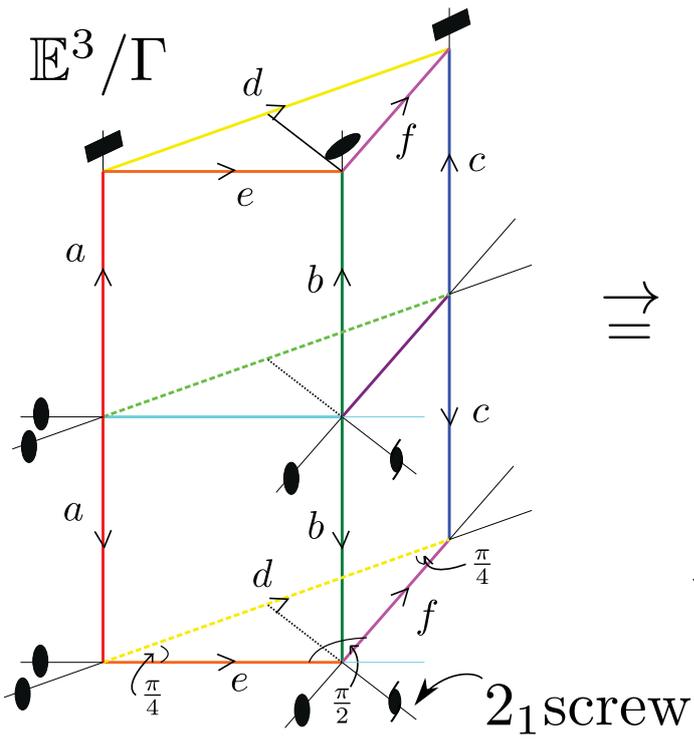
## 参考文献

- [1] Mark Anthony Armstrong, 対称性からの群論入門, 丸善出版 (2012).
- [2] Carroll K. Johnson, Michael N. Burnett and William D. Dunbar, “Crystallographic Topology and Its Application”, Crystallographic Computing 7 Proceedings from the Macromolecular Crystallography Computing School, (<https://www.incr.org/resources/commissions/crystallographic-computing/schools/school96>).
- [3] 川崎徹郎, 文様の幾何学, 牧野書店 (2014).
- [4] 河野俊丈, 結晶群, 共立出版 (2015).
- [5] 今野豊彦, 物質の対称性と群論, 共立出版 (2001).

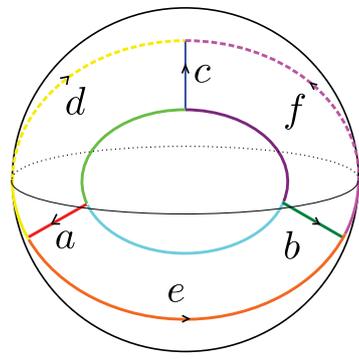
# P422



- ◆ 紙面に垂直な4回回転軸
- 紙面に垂直な2回回転軸
- ↔ 紙面に平行な2回回転軸(高さ  $0, \frac{1}{2}$  に存在)
- ↔ 紙面に平行な2<sub>1</sub>らせん軸(高さ  $0, \frac{1}{2}$  に存在)



⇒  
≡



分岐集合を取り出す

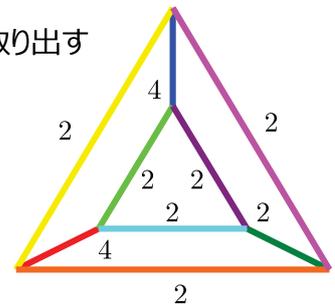


図 11 P422 における orbifold

# I422

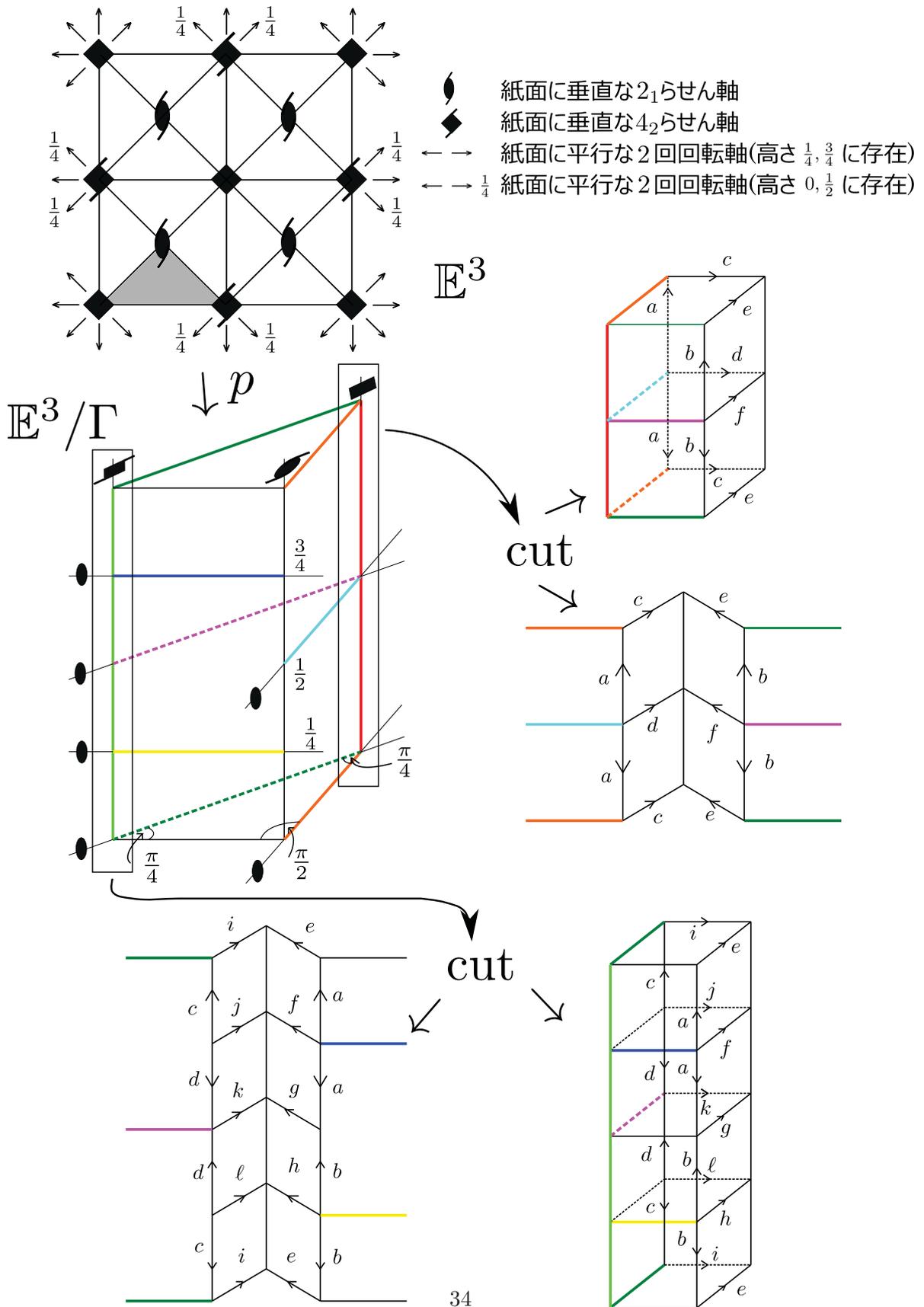


図 12 I422 における orbifold①

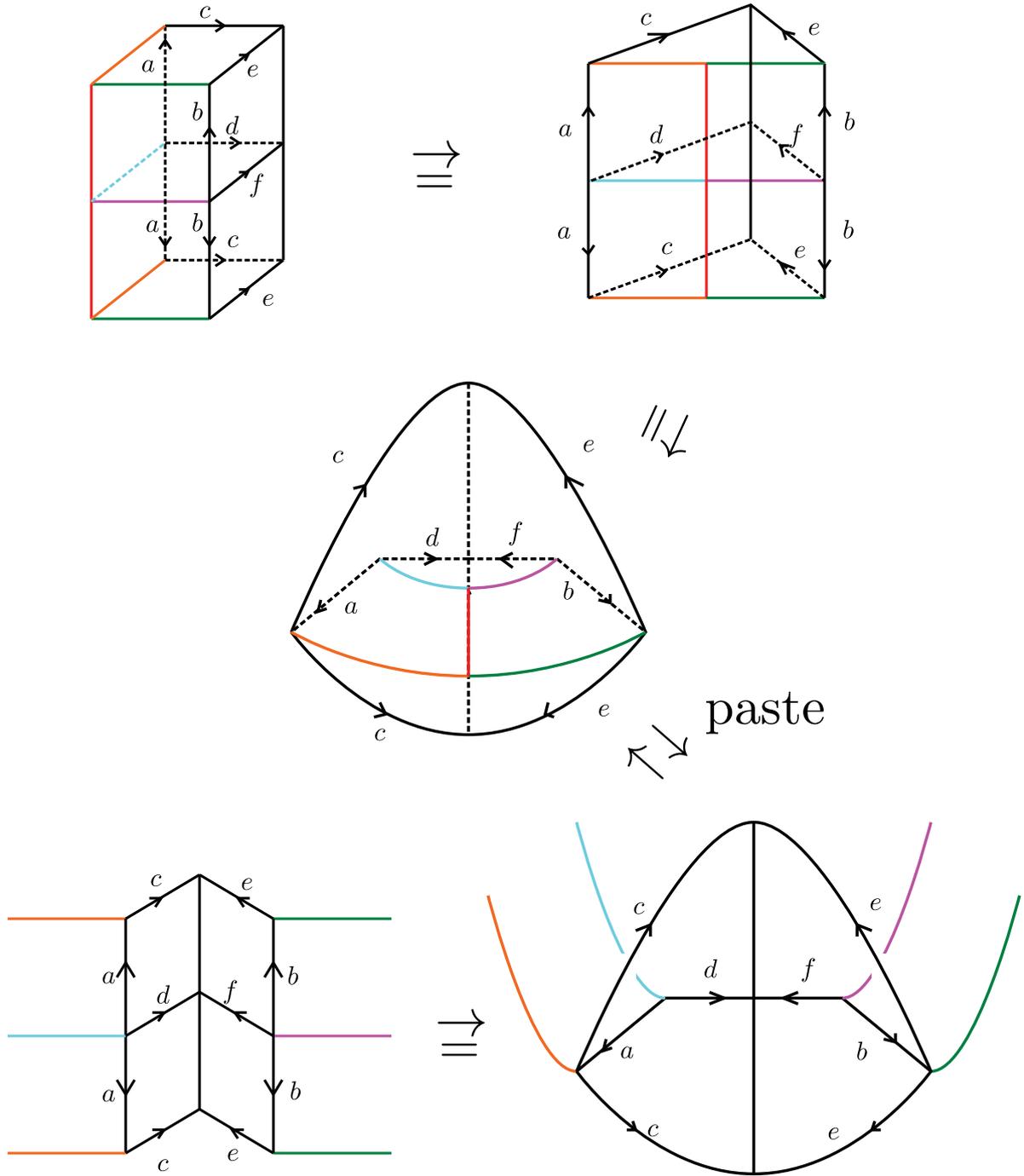


図 13  $I422$  における orbifold②

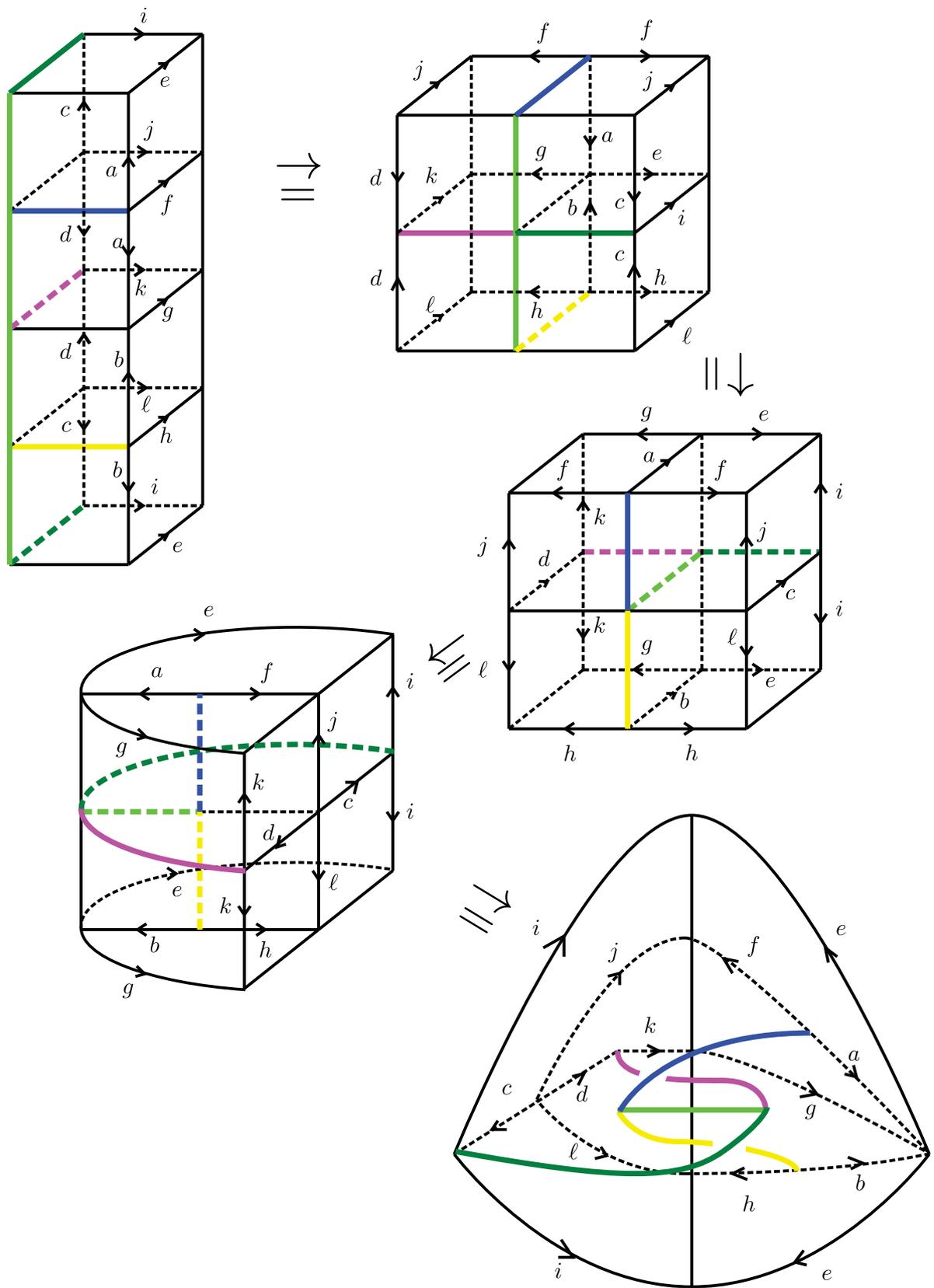
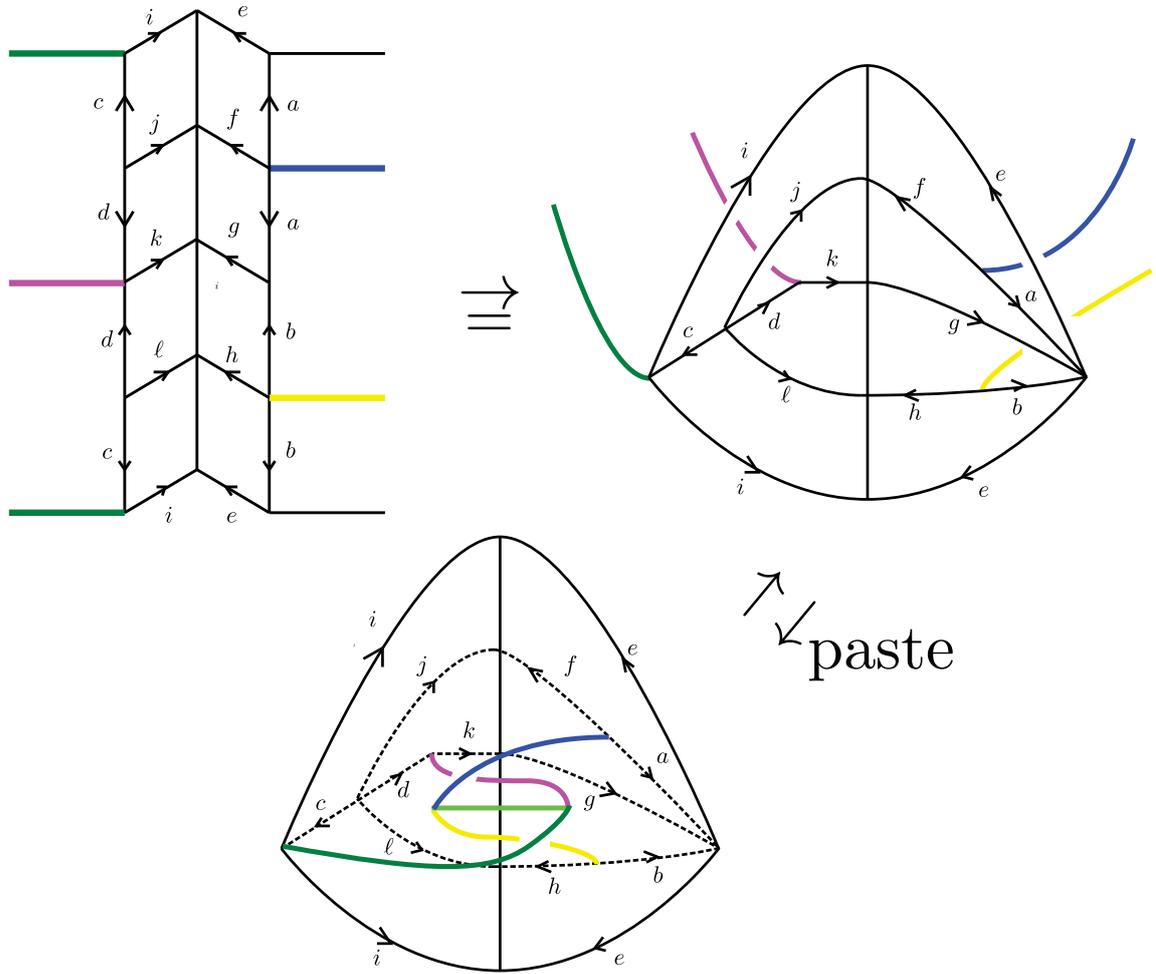


図 14 I422 における orbifold③



分岐集合を取り出す

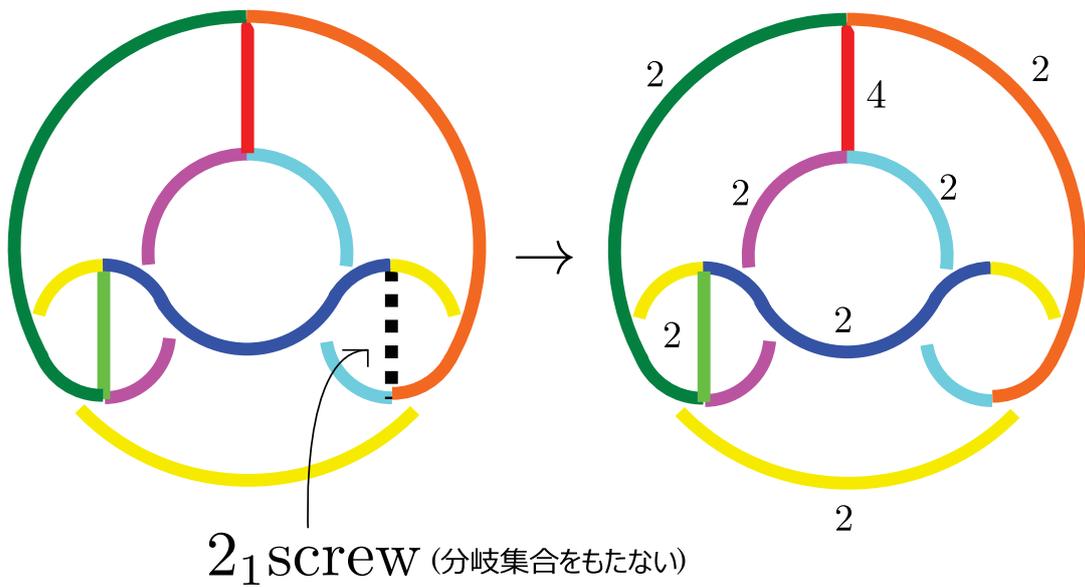
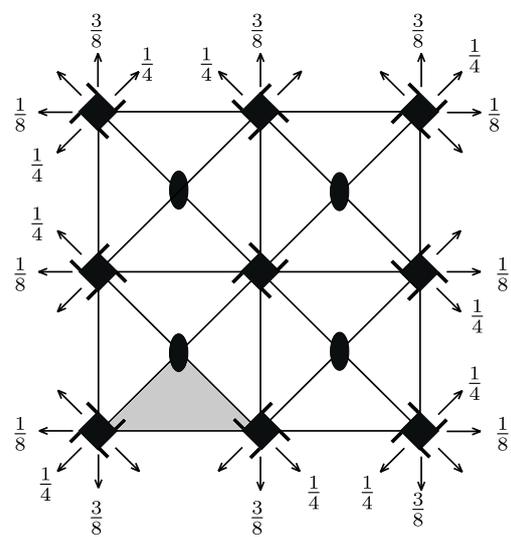


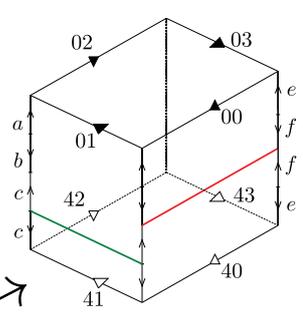
図 15 I422 における orbifold④

# I4<sub>1</sub>22



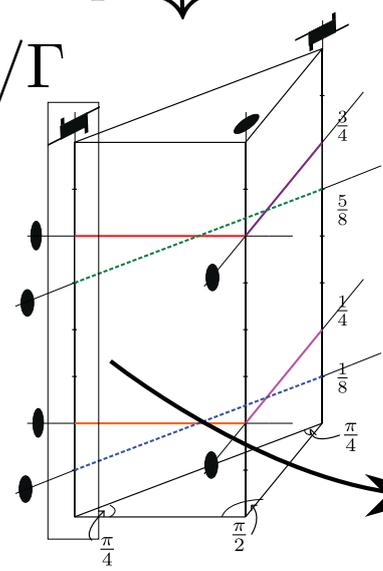
- ◆ 紙面に垂直な 4<sub>1</sub>らせん軸
- ◆ 紙面に垂直な 4<sub>3</sub>らせん軸
- ←→ 紙面に平行な 2 回回転軸(高さ 0,  $\frac{1}{2}$  に存在)
- ←→  $\frac{1}{8}$  紙面に平行な 2 回回転軸(高さ  $\frac{1}{8}, \frac{5}{8}$  に存在)
- ←→  $\frac{1}{4}$  紙面に平行な 2 回回転軸(高さ  $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$  に存在)
- ←→  $\frac{3}{8}$  紙面に平行な 2 回回転軸(高さ  $\frac{3}{8}, \frac{7}{8}$  に存在)

$\mathbb{E}^3$



$p \downarrow$

$\mathbb{E}^3/\Gamma$

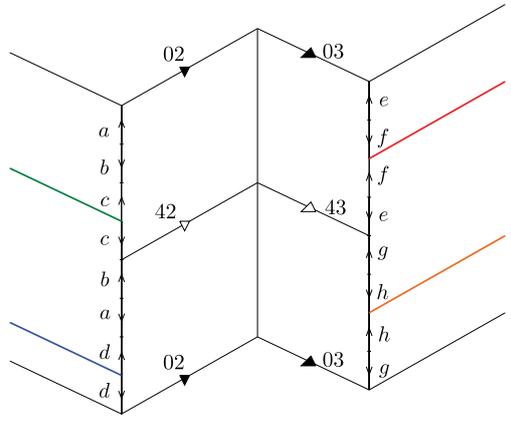


cut

cut

cut

cut



$\equiv$

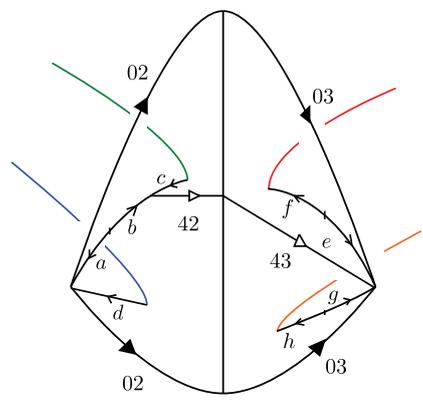


図 16 I4<sub>1</sub>22 における orbifold①

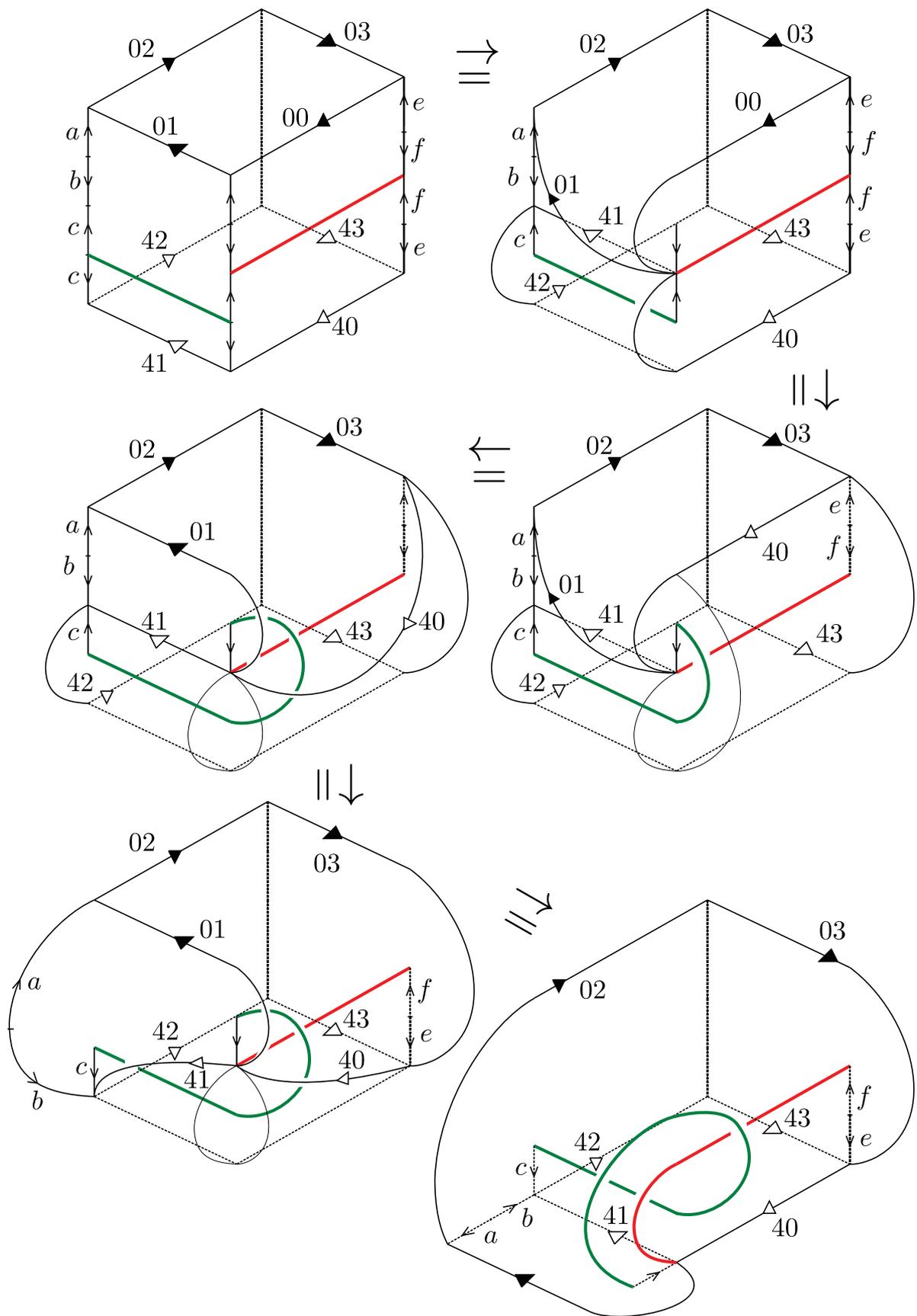


図 17  $I_{4,1,2,2}$  における orbifold②

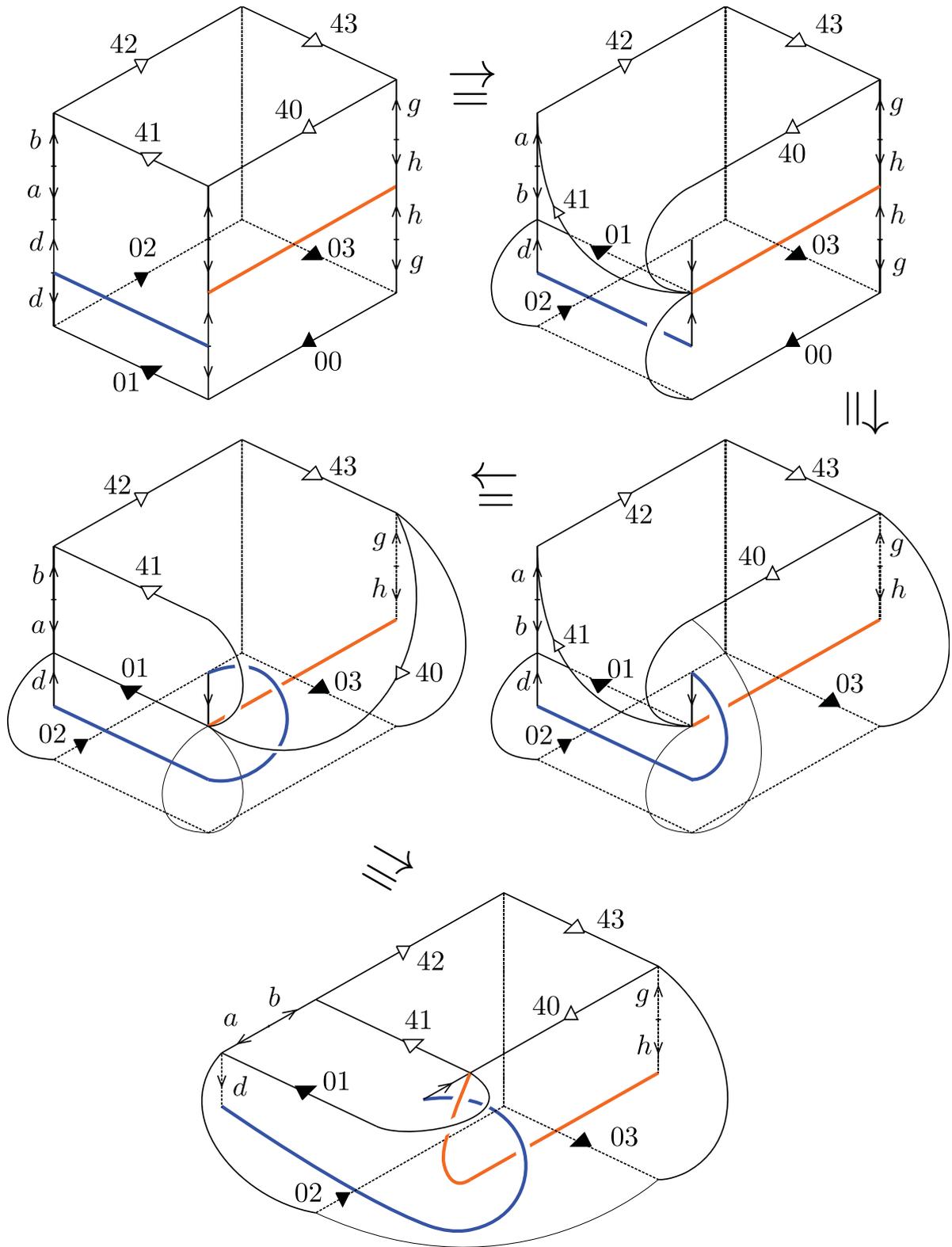
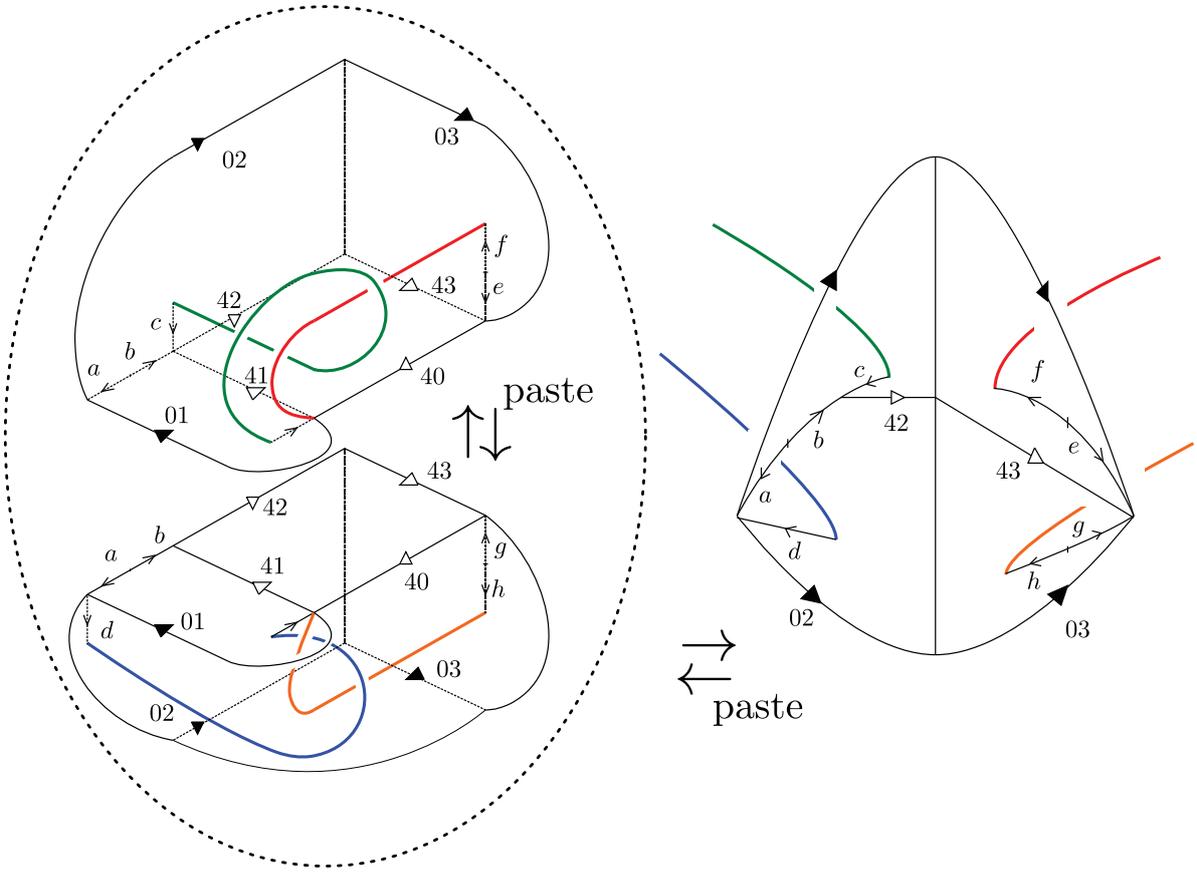


図 18  $I_{4,22}$  における orbifold ③



分岐集合を取り出すと

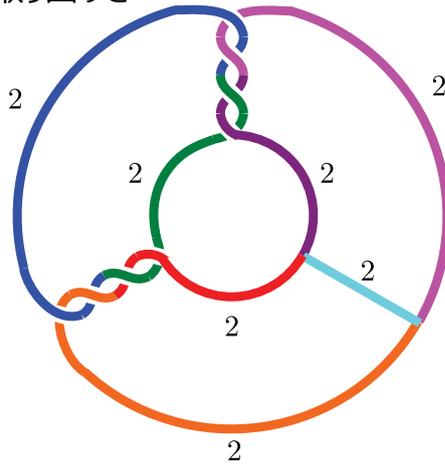


図 19  $I4_122$  における orbifold④

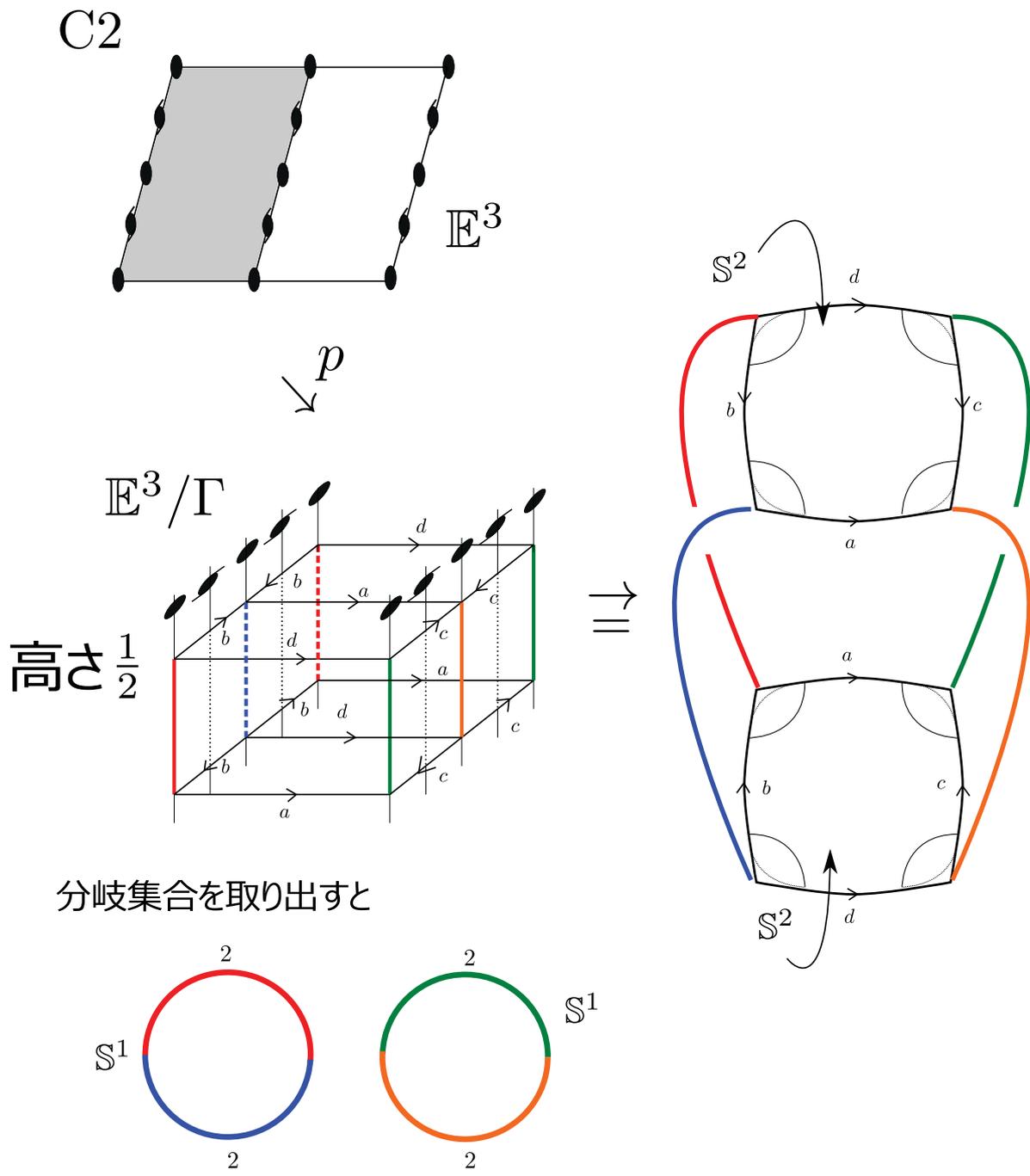


図 20  $C2$  における orbifold