

修 士 論 文
中山多元環の表現論

弘前大学大学院 教育学研究科
学校教育専攻 教科実践コース
数学教育領域

19GP305 藤村 陽介
指導教員：上山健太

2021 年 2 月

目次

はじめに	3
準備	8
1 クイバーと多元環	12
1.1 クイバーとパス多元環	12
1.2 許容イデアルと剰余多元環	21
1.3 有限次元多元環のクイバー	26
2 表現と加群	32
2.1 関係付きクイバーの表現	32
2.2 単純加群, 射影加群, 移入加群	39
2.3 加群の次元ベクトルとオイラー標数	49
3 Auslander-Reiten 理論	57
3.1 既約写像と概分裂完全列	57
3.2 Auslander-Reiten 移動	65
3.3 概分裂完全列の存在性	77
3.4 Auslander-Reiten クイバー	82
4 中山多元環と自己移入多元環	94
4.1 Loewy 列と加群の Loewy 長	95
4.2 単列加群と右単列多元環	97
4.3 中山多元環	101
5 中山多元環の大域次元	105
5.1 A_n 型の中山多元環の場合	106
5.2 Cyc_n 型の中山多元環の場合	115
5.3 主結果とその証明	127
参考文献	130

はじめに

「有限次元多元環の表現論」という数学の研究分野がある。有限次元 K -多元環とは、環でありかつ体 K 上有限次元ベクトル空間でもある代数的構造のことである。例えば、体 K 自身や下三角行列環 $\begin{bmatrix} K & 0 \\ K & K \end{bmatrix}$ は有限次元 K -多元環である。有限次元多元環 A の表現論とは、有限次元多元環 A 上の有限生成加群や、有限生成加群の成す圏 $\text{mod } A$ の構造を研究する分野である。 $A = K$ のとき、有限生成 A -加群は K 上有限次元ベクトル空間に等しくなる。二つの有限次元 K -ベクトル空間 V, V' について、 $V \cong V'$ であることと $\dim_K V = \dim_K V'$ であることは同値であり、従って有限次元 K -ベクトル空間 V が直既約ならば、 $V \cong K$ であった。すなわち、 $A = K$ のときの A -加群の構造の基本単位は K であり、とても簡単である。他方、 A を一般の有限次元多元環としても、Krull-Schmidt の定理から、任意の有限生成加群は直既約加群の直和に一意に分解されることがわかる。つまり有限生成加群の構造の基本単位は直既約加群であるといえる。しかしながら、有限生成直既約加群の同型類が無限個になることが起こったり、次元だけでは加群の同型が判定できなくなったりするなど、有限次元多元環上の加群の扱いは非常に難しくなる。更に、加群の圏を理解するためには、加群のみならずその間の射も考察する必要がある。有限生成直既約加群の間の射の基本単位は既約写像と呼ばれる写像になるので、有限生成直既約加群とその間の既約写像をどのように把握するかが問題となる。この問題に対し、クイバーというグラフを用いた考察が非常に有効な手段となる。 A をクイバーと関係を用いて表示し、有限生成直既約加群や既約写像を AR-クイバーを用いて整理することで、組合せ論的な考察を行うことが可能となる。

ここで、クイバーについてもう少し説明しよう。クイバーとは、多重辺とループを許したグラフ理論における有向グラフのことである。与えられた有限次元多元環を調べるとき、より簡単な別の多元環に置き換えて考えることができれば便利であるが、任意の有限次元多元環はベーシックな多元環と加群圏同値 (森田同値) となることが知られている。更に、ベーシックな多元環は、それに対応するクイバーに代数構造を入れたパス多元環を許容イデアルで割った剰余多元環と同型になる。これにより、有限次元多元環の構造はクイバーを用いて視覚的・直観的に理解できる。それだけではなく、有限次元多元環をクイバーを用いて表すことにより、多元環上の加群もその多元環のクイバーを用いて表現することができる。具体的には、多元環のクイバーの各頂点にベクトル空間を乗せ、矢に線形写像を乗せることで加群を表現することが可能となる。これにより、加群に関する計算を線形代数的手法に帰着することができるため、クイバーを用いることには大きなメリットがある。

AR-クイバーとは、頂点を有限生成直既約加群の同型類、矢を既約写像としたクイバーである。AR-クイバーは有限生成直既約加群の関係性を視覚的に捉えられることが大きなメリットの一つであり、組合せ論的手法を用いたアルゴリズム的操作によって AR-クイバーを描くことができる。これにより有限生成直既約加群をもれなく数え上げることが可能となる。AR-クイバーは様々な応用が存在し、クイバーや AR-クイバーは多元環を研究する上で必要不可欠な道

具となっている. 例えば, 有限次元 K -多元環 A が $\begin{bmatrix} K & 0 \\ K & K \end{bmatrix}$ であるとき, A をクイバーで表示すると

$$\circ \longleftarrow \circ$$

であり, A 上の直既約加群をクイバーを用いて表現すると

$$M_1 : K \longleftarrow 0 \quad M_2 : K \xleftarrow{1} K \quad M_3 : 0 \longleftarrow K$$

の 3 種類である. これらを AR-クイバーを用いて整理すると,

$$\begin{array}{ccc} [M_1] & & [M_3] \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & [M_2] & \end{array}$$

となる.

さて, 多元環の中には, 有限表現型や大域次元が有限, 自己移入多元環といった, よい性質を持つ多元環のクラスがある. 特に有限表現型は非常に強い性質であり, 例えば, パス多元環 KQ が有限表現型である場合, そのクイバー Q は以下の Dynkin 図形

$$A_n : \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \cdots \text{ --- } \circ,$$

$$D_n : \begin{array}{c} \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \cdots \text{ --- } \circ \\ | \\ \circ \end{array},$$

$$E_6 : \begin{array}{c} \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \\ | \\ \circ \end{array},$$

$$E_7 : \begin{array}{c} \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \\ | \\ \circ \end{array},$$

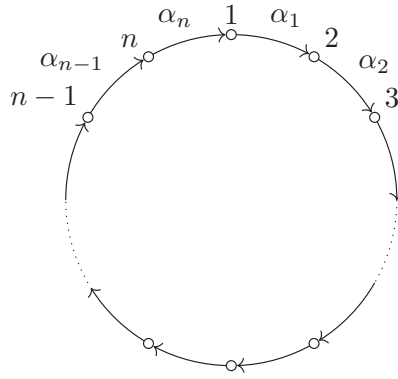
$$E_8 : \begin{array}{c} \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \text{ --- } \circ \\ | \\ \circ \end{array},$$

の辺に向きをつけたクイバーに限られる. 一方で, 大域次元が有限であることや自己移入多元環であることはホモロジー代数的に重要な性質である. $A = K$ の場合, 直既約加群は K のみなので有限表現型であり, 更に自己移入的でもあり大域次元は 0 である. また, パス多元環 KQ の場合, 大域次元は 1 である. AR-クイバーを用いて簡単な有限表現型の有限次元多元環を調

べたところ, 計算した限り, 大域次元が有限もしくは自己移入多元環かのいずれかであった. そのため, 「有限表現型であるが, 大域次元が無限かつ自己移入的でない多元環を構成できないか」という問いを調べたいと考えた. そこで, 本研究では中山多元環に着目することにした. 中山多元環は中山正 ([5], [6]) によって 1940 年頃導入された多元環のクラスであり, 様々な角度から研究されている. 中山多元環は常に有限表現型であることが知られており, いつ自己移入多元環となるかを容易に確認できるため, この問いを調べるうえで適したクラスである. 以上の理由から中山多元環に注目し, 調べることにした.

本論文は任意の頂点数のクイバーに対して, 上記の性質を満たす多元環のクラスが構成できたことを報告することを目的としている. 以下に主定理を述べる.

主定理 (=定理 5.3.2) . A がクイバー



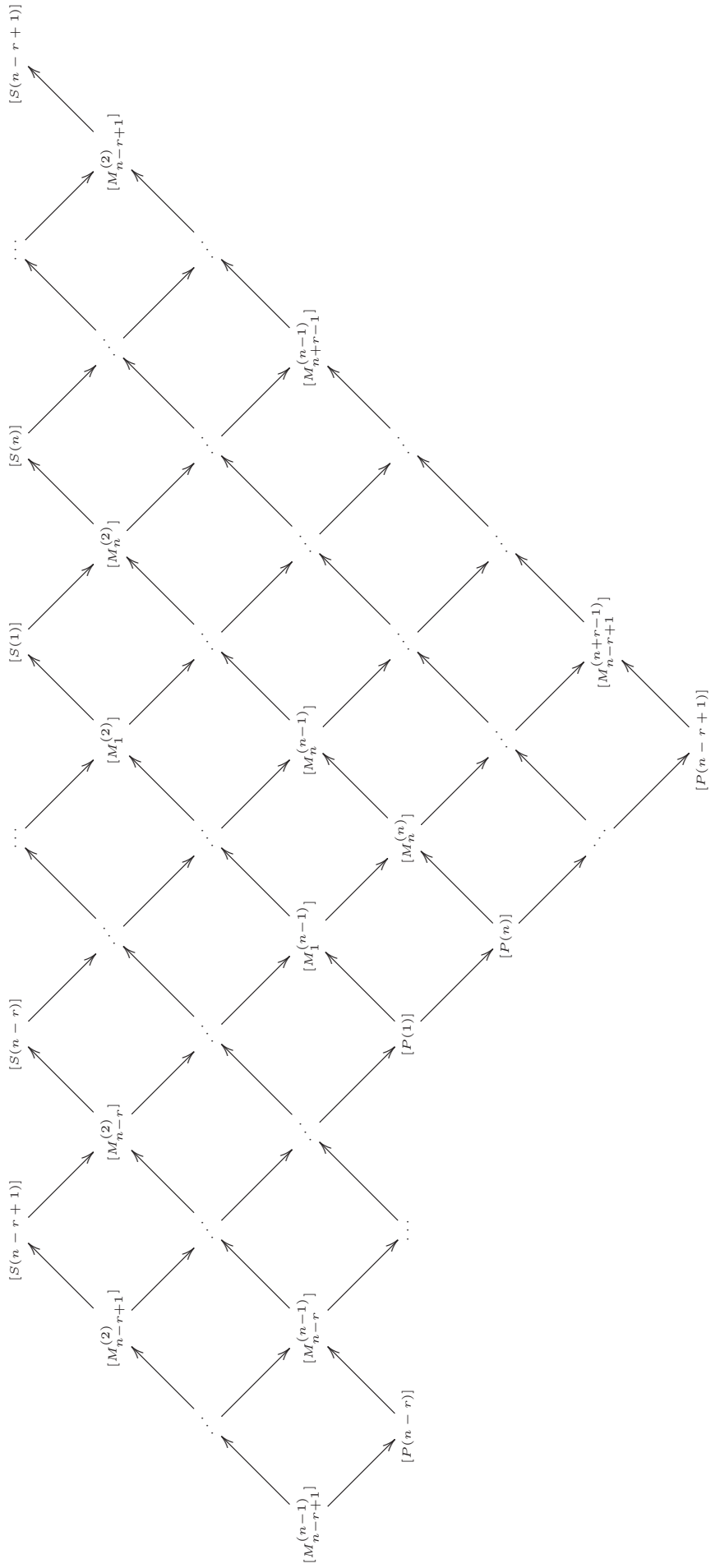
と関係

$$\begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = 0 \\ \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \alpha_{n-r+1} \cdots \alpha_{n-r-1} = 0 \end{cases}$$

$(1 \leq r \leq n-2)$ で与えられる中山多元環であるとする. このとき, A の AR-クイバーは次ページの図のようになる. ただし, 図中では $1 \leq i \leq n$ に対して

$$\begin{cases} M_i^{(n+r-1)} = P(i) / \text{rad}^{n+r-1} P(i) \\ \vdots \\ M_i^{(t)} = P(i) / \text{rad}^t P(i) \\ \vdots \\ M_i^{(2)} = P(i) / \text{rad}^2 P(i) \\ S(i) = P(i) / \text{rad} P(i) \end{cases}$$

とおいた. 特に, $\text{gl. dim } A = \infty$ である.



本論文の構成を述べる. 1 章は, クイバーと多元環についてまとめたものである. 1 節ではクイバーから K -多元環を構成する方法を述べ, 2 節ではクイバーと関係から有限次元 K -多元環を構成する方法を述べる. 3 節では逆に多元環からクイバーと関係を得る方法について述べる.

2 章は有限次元多元環上の加群についてまとめたものである. 1 節では加群を多元環のクイバーを用いて表示する方法について述べる. 2 節では更に単純加群, 射影加群, 移入加群の表現について述べる. 3 節では, AR-クイバーを描く際に非常に便利である次元ベクトルを導入し, それに付随する種々の概念を説明する.

3 章では AR-クイバーを描くうえで必要な諸概念を導入し, AR-クイバーについて述べる. 1 節では既約写像や概分裂完全列について述べる. 2 節では安定圏や AR-移動といった 3 節で必要となる性質について述べ, 3 節では概分裂完全列を具体的に構成する方法を述べる. 4 節では既約写像の性質を述べた後, 有限かつ非巡回な場合の AR-クイバーの構成方法を具体的に紹介する.

4 章では中山多元環とその自己移入性について述べる. 1 節では加群の radical 列及び socle 列について述べる. 2 節では単列加群と右単列多元環について述べ, 単列加群を扱う上で便利な表記法を紹介する. 3 節では中山多元環を導入し, いつ自己移入多元環となるか調べる方法を紹介する.

5 章では中山多元環の AR-クイバーや大域次元について考察を行う. 1 節では A_n 型の中山多元環について具体的に計算し, 大域次元が $n - 1$ 以下であることを証明する. 2 節では Cyc_n 型の中山多元環について具体的に計算し, 3 節では本稿の主定理を証明する.

本論文の執筆にあたり, 終始あたたかいご指導と激励を賜りました上山健太先生に心から感謝の意を表します. 大学学部学生の時代から, 私に数学を学ぶことの面白さや難しさを教えてくださいました. また, 講義などを通して様々なご指導を頂いた本研究科の先生方, 及び私の質問に対し快く教えてくださった静岡大学の依岡輝幸先生, 東京理科大学の板場綾子先生に深くお礼申し上げます. 本論文を執筆する上で, 山梨大学の山浦浩太先生の修士論文 ([2]) を参考にさせていただきました. ここに深く感謝いたします. 最後に, 2 年間同じ院生室で共に学び合い, 支え合った同期の畑中沙織さん, 木村明堯さんには感謝の念に堪えません. 紆余曲折の 2 年間でしたが, 二人の存在に多くの面で支えられて今日に至ることが出来ました. 本当にありがとうございました.

準備

この章では、本稿を読むうえで必要な定義や定理・命題を以下に簡単に紹介する。主にホモロジー代数的性質については [1], 表現論的性質については [3] を参考にしているので、証明についてはここでは省略するが、必要に応じて参照されたい。また、本稿において特に断りがない場合 R を単位的環, K を代数的閉体, A を単位的有限次元 K -多元環とし、加群は右加群を考えているとする。

定義 0.0.1. 有限次元 K -多元環 A の**ジャコブソン根基** (radical) $\text{rad } A$ を A の全ての極大右イデアルの共通部分で定める。また、右 A -加群 M の**ジャコブソン根基** $\text{rad } M$ を M の全ての極大部分加群の共通部分で定める。

ジャコブソン根基に関して、次の性質が良く知られている。

命題 0.0.2. A を有限次元 K -多元環とする。 A の両側イデアル I が冪零ならば、 $I \subseteq \text{rad } A$ である。更に、 A/I が K のいくつかの直積と同型ならば、 $I = \text{rad } A$ である。

定理 0.0.3. (Wedderburn-Malcev の定理) A を有限次元 K -多元環とする。 K が代数的閉体ならば、 $A = B \oplus \text{rad } A$ となる A の K -部分多元環 B が存在する。更に、自然な全射 $\pi : A \rightarrow A/\text{rad } A$ の B への制限は K -同型となる。

命題 0.0.4. (1) $M, N \in \text{mod } A$ に対して、 $\text{rad}(M \oplus N) = \text{rad } M \oplus \text{rad } N$ が成立する；
(2) $M, N \in \text{mod } A$ に対して、 $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ ならば、 $f(\text{rad } M) \subseteq \text{rad } N$ が成立する；
(3) $M \in \text{mod } A$ に対して、 $M \text{ rad } A = \text{rad } M$ が成立する。

部分加群として 0 加群か自分自身しか持たない加群を単純加群と呼ぶ。

定義 0.0.5. 右 A -加群 M に対して、 M の**半単純成分** (socle) $\text{soc } M$ を M の全ての単純部分加群の和で定める。

定義 0.0.6. A を有限次元 K -多元環とし、 $M \in \text{mod } A$ とする。このとき、各 M_{j+1}/M_j ($j = 0, 1, \dots, m-1$) が単純加群となるような M の部分加群の列

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_m = M$$

を M の**組成列** (composition series) と呼び、各 M_{j+1}/M_j を M の**組成因子** (composition factor) と呼ぶ。

単純加群に関しては、次の補題が有名である。

補題 0.0.7. (Schur's lemma) S, S' を A -加群とし、 $f : S \rightarrow S'$ を 0 でない A -加群準同型とする。

(1) S が単純加群ならば、 f は単射である；

- (2) S' が単純加群ならば, f は全射である;
 (3) S, S' が共に単純加群ならば, f は全単射である.

定義 0.0.8. 有限次元 K -多元環 A の元 $e \in A$ が $e^2 = e$ を満たすとき, **冪等元** (idempotent) と呼ぶ. 冪等元 $e \in A$ が, 任意の $a \in A$ に対して $ea = ae$ を満たすとき, **中心的** (central) であるという. また, 冪等元 $e_1, e_2 \in A$ が $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ を満たすとき, **直交する** (orthogonal) といい, 任意の 0 でない直交冪等元 $e_1, e_2 \in A$ に対して, $e \neq e_1 + e_2$ であるとき, **原始的** (primitive) であるという.

定義 0.0.9. 多元環 A が唯一の右極大イデアルを持つとき, A は**局所的** (local) であるという.

冪等元や局所多元環に関して, 次の性質が良く知られている.

命題 0.0.10. 冪等元 $e \in A$ が原始的であるための必要十分条件は多元環 $eAe \cong \text{End } eA$ の冪等元が 0 と e のみ, すなわち eAe が局所的であることである.

命題 0.0.11. A を K -多元環とし, M を右 A -加群とする. $\text{End } M$ が局所多元環ならば, M は直既約である.

下の定理は Krull-schmidt の定理として知られており, 任意の有限生成加群は直既約加群に一意に分解されるという主張である. 多元環の表現論では直既約加群の考察が重要になってくる.

定理 0.0.12. (Krull-Schmidt の定理) A を有限次元 K -多元環とする.

- (1) 任意の $M \in \text{mod } A$ は直和分解 $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ を持つ. ここで M_1, \dots, M_m はそれぞれ直既約加群で, 各 $j = 1, \dots, m$ について, $\text{End } M_j$ は局所多元環である;
 (2) 各 M_i, N_j を直既約加群とし, $M \cong \bigoplus_{i=1}^m M_i \cong \bigoplus_{j=1}^n N_j$ とする. このとき, $m = n$ であり, $\{1, \dots, n\}$ の並び替え σ が存在して, 各 $i = 1, \dots, n$ について $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ となる.

直既約加群を考察する上で, 下で定める有限表現型は非常に重要な性質である.

定義 0.0.13. A を多元環とする. 有限生成直既約 A -加群の同型類が有限であるとき, A は**有限表現型** (representation-finite) であるという. A が有限表現型でないとき, **無限表現型** (representation-infinite) であるという.

有限表現型に関しては, [4] にも詳しく書かれている.

定義 0.0.14. 右 A -加群 P が**射影加群**或いは**射影的** (projective) であるとは, 任意の全射 $h : M \rightarrow N$ に対して, $\text{Hom}_A(P, h) : \text{Hom}_A(P, M) \rightarrow \text{Hom}_A(P, N)$ が全射となることである. すなわち, 任意の全射 $h : M \rightarrow N$ と $f \in \text{Hom}_A(P, N)$ に対して, 次の図式が可換となる

$f' \in \text{Hom}_A(P, M)$ が存在することである:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow f' & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{h} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

右 A -加群 E が**移入加群** 或いは**移入的** (injective) であるとは, 任意の単射 $u : L \rightarrow M$ に対して, $\text{Hom}_A(u, E) : \text{Hom}_A(M, E) \rightarrow \text{Hom}_A(L, E)$ が全射となることである. すなわち, 任意の単射 $u : L \rightarrow M$ と $g \in \text{Hom}_A(L, E)$ に対して, 次の図式が可換となる $g' \in \text{Hom}_A(M, E)$ が存在することである:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M \\ & & \downarrow g & \swarrow g' & \\ & & E & & \end{array}$$

- 定義 0.0.15.** (1) L を A -加群 M の部分加群とする. L が**余剰** (superfluous) であるとは, 任意の M の部分加群 X に対して, $L + X = M$ ならば, $X = M$ となることである.
- (2) $\text{mod } A$ の全射 $h : M \rightarrow N$ が**極小** (minimal) であるとは, $\text{Ker } h$ が余剰となることである. また, $\text{mod } A$ の全射 $h : P \rightarrow M$ に対して, P が射影加群で h が極小であるとき, M の**射影被覆** (projective cover) という.
- (3) A -加群 M に対して, 各 P_i が射影加群であるような完全列

$$\cdots \rightarrow P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \rightarrow 0$$

を M の**射影分解** (projective resolution) という. 特に, 全ての $j \geq 1$ に対して $h_j : P_j \rightarrow \text{Im } h_j$ と $H_0 : P_0 \rightarrow M$ が射影被覆であるとき, **極小射影分解** (minimal projective resolution) という. 全ての $i \geq n$ に対して $P_i = 0$ なる n が存在する場合, 長さ n の射影分解といい, その最小値を M の**射影次元** (projective dimension) と呼ぶ. これを $\text{pd}_A M$ と表記する. そのような n が存在しない場合, 射影次元は ∞ で定義する. また, 全ての右 A -加群の射影次元の集合の上限を**大域次元** (global dimension) と呼び, $\text{gl. dim } A$ で表す.

下の定理より, 有限次元多元環の大域次元は単純加群の射影次元で調べることができる.

定理 0.0.16. A を有限次元多元環とする. このとき,

$$\text{gl. dim } A = \sup \{ \text{pd}_A S \mid S \text{ は単純右 } A\text{-加群} \}$$

が成立する.

定義 0.0.17. 多元環 A に対して, 右 A -加群 A_A が移入 A -加群であるとき, A を**自己移入多元環** (self-injective algebra) 或いは**準フロベニウス多元環** (quasi-Frobenius algebra) という. A が自己移入多元環であることと全ての射影右 A -加群が移入的でもあることは同値である.

ホモロジー代数的性質について, 次の補題が有名である.

補題 0.0.18. (蛇の補題) 各行が完全列である $\text{mod } A$ の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{u'} & M' & \xrightarrow{v'} & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

に対して, 列

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ker } f &\xrightarrow{u} \text{Ker } g \xrightarrow{v} \text{Ker } h \\ &\xrightarrow{\delta} \text{Coker } f \xrightarrow{u'} \text{Coker } g \xrightarrow{v'} \text{Coker } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

は完全となる. 特に, $\delta : \text{Ker } h \rightarrow \text{Coker } f$ を**連結準同型** (connecting homomorphism) と呼ぶ.

定義 0.0.19. A を有限次元 K -多元環とし, $\{e_1, \dots, e_n\}$ を原始直交冪等元の完全系とする. A に付随する**ベーシック多元環** (basic algebra) を

$$A^b = e_A A e_A$$

で定める. ここで, $i \neq j$ に対して $e_{j_i} A \not\cong e_{j_t} A$ であり, 各 $e_s A$ が $e_{j_1} A, \dots, e_{j_a} A$ と同型であるように e_{j_1}, \dots, e_{j_a} を選び, $e_A = e_{j_1} + \dots + e_{j_a}$ とおいた.

ベーシック多元環に関して, 次のことが知られている.

命題 0.0.20. A を有限次元 K -多元環とする. A がベーシック多元環であるための必要十分条件は $B = A / \text{rad } A$ が K のいくつかの直積と同型となることである.

定理 0.0.21. A を有限次元 K -多元環とする. このとき, A 上右加群の圏 $\text{Mod } A$ と, ベーシック多元環 A^b 上右加群の圏 $\text{Mod } A^b$ の間に圏同値が存在する. つまり A と A^b は森田同値である.

改めて, 有限次元 K -多元環 A とその加群 M に対して, 用いる記号を以下にまとめておく.

- $\text{rad } M$: M のジャコブソン根基
- $\text{soc } M$: M の半単純成分
- $\ell(M)$: M の組成列の長さ
- $\text{pd}_A M$: M の射影次元
- $\text{gl. dim } A$: A の大域次元
- $\text{Mod } A$: 右 A -加群の圏
- $\text{mod } A$: 有限生成右 A -加群の圏
- $\text{proj } A$: 対象を射影加群とした $\text{mod } A$ の充満部分圏
- $\text{inj } A$: 対象を移入加群とした $\text{mod } A$ の充満部分圏
- $D(-) = \text{Hom}_K(-, K)$: K -双対

1 クイバーと多元環

この章では、クイバーと関係から代数的閉体 K 上の有限次元多元環が構成できることを述べ、逆に、ベーシックな有限次元多元環はこの構成によって得られることを見る。この対応によって抽象的な対象である有限次元多元環を直観的に理解しやすいグラフとして扱うことができるため、クイバーは非常に有用な道具である。

1.1 クイバーとパス多元環

この節ではまずクイバーを定義し、クイバーから K -多元環を構成する方法を述べる。さらに、この K -多元環が持ついくつかの性質を示す。

定義 1.1.1. 四つ組 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ がクイバー (quiver) であるとは、 Q_0, Q_1 が集合であり、 s, t が Q_1 から Q_0 への写像であることをいう。このとき、 Q_0 の元を頂点 (point)、 Q_1 の元を矢 (arrow) という。また、各 $\alpha \in Q_1$ に対して、 $s(\alpha) \in Q_0$ を α の始点 (source)、 $t(\alpha) \in Q_0$ を α の終点 (target) といい、 α は $s(\alpha)$ から $t(\alpha)$ への矢であるという。以下混乱しように無いときは $a = s(\alpha)$ から $b = t(\alpha)$ への矢 $\alpha \in Q_1$ を $\alpha : a \rightarrow b$ と表記し、クイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を単に $Q = (Q_0, Q_1)$ 或いは Q と表すことにする。

定義からわかるように、クイバーは多重辺やループ、サイクルの存在を認めた有向グラフに他ならない。以下にいくつかのクイバーの例を示しておく。

例 1.1.2. (1) クイバー Q を $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$, $s(\alpha) = 3, t(\alpha) = 2, s(\beta) = 2, t(\beta) = 1$ で定める。このとき Q は次のように図示される：

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \beta & & 2 & & \alpha & & 3 \\ \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ \end{array}$$

(2) クイバー Q を $Q_0 = \{1, 2\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $s(\alpha) = 2, t(\alpha) = 1, s(\beta) = 2, t(\beta) = 1, s(\gamma) = 1, t(\gamma) = 1$ で定める。このとき Q は次のように図示される：

$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ \gamma \curvearrowright & \circ & \xrightarrow{\quad} \circ \\ & \beta & \end{array}$$

定義 1.1.3. (1) $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ をクイバーとする。 $Q'_0 \subseteq Q_0, Q'_1 \subseteq Q_1$ であり、 s, t の Q'_1 への制限 $s|_{Q'_1}, t|_{Q'_1}$ がそれぞれ s', t' と等しくなる、すなわち、 $\alpha : a \rightarrow b$ なる Q_1 の矢で、 $\alpha \in Q'_1, a, b \in Q'_0$ ならば、 $s'(\alpha) = a, t'(\alpha) = b$ であるとき、四つ組 $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ を Q の部分クイバー (subquiver) という。また、

$$Q'_1 = \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) \in Q'_0, t(\alpha) \in Q'_0\}$$

を満たすとき、部分クイバーは充満 (full) であるという。

(2) クイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ について、 Q_0, Q_1 が共に有限集合であるとき、 Q を有限クイバー (finite quiver) という。また、 Q から矢の向きを取り除いたグラフ \overline{Q} を Q の基礎

グラフ (underlying graph) といい、 \overline{Q} が連結グラフであるとき、 Q は**連結** (connected) であるという。

定義 1.1.4. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ をクイバーとし、 $a, b \in Q_0$ とする。 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell \in Q_1$ に対して、 $s(\alpha_1) = a, t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1}), t(\alpha_\ell) = b (1 \leq k < \ell)$ を満たすとき、列

$$(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell \mid b)$$

を (始点) a から (終点) b への長さ $\ell \geq 1$ の**パス** (path) といい、単に $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\ell$ で表す。パスは次のように図示される:

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_\ell} a_\ell = b$$

長さ ℓ の Q のパス全体の集合を Q_ℓ で表す。また、 Q の各点 $a \in Q_0$ も長さ 0 のパスとみなし、**自明なパス** (trivial path) と呼ぶことにする。自明なパスを次のように表記する:

$$\varepsilon_a = (a \parallel a)$$

定義からわかるように、長さ 0 のパスと Q_0 の元が、長さ 1 のパスと Q_1 の元がそれぞれ一対一対応している。長さ $\ell \geq 1$ のパス $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\ell$ で、始点と終点が一致する、すなわち $t(\alpha_\ell) = s(\alpha_1)$ となるものを**サイクル** (cycle) という。特に $\ell = 1$ のサイクルを**ループ** (loop) という。また、クイバーがサイクルを持たないとき、**非巡回** (acyclic) であるという。

矢 $\alpha : a \rightarrow b \in Q$ に対し、形式的に逆向きの矢 $\alpha^{-1} : b \rightarrow a$ を考える。列

$$w = \alpha \varepsilon_{11} \alpha_2^{\varepsilon_2} \cdots \alpha_\ell^{\varepsilon_\ell} \quad (\varepsilon_j \in \{-1, 1\}, 1 \leq j \leq \ell)$$

が、 $s(\alpha_1^{\varepsilon_1}) = a, t(\alpha_\ell^{\varepsilon_\ell}) = b, t(\alpha_{j-1}^{\varepsilon_{j-1}}) = s(\alpha_j^{\varepsilon_j})$ を満たすとき、これを a から b への長さ $\ell \geq 1$ の**歩道** (walk) という。 a から b へのパスに対し、 a を b の**前者** (predecessor)、 b を a の**後者** (successor) という。特に、矢 $\alpha : a \rightarrow b$ に対し、 a を b の**直前** (immediate predecessor)、 b を a の**直後** (immediate successor) という。 $a \in Q_0$ に対し、 a の直前全体の集合を a^- で表し、 a の直後全体の集合を a^+ で表す。 $a^+ \cup a^-$ の元を**近傍** (neighbour) という。

次に、パスの合成を考える。二つのパスについて、一方の終点ともう一方の始点が一致している場合に限り、これらを繋ぎ合わせることでパスの合成を定義することができる。このことを用いて、クイバーから多元環が構成できることを述べる。

定義 1.1.5. Q をクイバーとする。 Q の全てのパス $(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell \mid b) (\ell \geq 0)$ を基底とする K 上ベクトル空間において、パス $(a \mid \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \mid b), (c \mid \beta_1, \dots, \beta_k \mid d)$ の積を

$$(a \mid \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \mid b) (c \mid \beta_1, \dots, \beta_k \mid d) = \delta_{bc} (a \mid \alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_k \mid d)$$

で定める (δ_{bc} は Kronecker のデルタ)。すなわち、パス $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_\ell, \beta = \beta_1 \cdots \beta_k$ の積を

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_\ell \beta_1 \cdots \beta_k & (t(\alpha_\ell) = s(\beta_1)) \\ 0 & (t(\alpha_\ell) \neq s(\beta_1)) \end{cases}$$

で定める。このパスの積を線形に拡張することにより、(単位的とは限らない) K -多元環を得られる。この K -多元環を Q の**パス多元環** (path algebra) といい、 KQ で表す。 KQ がいつ単位元を持つか (単位的か) については、補題 1.1.7 を見よ。

言い換えれば、長さ $\ell \geq 0$ のパス全体の集合 Q_ℓ で生成される K 上ベクトル空間 KQ の部分空間 KQ_ℓ によって KQ の直和分解

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus \cdots \oplus KQ_\ell \oplus \cdots$$

が存在するということである。また、任意の $n, m \geq 0$ に対して、長さ n のパスと長さ m のパスの積は 0 または長さ $n+m$ のパスであるから、 $(KQ_n) \cdot (KQ_m) \subseteq KQ_{n+m}$ となることが容易にわかる。この性質を満たすとき、 KQ はしばしば**次数付き K -多元環** (graded K -algebra) と呼ばれ、直和分解は**次数付け** (graded) と呼ばれる。

例 1.1.6. (1) Q を例 1.1.2(1) で定めたクイバーとする。このとき、パス多元環 KQ の基底は $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ であり、積は次の表で与えられる：従って、対応

	ε_1	ε_2	ε_3	α	β	$\alpha\beta$
ε_1	ε_1	0	0	0	0	0
ε_2	0	ε_2	0	0	β	0
ε_3	0	0	ε_3	α	0	$\alpha\beta$
α	0	α	0	0	$\alpha\beta$	0
β	β	0	0	0	0	0
$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	0	0	0	0	0

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \varepsilon_2 &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \varepsilon_3 &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \alpha &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \beta &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \alpha\beta &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

によって、同型

$$KQ \cong \mathbb{T}_3(K) = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix}$$

を得る。

(2) Q を次のようなクイバーとする：

$$\alpha \begin{array}{c} \circ \\ \curvearrowright \\ \circ \end{array} \overset{1}{\alpha}$$

このとき、パス多元環 KQ の基底は $\{\varepsilon_1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^\ell, \dots\}$ であり、積は

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \alpha^\ell &= \alpha^\ell \varepsilon_1 = \alpha^\ell & (\ell \geq 0) \\ \alpha^\ell \alpha^k &= \alpha^{\ell+k} & (\ell, k \geq 0) \end{aligned}$$

で与えられる (ただし、 $\alpha^0 = \varepsilon_1$)。従って、対応

$$\varepsilon_1 \mapsto 1 \qquad \alpha \mapsto t$$

によって, 同型

$$KQ \cong K[t]$$

を得る.

補題 1.1.7. Q をクイバーとし, KQ を Q のパス多元環とする. このとき, 次が成立する:

- (1) KQ は結合的である;
- (2) KQ が単位元を持つための必要十分条件は Q_0 が有限であることである;
- (3) KQ が有限次元であるための必要十分条件は Q が有限かつ非巡回であることである.

証明. (1) 積をパスの合成で定義したことから明らか.

- (2) 各 $\varepsilon_a = (a \parallel a)$ は KQ の冪等元であるから, Q_0 が有限ならば, $\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ が KQ の単位

元となる. 逆に, Q_0 が無限であると仮定し, $1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$ を KQ の単位元とする (ただし, λ_i は 0 でないスカラーで, w_i は Q のパス). Q'_0 を各 w_i の始点の集合とすると, Q'_0 の元の個数は高々 m 個であり, 特に Q'_0 は有限である. そこで, $a \in Q_0 \setminus Q'_0$ を考えれば, $\varepsilon_a \cdot 1 = 0$ となるが, これは矛盾である.

- (3) Q が無限ならば, KQ の基底も無限となり, Q がサイクル $w = \alpha_1 \cdots \alpha_\ell$ を持つとすれば, 任意の $t \geq 0$ について $w^t = (\alpha_1 \cdots \alpha_\ell)^t$ も基底となるため, いずれの場合も KQ は無限次元である. 逆に, Q が有限かつ非巡回と仮定すると, Q のパスは高々有限個であり, 従って KQ は有限次元である.

□

系 1.1.8. Q を有限クイバーとする. このとき, $1 = \sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ は KQ の単位元で, $\{\varepsilon_a \mid a \in Q_0\}$ は KQ の原始直交冪等元の完全系となる.

証明. 積の定義から ε_a はどの二つも直交する冪等元であり, Q_0 が有限なので, $1 = \sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a$ は KQ の単位元である. 後は命題 0.0.10 より ε_a が原始的, すなわち K -多元環 $\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_a$ の冪等元が 0 と ε_a のみであることを示せばよい. そこで, $\varepsilon \in \varepsilon_a(KQ)\varepsilon_a$ を冪等元とすると, $\varepsilon = \lambda \varepsilon_a + w$ と表せる. ここで, $\lambda \in K$ であり, w は a を通る長さ 1 以上のサイクルの線形結合である. 今,

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^2 - \varepsilon = (\lambda \varepsilon_a + w)^2 - (\lambda \varepsilon_a + w) \\ &= \lambda^2 \varepsilon_a + \lambda \varepsilon_a w + w \lambda \varepsilon_a + w^2 - \lambda \varepsilon_a - w \\ &= (\lambda^2 - \lambda) \varepsilon_a + (2\lambda - 1)w + w^2 \end{aligned}$$

より $w = 0$ と $\lambda^2 = \lambda$, すなわち $\lambda = 0$ または $\lambda = 1$ を得る. $\lambda = 0$ の場合は $\varepsilon = 0$ であり, $\lambda = 1$ の場合は $\varepsilon = \varepsilon_a$ である. □

一般に, KQ の原始直交冪等元の完全系 $\{\varepsilon_a \mid a \in Q_0\}$ は唯一つとは限らない. 例えば, Q を $\begin{smallmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ \circ & \text{---} & \circ \end{smallmatrix}$ とすると, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ と $\{\varepsilon_1 + \alpha, \varepsilon_2 - \alpha\}$ は共に KQ の原始直交冪等元の完全系となる.

次の補題の前に、多元環の連結性について説明する。多元環 A が二つの多元環の直積に分解されないとき、または同値な条件であるが、 A の中心的冪等元が 0 と 1 のみであるとき、 A は連結 (connected) 或いは直既約 (indecomposable) であるという。次の補題は多元環の連結性を原始直交冪等元の完全系の分割の議論に置き換えるものである。これにより、連結パス多元環の特徴付けを行うことができる。

補題 1.1.9. A を単位的結合多元環とし、 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を原始直交冪等元の完全系とする。 A が連結多元環であるための必要十分条件は、非自明な $\{1, 2, \dots, n\}$ の分割 $I \dot{\cup} J$ で、 $i \in I, j \in J$ について $e_i A e_j = 0 = e_j A e_i$ となるものが存在しないことである。

証明. まずは必要性の対偶を示す。上記のような分割 $I \dot{\cup} J$ が存在すると仮定し、 $c = \sum_{j \in J} e_j$ とする。この分割は非自明であったから、 $c \neq 0, 1$ であり、各 e_j は互いに直交する冪等元であるから、 c は冪等元となる。さらに、各 $i \in I$ に対して $ce_i = e_i c = 0$ であり、 $j \in J$ に対して $ce_j = e_j c = e_j$ が成り立つ。今、任意の $a \in A$ について、仮定から $i \in I, j \in J$ ならば $e_i a e_j = 0 = e_j a e_i$ である。従って、

$$\begin{aligned} ca &= \left(\sum_{j \in J} e_j \right) a = \left(\sum_{j \in J} e_j a \right) \cdot 1 = \left(\sum_{j \in J} e_j a \right) \left(\sum_{i \in I} e_i + \sum_{k \in J} e_k \right) \\ &= \sum_{j, k \in J} e_j a e_k = \left(\sum_{j \in J} e_j + \sum_{i \in I} e_i \right) \left(\sum_{k \in J} e_k \right) = ac \end{aligned}$$

より、 c は中心的冪等元であり、 $A = cA \times (1 - c)A$ は非自明な A の直積分解である。

次に、十分性の対偶を示す。 A が連結でないとする、 A は非自明な中心的冪等元 $c \neq 0, 1$ を持つ。これより、

$$c = 1 \cdot c \cdot 1 = \left(\sum_{i=1}^n e_i \right) c \left(\sum_{j=1}^n e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n e_i c e_j = \sum_{i=1}^n e_i c e_i$$

を得る。さて、 $c_i = e_i c e_i \in e_i A e_i$ とおく。すると、 $c_i^2 = (e_i c e_i)(e_i c e_i) = e_i c^2 e_i = c_i$ より c_i は $e_i A e_i$ の冪等元となるが、 e_i は原始的であったから、 $c_i = 0$ または $c_i = e_i$ である。そこで、 $I = \{i \mid c_i = 0\}$ 、 $J = \{j \mid c_j = e_j\}$ とすると、 $c \neq 0, 1$ より $\{1, 2, \dots, n\}$ の非自明な分割になっており、 $i \in I$ ならば $e_i c = c e_i = 0$ 、 $j \in J$ ならば $e_j c = c e_j = e_j$ が成立する。以上より、 $i \in I$ かつ $j \in J$ のとき、 $e_i A e_j = e_i A c e_j = e_i c A e_j = 0$ となり、同様に $e_j A e_i = 0$ となる。□

補題 1.1.10. Q を有限クイバーとする。パス多元環 KQ が連結である必要十分条件は Q が連結であることである。

証明. Q を非連結、 Q' を Q の連結成分とし、 Q'' を $Q'_0 = Q_0 \setminus Q'_0$ なる Q の充満部分クイバーとする。 Q', Q'' は共に空でないことに注意しておく。さて、 $a \in Q'_0, b \in Q''_0$ とし、 w を任意の Q のパスとする。 Q が非連結より、 w は Q' か Q'' の連結成分のいずれかに含まれている。 $w \in Q'$ ならば、 $w \varepsilon_b = 0$ より $\varepsilon_a w \varepsilon_b = 0$ であり、 $w \in Q''$ ならば、 $\varepsilon_a w = 0$ より $\varepsilon_a w \varepsilon_b = 0$ である。これらより、 $\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_b = 0$ が得られ、同様に $\varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a = 0$ が得られる。従って補題 1.1.9 より KQ は非連結となる。

次に, Q を連結とし, KQ を非連結と仮定する. 補題 1.1.9 より, $x \in Q'_0, y \in Q''_0$ ならば, $\varepsilon_x(KQ)\varepsilon_y = 0 = \varepsilon_y(KQ)\varepsilon_x$ となるような互いに素な集合への分割 $Q_0 = Q'_0 \dot{\cup} Q''_0$ が存在する. 今, Q は連結なので, $a \in Q'_0, b \in Q''_0$ で a, b が互いに近傍となるものが存在する. 従って, 矢 $\alpha : a \rightarrow b$ が存在するとしてよい. しかし, このとき $\alpha = \varepsilon_a \alpha \varepsilon_b \in \varepsilon_a(KQ)\varepsilon_b = 0$ となり, 矢の存在性に矛盾する. 以上により, 補題の証明が完成する. \square

上の系と補題により, Q が有限連結クイパーならば, Q のパス多元環 KQ は $\{\varepsilon_a \mid a \in Q_0\}$ を原始直交冪等元の完全系とする単位的連結結合多元環となる. このことを次の定理でより一般的な形で特徴付ける.

定理 1.1.11. Q を有限連結クイパー, A を単位的結合多元環とする. このとき, 次の条件を満たす任意の二組の写像 $\varphi_0 : Q_0 \rightarrow A, \varphi_1 : Q_1 \rightarrow A$ に対して, K -多元環の準同型写像 $\varphi : KQ \rightarrow A$ で, 任意の $a \in Q_0, \alpha \in Q_1$ について $\varphi(\varepsilon_a) = \varphi_0(a), \varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$ を満たすものが唯一つ存在する:

- (1) $1 = \sum_{a \in Q_0} \varphi_0(a), \varphi_0(a)^2 = \varphi_0(a)$ で, 任意の $a \neq b$ に対して $\varphi_0(a) \cdot \varphi_0(b) = 0$ が成り立つ;
- (2) $\alpha : a \rightarrow b$ とすると, $\varphi_1(\alpha) = \varphi_0(a)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(b)$ が成り立つ.

証明. $\varphi : KQ \rightarrow A$ を次のように定める:

- 各頂点 $a \in Q_0$ に対して $\varphi(\varepsilon_a) = \varphi_0(a)$;
- 長さ $\ell \geq 1$ のパス w について, 矢への分解 $w = \alpha_1 \cdots \alpha_\ell$ によって $\varphi(w) = \varphi_1(\alpha_1) \cdots \varphi_1(\alpha_\ell)$;
- KQ の任意の元について, それはパスの線形和で表されるから, 上の二条件を整合性が取れるように線形に拡張する.

すると, 任意の $a, b \in Q_0$ とパス $w = \alpha_1 \cdots \alpha_\ell, w' = \beta_1 \cdots \beta_m$ に対して,

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon_a + \varepsilon_b) &= \varphi_0(\varepsilon_a) + \varphi_0(\varepsilon_b) = \varphi_0(\varepsilon_a) + \varphi_0(\varepsilon_b) \\ \varphi(w + w') &= \varphi_1(\alpha_1) \cdots \varphi_1(\alpha_\ell) + \varphi_1(\beta_1) \cdots \varphi_1(\beta_m) = \varphi(w) + \varphi(w') \\ \varphi(\varepsilon_a \varepsilon_b) &= \varphi(0) = 0 = \varphi_0(a)\varphi_0(b) = \varphi(\varepsilon_a)\varphi(\varepsilon_b) \\ \varphi(w) &= \varphi(\alpha_1 \cdots \alpha_\ell) = \varphi_1(\alpha_1) \cdots \varphi_1(\alpha_\ell) = \varphi(\alpha_1) \cdots \varphi(\alpha_\ell) \end{aligned}$$

で, $t = t(\alpha_\ell) \neq s(\beta_1) = s$ のとき,

$$\varphi(w)\varphi(w') = \varphi_1(\alpha_1) \cdots \varphi_1(\alpha_\ell)\varphi_0(t)\varphi_0(s)\varphi_1(\beta_1) \cdots \varphi_1(\beta_m) = 0 = \varphi(ww')$$

より φ は和と積を保つことがわかる. さらに,

$$\varphi(1) = \varphi\left(\sum_{a \in Q_0} \varepsilon_a\right) = \sum_{a \in Q_0} \varphi(\varepsilon_a) = \sum_{a \in Q_0} \varphi_0(a) = 1$$

より単位元を保つこともいえる. 従って, 上で定めた φ は K -多元環の準同型写像である. また, $\varphi, \varphi' : KQ \rightarrow A$ が共に上で定めたような K -多元環の準同型とし, $\alpha_1 \cdots \alpha_\ell$ を Q のパスと

する. すると, φ, φ' が K -多元環の準同型であることから, 次の式を得る:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha_1 \cdots \alpha_\ell) &= \varphi(\alpha_1) \cdots \varphi(\alpha_\ell) = \varphi_1(\alpha_1) \cdots \varphi_1(\alpha_\ell) \\ \varphi'(\alpha_1 \cdots \alpha_\ell) &= \varphi'(\alpha_1) \cdots \varphi'(\alpha_\ell) = \varphi_1(\alpha_1) \cdots \varphi_1(\alpha_\ell)\end{aligned}$$

これより, φ の唯一性が分かり, 定理の証明が完成した. \square

さて, 有限連結クイバーのパス多元環のジャコブソン根基を計算するために, 矢イデアルの概念を導入しておく.

定義 1.1.12. Q を有限連結クイバーとする. Q の矢で生成されたパス多元環 KQ の両側イデアルを KQ の**矢イデアル** (arrow ideal) といい, R_Q で表記する. 以下曖昧でないときには R_Q を単に R と表記することにする.

長さ $\ell \geq 1$ のパス全体の集合 Q_ℓ で生成される K 上ベクトル空間 KQ の部分空間 KQ_ℓ によって R_Q の直和分解

$$R_Q = KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \cdots \oplus KQ_\ell \oplus \cdots$$

が存在することに注意しておく. 特に, R_Q の基礎 (underlying) になっている K 上ベクトル空間は, 長さ $\ell \geq 1$ のパス全体で生成される. つまり, $\ell \geq 1$ に対して

$$R_Q^\ell = \bigoplus_{m \geq \ell} KQ_m$$

であり, 故に R_Q^ℓ は K -ベクトル空間として長さ ℓ 以上のパス全体で生成される KQ のイデアルとなる. 従って, $R_Q^\ell / R_Q^{\ell+1}$ は Q の長さ ℓ のパスの剰余類で生成されており, K -ベクトル空間の同型 $R_Q^\ell / R_Q^{\ell+1} \cong KQ_\ell$ が存在する.

命題 1.1.13. Q を有限連結クイバー, R を KQ の矢イデアルとし, $a \in Q_0$ に対して $\varepsilon_a = (a \parallel a)$ とする. このとき, 集合 $\{\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a + R \mid a \in Q_0\}$ は KQ/R の原始直交冪等元の完全系となり, KQ/R は K のいくつかの直積と同型となる. さらに, Q が非巡回ならば, $\text{rad } KQ = R$ であり, KQ は有限次元ベーシック多元環となる.

証明. まず, 明らかに直和分解

$$KQ/R = \bigoplus_{a, b \in Q_0} \bar{\varepsilon}_a (KQ/R) \bar{\varepsilon}_b$$

が存在するが, R は長さ 1 以上の全てのパスを含むので, 上の式は

$$KQ/R = \bigoplus_{a \in Q_0} \bar{\varepsilon}_a (KQ/R) \bar{\varepsilon}_a$$

となる. 従って KQ/R は K -ベクトル空間として長さ 0 のパスの剰余類, すなわち $\{\bar{\varepsilon}_a = \varepsilon_a + R \mid a \in Q_0\}$ によって生成される. この集合が KQ/R の原始直交冪等元の完全系となるのは明らかである. 特に, 各 $a \in Q_0$ に対して, $\bar{\varepsilon}_a (KQ/R) \bar{\varepsilon}_a$ は K -ベクトル空間として

$\bar{\varepsilon}_a$ によって生成されるから, K -多元環の同型 $\bar{\varepsilon}_a(KQ/R)\bar{\varepsilon}_a \cong K$ を得る. これより, K -多元環の同型 $KQ/R = \bigoplus_{a \in Q_0} \bar{\varepsilon}_a(KQ/R)\bar{\varepsilon}_a \cong K^{|Q_0|}$ を得る.

今, Q を非巡回と仮定する. すると, 補題 1.1.7 より KQ は有限次元多元環である. Q が有限非巡回より, Q が含む最長のパスの長さを $\ell \geq 1$ とすると, 任意の $\ell + 1$ 本の矢の積は 0 であり, 従って $R^{\ell+1} = 0$ である. これより, イデアル R が冪零であることが分かり, 命題 0.0.2 より, $R \subseteq \text{rad } KQ$ を得る. さらに, $KQ/R \cong K^{|Q_0|}$ であったから, 再び命題 0.0.2 より $R = \text{rad } KQ$ となり, 命題 0.0.20 を適用すれば, KQ がベーシック多元環となることがわかる. \square

Q が非巡回でないとき, すなわち Q がサイクルを持つとき, 一般に $\text{rad } KQ$ と矢イデアル R_Q は一致しない. 例えば, Q を例 1.1.6(2) で定めたクイバーとする. 例で見たように, $KQ \cong K[t]$ であった. 今, K は代数的閉体より, $\{t - \lambda \mid \lambda \in K\}$ は極大イデアルを生成する既約多項式の無限集合であり, これらで生成される極大イデアルの共通部分は 0 である. 従って $\text{rad } KQ = 0$ となる. 一方で, K -ベクトル空間として $R_Q = \bigoplus_{\ell > 0} K\alpha^\ell \neq 0$ である.

今後参照しやすいように, ここまでの主張を下に系としてまとめておく. なお, 証明は省略するが, 必要に応じて遡って確認してほしい.

系 1.1.14. Q を有限連結非巡回クイバーとする. このとき, Q のパス多元環 KQ はベーシックな単位的有限次元連結結合 K -多元環であり, $\{\varepsilon_a = (a \parallel a) \mid a \in Q_0\}$ を原始直交冪等元の完全系として持つ. さらに, KQ の矢イデアルはジャコブソン根基となる.

次に, 上の系のようなパス多元環が下三角行列と同一視されることを見る. まずは一般化行列多元環の構成方法を思い出そう. $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ を K -多元環の族とし, $(M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ を A_i - A_j -両側加群で, 各 i について $M_{ii} = A_i$ となるとする. さらに, 三つ組 (i, j, k) に関する A_i - A_j -両側加群準同型

$$\varphi_{ik}^j : M_{ij} \otimes M_{jk} \rightarrow M_{ik}$$

が四つ組 (i, j, k, ℓ) に対して, 結合則

$$\varphi_{i\ell}^k (\varphi_{ik}^j \otimes 1) = \varphi_{i\ell}^j (1 \otimes \varphi_{j\ell}^k)$$

を満足する, すなわち, 次の図式

$$\begin{array}{ccc} M_{ij} \otimes M_{jk} \otimes M_{k\ell} & \xrightarrow{1 \otimes \varphi_{j\ell}^k} & M_{ij} \otimes M_{j\ell} \\ \varphi_{ik}^j \otimes 1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \varphi_{i\ell}^j \\ M_{ik} \otimes M_{k\ell} & \xrightarrow{\varphi_{i\ell}^k} & M_{i\ell} \end{array}$$

が可換になると仮定する. このとき, $n \times n$ 行列の K -ベクトル空間

$$A = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} = \{[x_{ij}] \mid \text{任意の } 1 \leq i, j \leq n \text{ に対して } x_{ij} \in M_{ij}\}$$

は、積を次のように定めることで A -多元環となることが容易に確認できる:

$$[x_{ij}] \cdot [y_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^n \varphi_{ij}^k(x_{ik} \otimes y_{kj}) \right]$$

また, Q を有限非巡回クイバーとし, $n = |Q_0|$ を Q の頂点の個数とする. i から j へのパスがあるときに $j \leq i$ となるようにすれば, Q の各頂点に 1 から n まで名前を付けることができる.

以上のことを用いて次の補題を証明する.

補題 1.1.15. Q を有限連結非巡回クイバー, $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ を頂点集合とし, 各 $i, j \in Q_0$ に対して i から j へのパスがあるときに $j \leq i$ となるように各頂点に名前を付けるとする. このとき, Q のパス多元環 KQ は次の下三角行列多元環と同型になる:

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(KQ)\varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_2(KQ)\varepsilon_1 & \varepsilon_2(KQ)\varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_n(KQ)\varepsilon_1 & \varepsilon_n(KQ)\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n(KQ)\varepsilon_n \end{bmatrix}$$

ただし $\varepsilon_a = (a \parallel a)$, $a \in Q_0$ で, 積は KQ から誘導されるものである.

証明. 系 1.1.14 より $\{\varepsilon_a = (a \parallel a) \mid a \in Q_0\}$ は原始直交冪等元の完全系であるから, K -ベクトル空間の直和分解

$$KQ = \bigoplus_{a,b \in Q_0} \varepsilon_a(KQ)\varepsilon_b$$

が存在する. さらに仮定から $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_j \neq 0$ ならば $j \leq i$ であり, 任意の $i \in Q_0$ を通るサイクルが存在しないことから, $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_i \cong K$ である. 今, KQ の積の定め方から $j \leq i$ なる任意のペア (j, i) に対して, $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_j$ は $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_{i-\varepsilon_j}(KQ)\varepsilon_j$ -両側加群であり, $k \leq j \leq i$ なる三つ組 (k, j, i) に対して, K -線形写像

$$\varphi_{ik}^j : \varepsilon_i(KQ)\varepsilon_j \otimes \varepsilon_j(KQ)\varepsilon_k \rightarrow \varepsilon_i(KQ)\varepsilon_k$$

が存在する. ここでテンソル積は $\varepsilon_j(KQ)\varepsilon_j$ 上で与えられる. φ_{ik}^j が $\ell \leq k \leq j \leq i$ に対して結合則 $\varphi_{il}^k(\varphi_{ik}^j \otimes 1) = \varphi_{il}^j(1 \otimes \varphi_{jk}^k)$ を満たす $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_{i-\varepsilon_j}(KQ)\varepsilon_j$ -両側加群準同型であることは容易に確認できる. 従って上と同様に一般化行列多元環を構成することができる. 故に, i から j への任意のパスを $\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_j$ の基底の元に対応させることにより, K -多元環の同型 $KQ \cong A$ を得る. 実際, KQ と A は明らかに K -ベクトル空間上同型であり, φ_{ik}^j の定義と A の積の定め方から, KQ と A の間の同型写像は積を保つことがわかる. \square

特に Q が多重辺をもたず, 基礎グラフ \overline{Q} が木 (つまり, 連結でサイクルを持たない) ならば, Q の任意の 2 点間のパスは高々 1 通りであり, 従って全ての $j \leq i$ に対して $\dim_K(\varepsilon_i(KQ)\varepsilon_j) \leq 1$ である. これより, KQ は下三角行列多元環

$$\mathbb{T}_n(K) = \begin{bmatrix} K & 0 & \cdots & 0 \\ K & K & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K & K & \cdots & K \end{bmatrix}$$

の部分多元環と同型になる.

例 1.1.16. (1) Q を

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{1}{\circ} & \longleftarrow & \overset{2}{\circ} & \longleftarrow & \overset{3}{\circ} & \longleftarrow & \cdots \longleftarrow \overset{n-1}{\circ} \longleftarrow \overset{n}{\circ} \end{array}$$

とする. このとき, $KQ \cong \mathbb{T}_n(K)$ となる.

(2) Q をクロネッカークイバー

$$\begin{array}{ccc} \overset{1}{\circ} & \xlongequal{\quad} & \overset{2}{\circ} \end{array}$$

とする. このとき, K -多元環の同型

$$KQ \cong \begin{bmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{bmatrix}$$

が存在する. ここで K^2 は自然な作用

$$a \cdot (x, y) = (ax, ay), (x, y) \cdot b = (xb, yb) \quad (a, b, x, y \in K)$$

で K - K -両側加群とみなす. このようなクロネッカークイバーのパス多元環は**クロネッカー多元環** (Kronecker algebra) と呼ばれる.

一般に, 上の系で定めたような KQ の下三角行列の表現方法は一通りではないことに注意しておく. 例えば, $\mathbb{T}_3(K)$ の部分多元環

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in K \right\}$$

に対して,

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ (b, c) & d \end{bmatrix}$$

で対応を定めれば, $KQ \cong A$ となる.

1.2 許容イデアルと剰余多元環

補題 1.1.7 で見たように, 一般に前節で構成したパス多元環は有限次元ではない. そこでこの節では, パス多元環を以下で定義する許容イデアルで割った剰余多元環が有限次元になることを述べる.

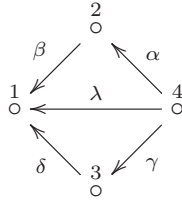
定義 1.2.1. Q を有限クイバーとし, R_Q をパス多元環 KQ の矢イデアルとする. 両側イデアル \mathcal{I} がある $m \geq 2$ に対して $R_Q^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_Q^2$ となるとき, \mathcal{I} を**許容イデアル** (admissible ideal) という. \mathcal{I} が許容イデアルであるとき, ペア (Q, \mathcal{I}) を**関係付きクイバー** (bound quiver) と呼び, 剰余多元環 KQ/\mathcal{I} を**関係付きクイバー多元環** (bound quiver algebra) と呼ぶ.

定義から即座にわかるように, KQ のイデアル $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$ が許容イデアルである必要十分条件は \mathcal{I} が十分大きな長さの全てのパスを持つことである. 言い換えれば, 任意のサイクル $\sigma \in Q$ に対して, $\sigma^s \in \mathcal{I}$ となる $s \geq 1$ が存在することである. 特に, Q が非巡回ならば, R_Q^2 に含まれる任意のイデアルは許容イデアルとなる.

例 1.2.2. (1) 任意の有限クイバーと $m \geq 2$ に対して, R_Q^m は許容イデアルとなる.

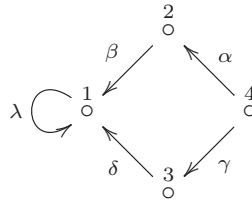
(2) 零イデアル $\{0\}$ が許容イデアルである必要十分条件は, $R_Q^m = 0$ となる $m \geq 2$ が存在することであり, これは Q が非巡回であることに他ならない.

(3) Q を



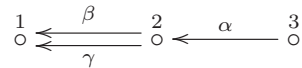
とする. このとき, KQ のイデアル $\mathcal{I}_1 = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ は許容イデアルとなるが, $\mathcal{I}_2 = \langle \alpha\beta - \lambda \rangle$ は許容イデアルとはならない. 何故ならば, $\alpha\beta - \lambda \notin R_Q^2$ だからである.

(4) Q を



とする. このとき, $\mathcal{I} = \langle \alpha\beta - \gamma\delta, \beta\lambda, \lambda^3 \rangle$ が許容イデアルとなることを示そう. $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$ であることは明らかである. 今, $R_Q^4 \subseteq \mathcal{I}$ であることを示したい. 長さが 4 以上の任意のパスについて, 始点が 1, 2, 3 の場合は λ^3 を経路するため, \mathcal{I} に含まれる. 始点が 4 の場合は $\alpha\beta\lambda^2$ もしくは $\gamma\delta\lambda^2$ を経路するが, 前者は $\beta\lambda$ で生成できるため \mathcal{I} に含まれる. 一方で後者は, $\gamma\delta\lambda^2 = (\gamma\delta - \alpha\beta)\lambda^2 + \alpha\beta\lambda^2$ よりやはり \mathcal{I} に含まれる. 以上により $R_Q^4 \subseteq \mathcal{I}$ であることが分かり, 証明が完成する. 別の例として, $\mathcal{I}' = \langle \lambda^5 \rangle$ は $R_Q^7 \subseteq \mathcal{I}' \subseteq R_Q^2$ より許容イデアルとなるが, $\mathcal{I}'' = \langle \beta\lambda, \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ は全ての $m \geq 2$ に対して $\lambda^m \notin \mathcal{I}''$ であるため許容イデアルとならない.

(5) Q を



とする. このとき, $\mathcal{I}_1 = \langle \alpha\beta \rangle$, $\mathcal{I}_2 = \langle \alpha\beta - \alpha\gamma \rangle$ はそれぞれ許容イデアルとなる. さらに, 関係付きクイバー多元環 $KQ/\mathcal{I}_1, KQ/\mathcal{I}_2$ に対して, 写像 $KQ/\mathcal{I}_1 \rightarrow KQ/\mathcal{I}_2$ を $\varepsilon_i \mapsto \varepsilon_i (i = 1, 2, 3), \alpha \mapsto \alpha, \beta \mapsto \beta - \gamma, \gamma \mapsto \gamma$ と対応を定めることで, 同型 $KQ/\mathcal{I}_1 \cong KQ/\mathcal{I}_2$ を得る.

例を見ればわかるように, 許容イデアルを生成元で表すと都合である. この生成元はクイバーの関係と呼ばれる.

定義 1.2.3. $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ をクイバーとする. 長さが 2 以上で始点と終点がそれぞれ同じパスの K -線形結合を Q の関係 (relation) という. すなわち,

$$\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$$

が Q の関係であるとは, $\lambda_i \in K$ は 0 でないスカラーで, w_i は任意の $1 \leq i, j \leq m$ に対して, $s(w_i) = s(w_j), t(w_i) = t(w_j)$ を満たす長さ 2 以上のパスであることをいう.

上の式において, 特に $m = 1$ のときの関係を零関係 (zero relation) 或いは単項関係 (monomial relation) と呼び, $w_1 - w_2$ (w_1, w_2 はパス) のような形の関係を可換関係 (commutativity relation) と呼ぶ.

イデアル $\langle \rho_j \mid j \in J \rangle$ が許容イデアルとなるような Q の関係の集合を $(\rho_j)_{j \in J}$ とする. このとき Q は関係 $(\rho_j)_{j \in J}$ (もしくは $\rho_j = 0$) によって制限されている (bound) という. 例えば例 1.2.2(4) を見ると, 許容イデアル \mathcal{I} は可換関係 $\rho_1 = \alpha\beta - \gamma\delta$ と二つの零関係 $\rho_2 = \beta\lambda, \rho_3 = \lambda^3$ で生成されており, 従って Q は関係 $\alpha\beta = \gamma\delta, \beta\lambda = 0, \lambda^3 = 0$ によって制限されている.

補題 1.2.4. Q を有限クイバー, \mathcal{I} を KQ の許容イデアルとする. このとき, $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \mid a \in Q_0\}$ は KQ/\mathcal{I} の原始直交幂等元の完全系となる.

証明. e_a は自然な全射準同型 $KQ \rightarrow KQ/\mathcal{I}$ による ε_a の像であるから, 系 1.1.8 から $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \mid a \in Q_0\}$ は直交幂等元の完全系となることが直ちに従う. 後は系 1.1.8 と同様に各 e_a が原始的, すなわち $e_a(KQ/\mathcal{I})e_a$ の幂等元が 0 と e_a のみであることを示せばよい. $e \in e_a(KQ/\mathcal{I})e_a$ を任意の幂等元とすると, $e = \lambda\varepsilon_a + w + \mathcal{I}$ と表せる. ここで, $\lambda \in K$ であり, w は a を通る長さ 1 以上のサイクルの線形結合である. 今, $e^2 = e$ より

$$(\lambda^2 - \lambda)\varepsilon_a + (2\lambda - 1)w + w^2 \in \mathcal{I}$$

であり, R_Q を KQ の矢イデアルとすると, $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$ より $\lambda^2 - \lambda = 0$ すなわち $\lambda = 0$ または $\lambda = 1$ である. $\lambda = 0$ とすると, $e = w + \mathcal{I}$ より w は \mathcal{I} を法として幂等元となる. 一方である $m \geq 2$ で $R_Q^m \subseteq \mathcal{I}$ より $w^m \in \mathcal{I}$ すなわち w は \mathcal{I} を法として幂零元ともなる. 従って, $e^m = w^m + \mathcal{I} = 0$ より $e = 0$ と $w \in \mathcal{I}$ を得る. また, $\lambda = 1$ とすると, $e_a - e = \varepsilon_a + \mathcal{I} - (\varepsilon_a + w + \mathcal{I}) = -w + \mathcal{I}$ は

$$(e_a - e)^2 = e_a^2 - e_a e - e e_a + e^2 = e_a - e - e + e = e_a - e$$

より $e_a(KQ/\mathcal{I})e_a$ の幂等元となり, 上と同様にして w は \mathcal{I} を法として幂等元にも幂零元にもなることがわかる. 従って, $e = e_a$ を得る. \square

補題 1.2.5. Q を有限クイバー, \mathcal{I} を KQ の許容イデアルとする. KQ/\mathcal{I} が連結である必要十分条件は Q が連結であることである.

証明. Q を非連結とすると, 補題 1.1.10 より KQ は非連結であるから, ある非自明な中心的幂等元 $\gamma \in KQ$ が存在する. さらに補題 1.1.9 の証明から, γ はいくつかの頂点の和で表される

ことがわかる. このとき, $c = \gamma + \mathcal{I} \neq 0$ であり, 一方で $c = 1 + \mathcal{I}$ とすると, $1 - \gamma \in \mathcal{I}$ となり $\mathcal{I} \subseteq R_Q^2$ に矛盾する. 従って c は KQ/\mathcal{I} の非自明な中心的幂等元となり, KQ/\mathcal{I} は非連結であることがわかる. Q が連結のときは, 補題 1.1.10 と同様の手順で KQ/\mathcal{I} が連結であることが証明される. \square

命題 1.2.6. Q を有限クイバー, \mathcal{I} を KQ の許容イデアルとする. このとき KQ/\mathcal{I} は有限次元である.

証明. 許容イデアルの定義から, KQ の矢イデアル R とある $m \geq 2$ に対して $R^m \subseteq \mathcal{I}$ が成立する. このとき, K -多元環の全射準同型写像 $KQ/R^m \rightarrow KQ/\mathcal{I}$ が存在するから, KQ/R^m が有限次元であることを示せば十分である. KQ/R^m は K -ベクトル空間として長さ m 以下のパスの剰余類を基底に持つが, このようなパスは高々有限個である. これにより命題の主張が従う. \square

一般に, \mathcal{I} が許容イデアルでないならば, KQ/\mathcal{I} は有限次元でなく, 右ネーターでさえない, すなわち無限生成右イデアルを持つ. 次の例は J. Dieudonné による有限生成加群の部分加群が無限生成となる例である.

例 1.2.7. Q を

$$\alpha \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowright \\ \circlearrowleft \end{array} \beta$$

とし, $\mathcal{I} = \langle \beta\alpha, \beta^2 \rangle$ とする. すると任意の $m \geq 1$ について $\alpha^m \notin \mathcal{I}$ であるから明らかに \mathcal{I} は許容イデアルにならない. さて, $A = KQ/\mathcal{I}$ とし, J を $\bar{\alpha}^n \bar{\beta} (n \geq 1)$ で生成される A の部分空間とする. ただしここで $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}, \bar{\beta} = \beta + \mathcal{I}$ である. このとき, 任意の $n \geq 1$ に対して $\bar{\alpha}^n \bar{\beta} \bar{\alpha} = 0, \bar{\alpha}^n \bar{\beta}^2 = 0$ より $J\bar{\alpha} \subseteq J, J\bar{\beta} \subseteq J$ であるから J は A の右イデアルとなることがわかる. 特に, 右 A -加群 J_A は巡回右 A -加群 A_A の部分加群となるが, J_A は無限生成である. 何故ならば, J が有限集合 $\mathcal{J} = \{\bar{\alpha}\bar{\beta}, \dots, \bar{\alpha}^m \bar{\beta}\}$ で生成されるとすると, $\bar{\alpha}^{m+1} \bar{\beta} \in J$ は \mathcal{J} の元の線形結合で表示することができないからである.

補題 1.2.8. Q を有限クイバーとする. 任意の KQ の許容イデアル \mathcal{I} は有限生成である.

証明. R を KQ の矢イデアルとし, $R^m \subseteq \mathcal{I}$ となる $m \geq 2$ を一つ固定する. このとき, KQ -加群の短完全列 $0 \rightarrow R^m \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}/R^m \rightarrow 0$ が存在するから, R^m と \mathcal{I}/R^m が有限生成であることを示せば十分である. R^m は長さ m のパスで生成されており, そのようなパスは高々有限個であるから R^m は有限生成である. 一方で, R^m は許容イデアルなので, 直前の命題から KQ/R^m は有限次元多元環であり, \mathcal{I}/R^m は KQ/R^m のイデアルなので, \mathcal{I}/R^m は K -ベクトル空間として有限次元となり, 従って有限生成 KQ -加群である. \square

系 1.2.9. Q を有限クイバー, \mathcal{I} を KQ の許容イデアルとする. このとき, Q の関係の有限な集合 $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ で $\mathcal{I} = \langle \rho_1, \dots, \rho_m \rangle$ となるものが存在する.

証明. 上の補題から, \mathcal{I} は有限生成であり, 従って生成集合 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_t\}$ を持つ. 一般に, σ_i を構成するパスの始点と終点がそれぞれ一致しているとは限らないため, Q の関係とはならな

い. 一方で, 任意の $i(1 \leq i \leq t)$ と $a, b \in Q_0$ について, $\varepsilon_a \sigma_i \varepsilon_b$ は 0 或いは Q の関係となる. $\sigma_i = \sum_{a, b \in Q_0} \varepsilon_a \sigma_i \varepsilon_b$ であるから, $\{\varepsilon_a \sigma_i \varepsilon_b \mid 1 \leq i \leq t; a, b \in Q_0\}$ の中から 0 でない元を取り直せば, Q の関係の有限な生成集合となる. \square

補題 1.2.10. Q を有限クイバー, R_Q を KQ の矢イデアルとし, \mathcal{I} を KQ の許容イデアルとする. このとき, $\text{rad}(KQ/\mathcal{I}) = R_Q/\mathcal{I}$ で, KQ/\mathcal{I} はベーシック多元環である.

証明. \mathcal{I} が許容イデアルより, $R_Q^m \subseteq \mathcal{I}$ となる $m \geq 2$ が存在する. これより $(R_Q/\mathcal{I})^m = 0$ となり, R_Q/\mathcal{I} は KQ/\mathcal{I} の冪零イデアルであることがわかる. 一方で, 命題 1.1.13 より, $(KQ/\mathcal{I})/(R_Q/\mathcal{I}) \cong KQ/R_Q$ は K のいくつかの直積と同型になる. 従って命題 1.1.13 と同様の議論で $\text{rad}(KQ/\mathcal{I}) = R_Q/\mathcal{I}$ であることと KQ/\mathcal{I} がベーシック多元環であることを得る. \square

系 1.2.11. 任意の ℓ について, $\text{rad}^\ell(KQ/\mathcal{I}) = (R_Q/\mathcal{I})^\ell$ が成り立つ.

証明. 上の補題から明らか. \square

補題 1.2.10 と系 1.2.11 から,

$$\text{rad}(KQ/\mathcal{I})/\text{rad}^2(KQ/\mathcal{I}) = (R_Q/\mathcal{I})/(R_Q/\mathcal{I})^2 \cong R_Q/R_Q^2$$

は K -ベクトル空間上で $\{\bar{\alpha} + \text{rad}^2(KQ/\mathcal{I}) \mid \bar{\alpha} = \alpha + KQ/\mathcal{I}; \alpha \in Q_1\}$ を基底として持つ.

ここまでの主張を以下に系としてまとめることとする. 証明は必要に応じて遡って参照されたい.

系 1.2.12. Q を有限連結クイバー, R_Q を KQ の矢イデアルとし, \mathcal{I} を KQ の許容イデアルとする. このとき KQ/\mathcal{I} はベーシックな単位的有限次元連結 K -多元環であり, $\{e_a \mid a \in Q_0\}$ を原始直交冪等元の完全系として持つ. さらに R_Q/\mathcal{I} はジャコブソン根基となる.

例 1.2.13. (1) Q を

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \beta & & 2 \\ \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \alpha & \longrightarrow & 3 \\ & & \circ & & \circ \end{array}$$

とする. このとき例 1.1.16(1) より

$$KQ \cong \mathbb{T}_3(K) = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix}$$

である. 今, $\mathcal{I} = \langle \alpha\beta \rangle = R_Q^2$ は許容イデアルであり, 命題 1.1.13 より

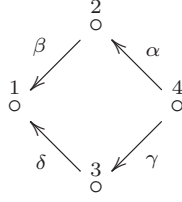
$$\mathcal{I} = R_Q^2 = \text{rad}^2 KQ \cong \text{rad}^2 \mathbb{T}_3(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 従って

$$KQ/\mathcal{I} \cong \mathbb{T}_3(K)/\text{rad}^2 \mathbb{T}_3(K) \cong \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ 0 & K & K \end{bmatrix}$$

を得る.

(2) Q を



とする. このとき $\mathcal{I} = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ は許容イデアルであり, 従って KQ/\mathcal{I} は有限次元 K -多元環となる. この基底は $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}, \bar{\alpha}\bar{\beta}\}$ であり, 補題 1.1.15 より同型

$$KQ/\mathcal{I} \cong \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 \\ K & K & K & K \end{bmatrix}$$

を得る.

(3) Q を



とする. このとき例 1.1.6(2) より $KQ \cong K[t]$ であり, Q の任意の許容イデアルは $\langle \alpha^m \rangle (m \geq 2)$ という形をしている. 従って $KQ/\mathcal{I} \cong K[t]/\langle t^m \rangle$ は m -次元である.

1.3 有限次元多元環のクイバー

ここまでクイバーと許容イデアルによってベーシックな有限次元多元環が構成できることを見てきた. 章の最後に, この節ではその逆が成り立つこと, つまりベーシックな有限次元多元環が関係付きクイバー多元環と同型となることを示す. そのためにまずは与えられたベーシックな有限次元多元環からクイバーが定義されることを述べる.

定義 1.3.1. A をベーシックな有限次元連結 K -多元環とし, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を A の原始直交冪等元の完全系とする. このとき, A のクイバー ((ordinary) quiver) Q_A を以下で定める:

- (1) Q_A の頂点の集合を $\{1, 2, \dots, n\}$ とする;
- (2) 二点 $a, b \in (Q_A)_0$ に対して, 矢 $\alpha : a \rightarrow b$ の本数を K -ベクトル空間 $e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e_b$ の次元の数とする.

A が有限次元より, 各 $e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e_b$ もそうであり, 従って Q_A は有限クイバーである.

補題 1.3.2. A をベーシックな有限次元連結 K -多元環とする.

- (1) Q_A は A の原始直交冪等元の完全系のとり方に依らない;

(2) 任意の A の原始直交冪等元の組 (e_a, e_b) に対して, K -線形写像

$$\begin{array}{ccc} \psi : e_a(\text{rad } A)e_b / e_a(\text{rad}^2 A)e_b & \longrightarrow & e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e_b \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ e_a x e_b + e_a(\text{rad}^2 A)e_b & \longmapsto & e_a(x + \text{rad}^2 A)e_b \end{array}$$

は同型となる.

証明. (1) まず, A_A の直既約加群への分解は一通りであるから, 直既約な直和因子の数, つまり原始直交冪等元の完全系の元の個数もとりに方に依らず決定される. 一方で,

$$A_A = \bigoplus_{a=1}^n e_a A = \bigoplus_{b=1}^n e'_b A$$

とすると, 各 $a(1 \leq a \leq n)$ に対して $e_a A \cong e'_a A$ となるように添字を付け直すことができる. 後はこのことを用いて任意の組 (a, b) に対して $\dim_K e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e_b = \dim_K e'_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e'_b$ であることを示せばよい. 関手 $e_a A \otimes_A (-) = e_a(-)$ は完全性を保つから, 短完全列 $0 \rightarrow \text{rad}^2 A \rightarrow \text{rad } A \rightarrow \text{rad } A / \text{rad}^2 A \rightarrow 0$ に作用させることにより, 短完全列

$$0 \rightarrow e_a(\text{rad}^2 A) \rightarrow e_a(\text{rad } A) \rightarrow e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A) \rightarrow 0$$

を得る. これより, A -加群準同型

$$\varphi : e_a(\text{rad } A) \ni e_a x \longmapsto e_a(x + \text{rad}^2 A) \in e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)$$

に対して, $\text{Ker } \varphi = e_a(\text{rad}^2 A)$ となる. 従って準同型定理より,

$$e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A) \cong e_a(\text{rad } A) / e_a(\text{rad}^2 A) \cong \text{rad}(e_a A) / \text{rad}^2(e_a A)$$

を得る. 以上のことから

$$\begin{aligned} e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e_b &\cong [\text{rad}(e_a A) / \text{rad}^2(e_a A)]e_b \\ &\cong \text{Hom}_A(e_b A, \text{rad}(e_a A) / \text{rad}^2(e_a A)) \\ &\cong \text{Hom}_A(e'_b A, \text{rad}(e'_a A) / \text{rad}^2(e'_a A)) \\ &\cong [\text{rad}(e'_a A) / \text{rad}^2(e'_a A)]e'_b \\ &\cong e'_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e'_b \end{aligned}$$

となり, 故に $\dim_K e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e_b = \dim_K e'_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e'_b$ となる.

(2) 関手 $(-) \otimes_A A e_b = (-) e_b$ も完全性を保つから, 上と同様にして短完全列

$$0 \rightarrow e_a(\text{rad}^2 A)e_b \rightarrow e_a(\text{rad } A)e_b \rightarrow e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e_b \rightarrow 0$$

から K -線形写像

$$\varphi' : e_a(\text{rad } A)e_b \ni e_a x e_b \longmapsto e_a(x + \text{rad}^2 A)e_b \in e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e_b$$

に対して $\text{Ker } \varphi' = e_a(\text{rad}^2 A)e_b$ となることがわかる. 従って準同型定理より ψ は同型写像となる.

□

さて, A が連結多元環ならば, Q_A も連結となることを示そう. 定義から, $\text{rad } A / \text{rad}^2 A$ は $\{\bar{x}_\alpha\}_\alpha$ ($\alpha \in (Q_A)_1$) を基底として持つ. 各 $\alpha \in (Q_A)_1$ に対して, $x_\alpha \in \text{rad } A$ を $\bar{x}_\alpha = x_\alpha + \text{rad}^2 A$ なる元とする. 任意の $\text{rad } A$ の元を x_α と Q_A のパスで表せることを次の補題で示す.

補題 1.3.3. 各矢 $\alpha : i \rightarrow j \in (Q_A)_1$ に対して, $x_\alpha \in e_i(\text{rad } A)e_j$ を $\{x_\alpha + \text{rad}^2 A \mid \alpha : i \rightarrow j\}$ が $e_i(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e_j$ の基底となる元とする. このとき, 次が成立する:

- (1) 任意の二点 $a, b \in (Q_A)_0$ に対して, 任意の $x \in e_a(\text{rad } A)e_b$ は $x = \sum x_{\alpha_1} x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_\ell} \lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\ell}$ で表される. ただし, $\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\ell} \in K$ で, この和は Q_A の a から b への全てのパスで与えられる;
- (2) 各矢 $\alpha : i \rightarrow j$ に対して, 次の条件を満たす零でない非同型写像 $\tilde{x}_\alpha \in \text{Hom}_A(e_j A, e_i A)$ は x_α によって唯一つに定まる:
 - $\tilde{x}_\alpha(e_j) = x_\alpha$;
 - $\text{Im } \tilde{x}_\alpha \subseteq e_i(\text{rad } A)$;
 - $\text{Im } \tilde{x}_\alpha \not\subseteq e_i(\text{rad}^2 A)$

証明. (1) K -ベクトル空間として $\text{rad } A \cong (\text{rad } A / \text{rad}^2 A) \oplus \text{rad}^2 A$ より, $e_a(\text{rad } A)e_b \cong e_a(\text{rad } A / \text{rad}^2 A)e_b \oplus e_a(\text{rad}^2 A)e_b$ を得る. これより x は

$$x = \sum_{\alpha: a \rightarrow b} x_\alpha \lambda_\alpha + e_a(\text{rad}^2 A)e_b \quad (\lambda_\alpha \in K)$$

と書ける. すなわち, 次で定める x' は

$$x' = x - \sum_{\alpha: a \rightarrow b} x_\alpha \lambda_\alpha \in e_a(\text{rad}^2 A)e_b$$

となることがわかる. $\text{rad } A = \bigoplus_{i,j} e_i(\text{rad } A)e_j$ より,

$$e_a(\text{rad}^2 A)e_b = \sum_{c \in (Q_A)_0} [e_a(\text{rad } A)e_c][e_c(\text{rad } A)e_b]$$

であり, 従って $x' = \sum_{c \in (Q_A)_0} x'_c y'_c$ ($x'_c \in e_a(\text{rad } A)e_c, y'_c \in e_c(\text{rad } A)e_b$) と表せる. 上と同様の議論により

$$x'_c = \sum_{\beta: a \rightarrow c} x_\beta \lambda_\beta + e_a(\text{rad}^2 A)e_c, \quad y'_c = \sum_{\gamma: c \rightarrow b} x_\gamma \lambda_\gamma + e_c(\text{rad}^2 A)e_b \quad (\lambda_\beta, \lambda_\gamma \in K)$$

であるから, 簡単な計算により

$$x = \sum_{\alpha: a \rightarrow b} x_\alpha \lambda_\alpha + \sum_{\beta: a \rightarrow c} \sum_{\gamma: c \rightarrow b} x_\beta x_\gamma \lambda_\beta \lambda_\gamma + e_a(\text{rad}^3 A)e_b$$

となる. 後は $\text{rad } A$ が冪零であることを用いれば, 帰納的に結論を得られる.

- (2) 仮定から $0 \neq x_\alpha \in e_i(\text{rad } A)e_j$ であり, K -同型 $e_i(\text{rad } A)e_j \cong \text{Hom}_A(e_j A, e_i(\text{rad } A))$ によって $\tilde{x}_\alpha \in \text{Hom}_A(e_j A, e_i(\text{rad } A)) \subset \text{Hom}_A(e_j A, e_i A)$ に対応している. 同型写像の定め方から $\tilde{x}_\alpha(e_j) = x_\alpha$ であり, 明らかに $\text{Im } \tilde{x}_\alpha \subseteq e_i(\text{rad } A)$ と $\text{Im } \tilde{x}_\alpha \not\subseteq e_i(\text{rad}^2 A)$ が成立する. 何故ならば, $\text{Im } \tilde{x}_\alpha \subseteq e_i(\text{rad}^2 A)$ とすると, $x_\alpha \in e_i(\text{rad}^2 A)e_j$ となり $x_\alpha + \text{rad}^2 A$ が $e_i(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)e_j$ の基底であることに矛盾するからである.

□

系 1.3.4. A をベーシックな有限次元連結多元環とする. このとき A のクイバー Q_A は連結である.

証明. Q_A が非連結と仮定する. すると Q_A の頂点の集合 $(Q_A)_0$ は互いに素な二つの空でない集合 Q'_0, Q''_0 を用いて $(Q_A)_0 = Q'_0 \cup Q''_0$ と表せる. ただし, Q'_0 の頂点は Q''_0 の頂点と非連結であるとする. 今, $i \in Q'_0, j \in Q''_0$ とする. 短完全列 $0 \rightarrow e_i(\text{rad } A) \rightarrow e_i A \rightarrow e_i(A/\text{rad } A) = \text{top } e_i A \rightarrow 0$ と Hom の左完全性から,

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(e_j A, e_i(\text{rad } A)) \rightarrow \text{Hom}_A(e_j A, e_i A) \rightarrow \text{Hom}_A(e_j A, \text{top } e_i A)$$

が得られるが, $\text{top } e_i A$ は単純であったから, Schur's lemma(補題 0.0.7) より $\text{Hom}_A(e_j A, \text{top } e_i A) = 0$ となり, 従って $\text{Hom}_A(e_j A, e_i(\text{rad } A)) \cong \text{Hom}_A(e_j A, \text{rad } e_i A) \cong \text{Hom}_A(e_j A, e_i A)$ を得る. これと $i \neq j$ より,

$$\begin{aligned} e_i A e_j &\cong \text{Hom}_A(e_j A, e_i A) \cong \text{Hom}_A(e_j A, \text{rad } e_i A) \\ &\cong (\text{rad } e_i A) e_j \cong e_i(\text{rad } A) e_j \end{aligned}$$

となる. 条件より i から j への矢が存在しないので, 上の補題を適用すれば $e_i A e_j = 0$ が得られ, 同様の議論で $e_j A e_i = 0$ も得られる. 故に補題 1.1.9 より, A は非連結である. □

例 1.3.5. (1) $A = K[t]/\langle t^m \rangle (m \geq 1)$ とする. すると A の 0 でない幂等元は単位元のみであるから, Q_A の頂点は一点のみである. さらに, $\langle \bar{t} \rangle^m = 0, A/\langle \bar{t} \rangle \cong K(\bar{t} = t + \langle t^m \rangle)$ より $\text{rad } A = \langle \bar{t} \rangle$ であり, 従って $\text{rad}^2 A = \langle \bar{t}^2 \rangle, \dim_K(\text{rad } A/\text{rad}^2 A) = 1$ であるから, Q_A は次のクイバーで与えられる:

$$\alpha \begin{array}{c} \circ \\ \curvearrowright \\ \circ \end{array}^1$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & 0 & K \end{bmatrix} \text{ とする. このとき幂等元}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

は A の原始直交幂等元の完全系を成す. また, $\text{rad } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rad}^2 A = 0$ であ

り, 簡単な計算と $\dim_K(\text{rad } A) = 2$ から $\dim_K e_2(\text{rad } A)e_1 = \dim_K e_3(\text{rad } A)e_1 = 1$

であることと残りの $\dim_K e_i(\text{rad } A)e_j = 0$ であることがわかる. 従って Q_A は次のクイバーで与えられる:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{1}{\circ} & \\ \alpha \nearrow & & \nwarrow \beta \\ \underset{2}{\circ} & & \underset{3}{\circ} \end{array}$$

(3) A を

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ e & d & a \end{bmatrix} \mid a, b, c, d, e \in K \right\}$$

とし,

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid e \in K \right\}$$

を A のイデアルとする. このとき, $B = A/\mathcal{I}$ の幂等元

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{I}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{I}$$

は B の原始直交幂等元の完全系を成す. また,

$$\text{rad } B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{I} \mid c, d \in K \right\}, \text{rad}^2 B = 0$$

であり, $\dim_K e_2(\text{rad } B)e_1 = \dim_K e_1(\text{rad } B)e_2 = 1$ であることがわかる. 従って Q_B は次のクイバーで与えられる:

$$\begin{array}{ccc} \underset{1}{\circ} & \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} & \underset{2}{\circ} \end{array}$$

補題 1.3.6. Q を有限連結クイバー, \mathcal{I} を KQ の許容イデアルとし, $A = KQ/\mathcal{I}$ とする. このとき, $Q_A = Q$ である.

証明. 補題 1.2.4 より, $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \mid a \in Q_0\}$ は $A = KQ/\mathcal{I}$ の原始直交幂等元の完全系である. 従って, Q_A の各頂点は Q の頂点に対応している. 一方で, 系 1.2.11 とその下の主張より, Q の矢 $\alpha : a \rightarrow b$ は K -ベクトル空間 $e_a(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)e_b$ の基底ベクトルに対応している (何故ならば, $\alpha \in e_a(R_Q/R_Q^2)e_b \cong e_a(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)e_b$ である). 従って Q_A の矢もそれぞれ Q の矢に対応している. \square

定理 1.3.7. A をベーシックな有限次元連結 K -多元環とする. KQ_A の許容イデアル \mathcal{I} が存在し, $A \cong KQ_A/\mathcal{I}$ が成立する.

証明. まず K -多元環準同型 $\varphi : KQ_A \rightarrow A$ を構成し, φ が全射であることと $\mathcal{I} = \text{Ker } \varphi$ が許容イデアルであることを示す.

各 $\alpha : i \rightarrow j \in (KQ_A)_1$ に対し, $x_\alpha \in \text{rad } A$ を $\{x_\alpha + \text{rad}^2 A \mid \alpha : i \rightarrow j\}$ が $e_i(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)e_j$ の基底となるように取る. $\varphi_0 : (Q_A)_0 \rightarrow A$ を $\varphi_0(a) = e_a(a \in (Q_A)_0)$,

$\varphi_1 : (Q_A)_1 \rightarrow A$ を $\varphi_1(\alpha) = x_\alpha (\alpha \in (Q_A)_1)$ で定められる写像とする. すると, $\varphi_0(a)$ は A の原始直交冪等元の完全系を成し, 更に $\alpha : a \rightarrow b$ とすると, $\varphi_0(a)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(b) = e_a x_\alpha e_b = x_\alpha = \varphi_1(\alpha)$ が成り立つ. 従って, 定理 1.1.11 より φ_0, φ_1 を線形に拡張することで K -多元環準同型 $\varphi : KQ_A \rightarrow A$ が唯一つ得られる.

さて, φ が全射であることを示そう. φ の構成より $\text{Im } \varphi$ は $e_a (a \in (Q_A)_0)$ と $x_\alpha (\alpha \in (Q_A)_1)$ で生成されるから, A もこれらで生成されることを示せばよい. K が代数的閉体より, K -多元環の短完全列 $0 \rightarrow \text{rad } A \rightarrow A \rightarrow A/\text{rad } A \rightarrow 0$ は分裂する (Wedderburn-Malcev の定理 (定理 0.0.3)). $A/\text{rad } A$ は半単純より, e_a によって生成される. 一方で, 補題 1.3.3 より任意の $x \in \text{rad } A$ は x_α によって生成される. 従って, φ は全射である.

次に, $\mathcal{I} = \text{Ker } \varphi$ が許容イデアルであることを示す. R を KQ_A の矢イデアルとする. φ の定義から, $\varphi(R) \subseteq \text{rad } A$ であり, 従って各 ℓ に対して $\varphi(R^\ell) \subseteq \text{rad}^\ell A$ である. $\text{rad } A$ は冪零であったから, $\text{rad}^m A = 0$ となる $m \geq 1$ が存在する. これより, $R^m \subseteq \text{Ker } \varphi = \mathcal{I}$ となる. 後は $\mathcal{I} \subseteq R^2$ を示せばよい. $x \in \mathcal{I}$ ならば,

$$x = \sum_{a \in (Q_A)_0} \varepsilon_a \lambda_a + \sum_{\alpha \in (Q_A)_1} \alpha \mu_\alpha + y \quad (\lambda_a, \mu_\alpha \in K, y \in R^2)$$

と書ける. 今, $\varphi(x) = 0$ より

$$0 = \sum_{a \in (Q_A)_0} e_a \lambda_a + \sum_{\alpha \in (Q_A)_1} x_\alpha \mu_\alpha + \varphi(y)$$

であり, これより

$$\sum_{a \in (Q_A)_0} e_a \lambda_a = - \sum_{\alpha \in (Q_A)_1} x_\alpha \mu_\alpha - \varphi(y) \in \text{rad } A$$

を得る. $\text{rad } A$ が冪零であることと各 e_a が直交冪等元であることから, 全ての $a \in (Q_A)_0$ で $\lambda_a = 0$ となることがわかる. 同様にして,

$$\sum_{\alpha \in (Q_A)_1} x_\alpha \mu_\alpha = -\varphi(y) \in \text{rad}^2 A$$

より $\text{rad } A/\text{rad}^2 A$ において

$$\sum_{\alpha \in (Q_A)_1} (x_\alpha + \text{rad}^2 A) \mu_\alpha = 0$$

が成り立つ. 一方で, $\{x_\alpha + \text{rad}^2 A \mid \alpha \in (Q_A)_1\}$ は $\text{rad } A/\text{rad}^2 A$ の基底であったから, その一次独立性から全ての $\alpha \in (Q_A)_1$ で $\mu_\alpha = 0$ でなければならない. 以上より $x = y \in R^2$ を得る. \square

定義 1.3.8. A をベーシックな有限次元連結 K -多元環とする. 同型 $A \cong KQ_A/\mathcal{I}$ を A の (関係付きクイバー多元環による) **表示** (presentation) という.

例 1.3.9. (1) 例 1.3.5(1) において, $\varphi : KQ_A \rightarrow A$ は $\varphi(\varepsilon_1) = 1, \varphi(\alpha) = \bar{t}$ で定められる. 明らかに φ は全射であり, $\text{Ker } \varphi = \langle \alpha^m \rangle$ である.

(2) 例 1.3.5(2) において, $\varphi : KQ_A \rightarrow A$ は次で定められる:

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \varphi(\varepsilon_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \varphi(\varepsilon_3) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \varphi(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \varphi(\beta) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

このとき φ は同型写像であり, 従って $A \cong KQ_A$ である.

(3) 例 1.3.5(3) において, $\varphi : KQ_B \rightarrow B$ は次で定められる:

$$\begin{aligned}\varphi(\varepsilon_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{I}, & \varphi(\varepsilon_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{I}, \\ \varphi(\alpha) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{I}, & \varphi(\beta) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{I}.\end{aligned}$$

このとき, $\text{Ker } \varphi = \langle \alpha\beta, \beta\alpha \rangle = R_{Q_B}^2$ であり, 従って $B \cong KQ_B/R_{Q_B}^2$ である.

注意 1.3.10. 一般に, K -多元環の表示は一意的ではないことを注意しておく. 例えば, 例 1.2.2(5) を見よ.

2 表現と加群

前章では, クイバーによって有限次元多元環を視覚的に理解できることを見た. この章では, クイバーを用いて加群を視覚的に捉える方法を述べる. これにより加群の計算が行列の計算に帰着されるため, 加群を理解する上でもクイバーは非常に強力である.

2.1 関係付きクイバーの表現

定義 2.1.1. Q を有限クイバーとする. Q の (K -線形) **表現** (K -linear representation) M を以下の条件で定める:

- (1) 各頂点 $a \in Q_0$ に対し, K -ベクトル空間 M_a を対応させる;
- (2) 各矢 $\alpha : a \rightarrow b \in Q_1$ に対し, K -線形写像 $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$ を対応させる.

このように定めた表現を $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ 或いは単に $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ と表す. どのベクトル空間 M_a も有限次元であるとき, 表現 $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ は**有限次元** (finite dimensional) であるという.

$M = (M_a, \varphi_\alpha), M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ を Q の表現とする. 表現の間の**射** (morphism) $f : M \rightarrow$

M' とは, K -線形写像 $(f_a : M_a \rightarrow M'_a)_{a \in Q_0}$ の族で, 次の図式が可換になるもののことである:

$$\begin{array}{ccc} M_a & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_b \\ f_a \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f_b \\ M'_a & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_b \end{array}$$

$f : M \rightarrow M', g : M' \rightarrow M''$ を Q の表現の間の射とする. ただし, $f = (f_a)_{a \in Q_0}, g = (g_a)_{a \in Q_0}$ である. このとき, 射の合成を $gf = (g_a f_a)_{a \in Q_0}$ で定める. すると, gf は M から M'' への射となることがわかる.

例 2.1.2. Q をクロネッカークイバー

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} & 2 \\ \circ & & \circ \end{array}$$

とする. 例えば, Q の表現 M は次で与えられる:

$$K^2 \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}} K$$

一方, 別の表現 M' は次で与えられる:

$$K^2 \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}} K^2$$

これらはともに有限次元であり, M から M' への射は次で定義される:

$$\begin{array}{ccc} K^2 & \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}} & K \\ \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \downarrow & & \downarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \\ K^2 & \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}} & K^2 \end{array}$$

実際,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より上の図式は可換になっている.

これらの定義によって, Q の表現の圏 $\text{Rep}(Q)$ を定める. すなわち, $\text{Rep}(Q)$ は対象を Q の表現, 射を表現の間の射とした圏である. また, 対象を有限次元表現とした圏 $\text{rep}(Q)$ は $\text{Rep}(Q)$ の充満部分圏となる. 次の補題でこれらがアーベル圏になることを証明する.

補題 2.1.3. Q を有限クイバーとする. $\text{Rep}_K(Q)$ と $\text{rep}_K(Q)$ は K -線形アーベル圏である.

証明. (1) $f : M \rightarrow M', g : M \rightarrow M'$ を $\text{Rep}_K(Q)$ の射とする. ただし, $f = (f_a)_{a \in Q_0}, g = (g_a)_{a \in Q_0}$ である. このとき, 射の和 $f + g = (f_a + g_a)_{a \in Q_0}$ が M から M' への射とし

て定まる. これにより, M から M' への射全体の集合はアーベル群を成す. さらに, 始域が M' の射 h' に対して $h'(f+g) = h'f + h'g$ が成立し, 終域が M の射 h に対して $(f+g)h = fh + gh$ が成立する.

- (2) $M = (M_a, \varphi_a), M' = (M'_a, \varphi'_a)$ を Q の表現とする. このとき, 表現

$$M \oplus M' = \left(M_a \oplus M'_a, \begin{bmatrix} \varphi_a & 0 \\ 0 & \varphi'_a \end{bmatrix} \right)$$

は $\text{Rep}_K(Q)$ における M と M' の直和になっている.

- (3) $f : M \rightarrow M'$ を $\text{Rep}_K(Q)$ の射とする. 各頂点 $a \in Q_0$ に対し, $L_a = \text{Ker } f_a (f_a : M_a \rightarrow M'_a)$ とし, 各矢 $\alpha : a \rightarrow b \in Q_1$ に対し, $\psi_\alpha : L_a \rightarrow L_b$ を φ_α の L_a への制限とする. このとき, 表現 $L = (L_a, \psi_\alpha)$ は $\text{Rep}_K(Q)$ において f の核となり, 同様にして余核も与えられる.
- (4) (3) の構成法から, $f : M \rightarrow M'$ が単射 (全射) である必要十分条件はすべての $f_a : M_a \rightarrow M'_a$ が単射 (全射) であることである. 従って, 任意の $\text{Rep}_K(Q)$ の射は自然な分解

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ker } f & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{f} & M' & \xrightarrow{p} & \text{Coker } f \\ & & \downarrow p' & & \uparrow u' & & \\ & & \text{Coker } u & \xrightarrow{\simeq} & \text{Ker } p & & \end{array}$$

を持つ. 以上により $\text{Rep}_K(Q)$ が K -線形アーベル圏であることを得る.

また, $M, M' \in \text{rep}_K(Q)$ であるとき, すなわち各頂点 $a \in Q_0$ に対して

$$\dim_K M_a < \infty, \dim_K M'_a < \infty$$

とすると, $\dim_K(M_a \oplus M'_a) < \infty$ より $M \oplus M' \in \text{rep}_K(Q)$ である. また, $f : M \rightarrow M'$ を $\text{rep}_K(Q)$ の射とすると, (3) の構成法から f の核, 余核もまた $\text{rep}_K(Q)$ に含まれる. 従って $\text{rep}_K(Q)$ も K -線形アーベル圏となる.

□

定義 2.1.4. Q を有限クイバー, $M = (M_a, \varphi_a)$ を Q の表現とする. 任意の a から b への非自明なパス $w = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\ell$ に対して, パス w における M の評価 (evaluation) を次のような M_a から M_b への K -線形写像で定める:

$$\varphi_w = \varphi_{\alpha_\ell} \varphi_{\alpha_{\ell-1}} \cdots \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_1}$$

評価の定義を, 始点と終点それぞれ同じパスの K -線形結合に拡張しよう.

$$\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i$$

をそのような K -線形結合とする. ここで, $\lambda_i \in K$ であり, w_i は Q のパスである. このとき,

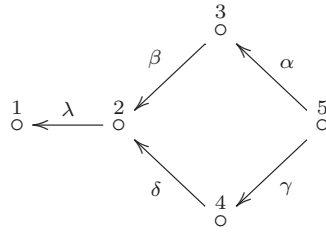
$$\varphi_\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{w_i}$$

である.

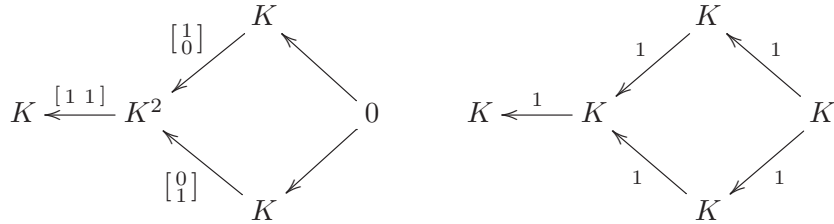
更に, 関係付きクイバーの場合の表現についても説明しておく. Q を有限クイバー, \mathcal{I} を KQ の許容イデアルとする. Q の表現 $M = (M_\alpha, \varphi_\alpha)$ が \mathcal{I} によって制限されている (bound by \mathcal{I}), 或いは **関係 \mathcal{I} を満たす** (satisfy the relations in \mathcal{I}) とは, すべての関係 $\rho \in \mathcal{I}$ で $\varphi_\rho = 0$ となることをいう. \mathcal{I} が有限個の関係の集合 $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$ で生成されているとする. このとき, M が \mathcal{I} の関係を満たすための必要十分条件は全ての $j (1 \leq j \leq m)$ で $\varphi_{\rho_j} = 0$ となることである.

\mathcal{I} によって制限されている Q の表現を対象とした圏 $\text{Rep}_K(Q)$ の充満部分圏を $\text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$ で表記する. 同様に $\text{rep}_K(Q)$ の充満部分圏を $\text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$ で表記する.

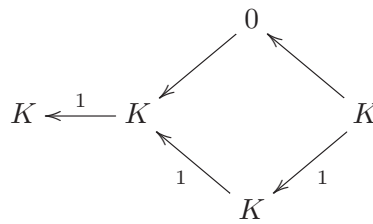
例 2.1.5. Q を



に **関係 $\alpha\beta = \gamma\delta$** を入れたものとする. Q の表現 M, N



を考える. これらは明らかに **関係 $\alpha\beta = \gamma\delta$** を満たす. 一方で, 表現



は **関係 $\alpha\beta = \gamma\delta$** を満たさない.

任意の有限次元多元環は, 加群圏の同値 (森田同値) と直積を用いて, より簡単であるベーシックな連結多元環の場合へと帰着することができる. 更に, 前章で述べたようにベーシックな有限次元連結 K -多元環 A に対して有限連結クイバー Q_A と KQ_A の許容イデアル \mathcal{I} が存在して $A \cong KQ_A/\mathcal{I}$ が成立する. 次の定理では有限生成右 A -加群の圏 $\text{mod } A$ と, \mathcal{I} の関係を満たす Q_A の有限次元 K -線形表現の圏 $\text{rep}_K(Q_A, \mathcal{I})$ の間に圏同値があることを証明する. これにより, 有限次元多元環の加群を調べるには, 有限連結クイバーの表現を調べれば十分であることが従う.

定理 2.1.6. Q を有限連結クイバー, \mathcal{I} を KQ の許容イデアルとし, $A = KQ/\mathcal{I}$ とする. このとき, K -線形圏同値

$$F : \text{Mod } A \xrightarrow{\simeq} \text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$$

が存在する. 更に, 有限生成加群に制限することで K -線形圏同値 $F : \text{mod } A \xrightarrow{\simeq} \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$ を得る.

証明. まず, 関手 $F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$ を構成する. M_A を A -加群とする. K -線形表現 $F(M) = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ を次で定義する:

- $a \in Q_0$ ならば, $M_a = Me_a$ とする. ただし, $e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I}$ は $A = KQ/\mathcal{I}$ の原始冪等元である;
- $\alpha : a \rightarrow b \in Q_1$ ならば, $\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b$ を $x \in M_a$ に対して $\varphi_\alpha(x) = x\bar{\alpha} (= xe_a\bar{\alpha}e_b)$ とする. ただし, $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$ は \mathcal{I} を法とする α のクラスである.

M は A -加群であるから, φ_α は K -線形写像である. このように定めた $F(M)$ は \mathcal{I} の関係を満たす. 実際, $\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i (w_i = \alpha_{i,1}\alpha_{i,2} \cdots \alpha_{i,\ell_i})$ を \mathcal{I} の関係とすると, 任意の $x \in M_{s(\alpha_{i,1})}$ に対して,

$$\begin{aligned} \varphi_\rho(x) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{w_i}(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{\alpha_{i,\ell_i}} \cdots \varphi_{\alpha_{i,1}}(x) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i (x\bar{\alpha}_{i,1} \cdots \bar{\alpha}_{i,\ell_i}) \\ &= x \cdot \sum_{i=1}^m \lambda_i (\bar{\alpha}_{i,1} \cdots \bar{\alpha}_{i,\ell_i}) \\ &= x \cdot \bar{\rho} = x \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

より $\varphi_\rho = 0$ となるので, 関係を満たすことが確認できる.

$f : M_A \rightarrow M'_A$ を A -加群準同型とする. $\text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$ の射 $F(f) : F(M) \rightarrow F(M')$ を定義したい. 任意の $a \in Q_0$ と $x = xe_a \in Me_a = M_a$ に対して, $f(xe_a) = f(xe_a^2) = f(xe_a)e_a \in M'e_a = M'_a$ より, f の M_a への制限として K -線形写像 $f_a : M_a \rightarrow M'_a$ を得る. そこで, $F(f) = (f_a)_{a \in Q_0}$ とおく. 任意の矢 $\alpha : a \rightarrow b$ に対して $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$ であればよい. 任意の $x \in M_a$ に対して,

$$f_b \varphi_\alpha(x) = f_b(x\bar{\alpha}) = f(x\bar{\alpha}) = f(x)\bar{\alpha} = f_a(x)\bar{\alpha} = \varphi'_\alpha f_a(x)$$

より, $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$ であることが確認できる. 以上のことと $\text{Hom}_A(M, M')$ が K -ベクトル空間であることから, $F : \text{Mod } A \rightarrow \text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$ とその制限 $\text{mod } A \rightarrow \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$ が K -線形関手であることを得る.

次に, F の擬逆関手 $G : \text{Rep}_K(Q, \mathcal{I}) \rightarrow \text{Mod } A$ を構成する. $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ を $\text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$ の対象とする. $G(M) = \bigoplus_{a \in Q_0} M_a$ とし, K -ベクトル空間 $G(M)$ に A -加群構造を定めよう. $A = KQ/\mathcal{I}$ であったから, $G(M)$ に KQ -加群構造を定め, \mathcal{I} によって零化されることを示せばよい. $x = (x_a)_{a \in Q_0} \in G(M)$ とする. KQ の任意の元はパスの線形和で表されるから, KQ -加群構造を定めるには, Q のパス w について積 xw を定義すれば十分である. w が自明なパス ε_a の場合,

$$xw = x\varepsilon_a = x_a$$

と定める. w が非自明な a から b へのパス $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\ell$ の場合, K -線形写像 $\varphi_w = \varphi_{\alpha_\ell} \cdots \varphi_{\alpha_1} : M_a \rightarrow M_b$ を用いて

$$(xw)_c = \delta_{bc}\varphi_w(x_a)$$

と定める. ここで, δ_{bc} はクロネッカーのデルタである. すなわち, xw は $(xw)_b = \varphi_w(x_a) \in M_b$ を除いて 0 となる $G(M)$ の元と定義する. これにより $G(M)$ は KQ -加群を成す. 更に, $\rho \in \mathcal{I}, x \in G(M)$ とすると, $\varphi_\rho = 0$ より $x\rho = 0$ となる. 従って $G(M)$ は $x(v + \mathcal{I}) = xv$ ($x \in G(M), v \in KQ$) により KQ/\mathcal{I} -加群を成す.

さて, $(f_a)_{a \in Q_0}$ を $\text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$ における $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ から $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ への射とする. A -加群準同型 $f : G(M) \rightarrow G(M')$ を構成したい. K -ベクトル空間として, $G(M) = \bigoplus_{a \in Q_0} M_a, G(M') = \bigoplus_{a \in Q_0} M'_a$ であったから, K -線形写像 $f = \bigoplus_{a \in Q_0} f_a : G(M) \rightarrow G(M')$ が存在する. f が A -加群準同型, すなわち任意の $x \in G(M), \bar{w} \in KQ/\mathcal{I}$ に対して $f(x\bar{w}) = f(x)\bar{w}$ であることを示す. $x = x_a \in M_a, \bar{w} = w + \mathcal{I}$ として示せば十分である. ただし w は Q の a から b へのパスとする.

$$f(x\bar{w}) = f(x_a\bar{w}) = f_b\varphi_w(x_a) = \varphi'_w f_a(x_a) = f_a(x_a)\bar{w} = f(x)\bar{w}$$

より, A -加群準同型 $f : G(M) \rightarrow G(M')$ を得る.

明らかに G とその制限 $\text{rep}_K(Q, \mathcal{I}) \rightarrow \text{mod } A$ は K -線形関手であり, 簡単な計算から $FG \cong 1_{\text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})}, GF \cong 1_{\text{Mod } A}$ であることがわかる. 従って K -線形圏同値 $\text{Mod } A \cong \text{Rep}_K(Q, \mathcal{I})$ を得る. また, Q が有限より, (Q, \mathcal{I}) の K -線形表現 $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ に対して, $\dim_K(\bigoplus_{a \in Q_0} M_a) < \infty$ であるための必要十分条件は各 $a \in Q_0$ について $\dim_K M_a < \infty$ となることである. 故に K -線形圏同値 $\text{mod } A \cong \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$ が従う. \square

系 2.1.7. Q を有限連結非巡回クイバーとする. このとき, 圏同値 $\text{Mod } KQ \cong \text{Rep}_K(Q)$ が存在し, 更にその制限 $\text{mod } KQ \cong \text{rep}_K(Q)$ も圏同値となる.

証明. Q が有限非巡回であるから, 補題 1.1.7 より KQ は有限次元である. 従って定理 2.1.6 において $\mathcal{I} = 0$ とすれば系の主張が得られる. \square

この定理から即座に $\text{Rep}_K(Q, \mathcal{I}), \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$ がアーベル圏であることが従うことを注意しておく.

次の例ではクイバーの表現が直既約かどうかを判断する方法を述べる. 命題 0.0.11 より, その表現の自己準同型多元環が局所的かどうかを確認すれば十分である. 次の例において, 固有

値 $\lambda \in K$ に対応する $m \times m$ のジョルダンブロックを $J_{m,\lambda}$ で表記する. すなわち,

$$J_{m,\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

である.

例 2.1.8. Q をクロネッカークイバー

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xleftarrow{\alpha} & 2 \\ 0 & \xleftarrow{\beta} & 0 \end{array}$$

とし, Q の表現 M を

$$K^3 \xleftarrow[J_{3,0}]{1} K^3$$

とする. M が直既約であることを示そう. M の自己準同型は 3×3 行列のペア (f_1, f_2) で与えられ, 2 つの条件 $f_1 \cdot 1 = 1 \cdot f_2$ と $f_1 \cdot J_{3,0} = J_{3,0} \cdot f_2$ を満たす. 1 つ目の条件から,

$$f_1 = f_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

であり, 2 つ目の条件から,

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

すなわち,

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ b_2 & b_3 & 0 \\ c_2 & c_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

である. これより, $a_2 = a_3 = b_3 = 0$ であり, $a_1 = b_2 = c_3 = a, b_1 = c_2 = b, c_1 = c$ とおけば,

$$f_1 = f_2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

とかける. 従って

$$\text{End } M \cong \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in K \right\}$$

となる. さて, $\text{End } M$ のイデアルを

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & b & 0 \end{bmatrix} \mid b, c \in K \right\}$$

とすると, $\mathcal{I}^3 = 0$ を満たす. $(\text{End } M)/\mathcal{I} \cong K$ より, \mathcal{I} は $\text{End } M$ の極大イデアルであり, $\mathcal{I} = \text{rad}(\text{End } M)$ であるから, $\text{End } M$ は局所的である. 従って M は直既約となる.

更に, 対応 $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix} \mapsto a + b\bar{t} + c\bar{t}^2 (\bar{t} = t + \langle t^3 \rangle)$ によって K -多元環の同型 $\text{End } M \cong K[t]/\langle t^3 \rangle$ が存在する. 同様に, 任意の $m \geq 1$ について, Q の表現 $K^m \xrightarrow[J_{m,0}]{1} K^m$ は直既約になることがわかる.

2.2 単純加群, 射影加群, 移入加群

この節では, 前節の定理 2.1.6 で定めた関手 $F : \text{mod } A \xrightarrow{\sim} \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$ を用いて単純加群, 直既約射影加群, 直既約移入加群をそれぞれ (Q, \mathcal{I}) の表現で特徴付ける方法を述べる. 以下特に断りがない限り (Q, \mathcal{I}) とかけば頂点の数 $|Q_0| = n$ の有限連結クイバー Q が許容イデアル \mathcal{I} によって制限されていることを表すこととし, $A = KQ/\mathcal{I}$ は $\text{rad } A = \mathcal{I}$ (R は KQ の矢イデアル) を持つベーシックな単位的有限次元連結多元環とする. 更に, $\{e_a \mid a \in Q_0\}$ は A の原始直交冪等元の完全系とする.

$a \in Q_0$ とする. Q の表現 $S(a) = (S(a)_b, \varphi_\alpha)$ を次で定める:

$$S(a)_b = \begin{cases} 0 & (b \neq a) \\ K & (b = a) \end{cases}$$

$$\varphi_\alpha = 0 \quad (\alpha \in Q_1)$$

するとどの \mathcal{I} の関係 $\rho \in \mathcal{I}$ でも $\varphi_\rho = 0$ となるため, 明らかに $S(a) \in \text{rep}(Q, \mathcal{I})$ である. 更に次の補題が成り立つ.

補題 2.2.1. $A = KQ/\mathcal{I}$ を (Q, \mathcal{I}) の関係付きクイバー多元環とする.

- (1) 各 $a \in Q_0$ に対して, $S(a)$ は A -加群として $\text{top } e_a A$ と同型になる;
- (2) $\{S(a) \mid a \in Q_0\}$ は単純 A -加群の同型類の表現の完全系となる.

証明. 各 $a \in Q_0$ に対して, K -ベクトル空間 $S(a)$ は 1 次元であるから, (Q, \mathcal{I}) の単純表現と単純 A -加群が定義できる. また, 定理 2.1.6 の証明より, $\text{Hom}_A(e_a A, S(a)) \cong S(a)e_a \cong S(a)_a \neq 0$ であるから, 直既約射影加群 $e_a A$ から単純 A -加群 $S(a)$ への零でない A -加群準同型が存在する. Schur's lemma よりこの準同型は全射であり, 短完全列 $0 \rightarrow \text{rad } e_a A \rightarrow e_a A \rightarrow S(a) \rightarrow 0$ から $\text{top } e_a A \cong S(a)$ を得る. 一方で, $a \neq b$ ならば, $\text{Hom}_A(S(a), S(b)) = 0$ であり, 特に $S(a) \not\cong S(b)$ である. これより, 単純加群 $S(a)$ はどの二つも非同型である. 従って, 原始直交冪等元の完全系 $\{e_a \mid a \in Q_0\}$ と互いに非同型な単純 A -加群の完全系 $\{S(a) \mid a \in Q_0\}$ は対応 $e_a \mapsto \text{top } e_a A \cong S(a)$ によって一対一に対応する. \square

上の補題で与えられた KQ/\mathcal{I} の単純加群とは対照的に, 有向サイクルを持つ有限クイバー Q のパス多元環 $A = KQ$ には互いに非同型な有限次元単純加群が無数に存在する. 例えば, Q を $\begin{smallmatrix} & \alpha \\ 0 & \rightleftarrows & 0 \\ & \beta \end{smallmatrix}$ とする. このとき $S(1) = (K \xrightarrow{0} 0)$, $S(2) = (0 \xleftarrow{0} K)$,

$S_\lambda = (K \xrightleftharpoons[\lambda]{1} K) (\lambda \in K)$ はそれぞれ単純 A -加群であり, $\lambda \neq \mu$ ならば $S_\lambda \not\cong S_\mu$ であることが容易に確認できる.

補題 2.2.2. $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ を (Q, \mathcal{I}) の表現とする:

- (1) M が半単純である必要十分条件は任意の $\alpha \in Q_1$ に対して $\varphi_\alpha = 0$ となることである;
(2) $N = (N_a, \psi_\alpha)$ を

$$N_a = \begin{cases} M_a & (\text{始点が } a \text{ の矢が } 0 \text{ 本}) \\ \bigcap_{\alpha: a \rightarrow b} \text{Ker}(\varphi_\alpha : M_a \rightarrow M_b) & (\text{始点が } a \text{ の矢が } 1 \text{ 本以上}) \end{cases}$$

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{N_a} = 0 \quad (\alpha \in Q_1 \text{ は始点が } a \text{ の矢})$$

で定める. すると, $N = \text{soc } M$ となる;

- (3) $J = (J_a, \gamma_\alpha)$ を

$$J_a = \sum_{\alpha: b \rightarrow a} \text{Im}(\varphi_\alpha : M_b \rightarrow M_a)$$

$$\gamma_\alpha = \varphi_\alpha|_{J_a} \quad (\alpha \in Q_1 \text{ は始点が } a \text{ の矢})$$

で定める. すると, $J = \text{rad } M$ となる;

- (4) $L = (L_a, \psi_\alpha)$ を

$$L_a = \begin{cases} M_a & (a \text{ への矢が存在しないとき}) \\ \sum_{\alpha: b \rightarrow a} \text{Coker}(\varphi_\alpha : M_b \rightarrow M_a) & (a \text{ への矢が存在するとき}) \end{cases}$$

$$\psi_\alpha = 0 \quad (\alpha \in Q_1 \text{ は始点が } a \text{ の矢})$$

で定める. すると, $L = \text{top } M$ となる.

証明. (1) 任意の $\alpha \in Q_1$ に対して $\varphi_\alpha = 0$ である必要十分条件は $M \cong \bigoplus_{a \in Q_0} S(a)^{\dim_K M_a}$ であることから明らか.

- (2) $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{N_a} = 0$ より, N は M の半単純部分加群である. S_A を M の単純部分加群とする. するとある $a \in Q_0$ が存在して $S \cong S(a)$ となる. よって, 各矢 $\alpha : a \rightarrow b$ に対して可換図式

$$\begin{array}{ccc} K = S(a)_a & \longrightarrow & S(a)_b = 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_a & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_b \end{array}$$

を得る. これより, 各矢 $\alpha : a \rightarrow b$ に対して $S(a)_a \subseteq \text{Ker } \varphi_\alpha$ であり, 従って $S(a)_a \subseteq N_a$ である. 故に $S(a) \subseteq N$ より $N = \text{soc } M$ を得る.

- (3) R を KQ の矢イデアルとする. $\text{rad } A = R/\mathcal{I}$ は両側イデアルとして $\bar{\alpha} = \alpha + \mathcal{I} (\alpha \in Q_1)$ で生成されるから, $J' = \text{rad } M$ とおくと,

$$J' = \text{rad } M = M \cdot \text{rad } A = M \cdot (R/\mathcal{I}) = \sum_{\alpha \in Q_1} M\bar{\alpha}$$

とかける. これより, 任意の $a \in Q_0$ に対して $J'_a = \sum_{\alpha: b \rightarrow a} M\bar{\alpha}$ を得る. 更に定理 2.1.6 の F の構成から, $M\bar{\alpha} = Me_b\bar{\alpha} = M_b\bar{\alpha} = \varphi_\alpha(M_b) = \text{Im } \varphi_\alpha$ となり, 従って $J'_a = \sum_{\alpha: b \rightarrow a} \text{Im}(\varphi_\alpha : M_b \rightarrow M_a)$ である. また, J' は M の部分加群であるから, $\gamma'_\alpha = \varphi_\alpha|_{J'_a}$ となり, $J = J' = \text{rad } M$ が得られる.

(4) $\text{top } M = M/\text{rad } M = M/J$ より $L = \text{top } M$ である.

□

例 2.2.3. (1) Q をクロネッカークイバー

$$\begin{array}{c} 1 \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \circ \end{array}$$

とする. すると, 単純 KQ -加群は

$$S(1) = (K \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} 0) \quad S(2) = (0 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} K)$$

で与えられる. Q の表現 M を

$$K^{m-1} \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi_\alpha} \\ \xrightarrow{\pi_\beta} \end{array} K^m$$

とする. ここで $m \geq 2$ であり, π_α, π_β はそれぞれ $(m-1) \times m$ 行列で与えられる射影

$$\pi_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \pi_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

である. このとき, $\text{soc } M = \text{rad } M = (K^{m-1} \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} 0) = S(1)^{m-1}$ であり, $\text{top } M = (0 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} K^m) = S(2)^m$ である.

(2) Q を

$$\begin{array}{c} 1 \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \xleftarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\delta} \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\gamma} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ \circ \end{array}$$

とし, 関係 $\alpha\beta = 0, \gamma\delta = 0$ を入れる. M を

$$K \begin{array}{c} \xleftarrow{[0 \ 1 \ 0]} \\ \xrightarrow{[0 \ 0 \ 1]} \end{array} K^3 \begin{array}{c} \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \\ \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} \end{array} K$$

とすると,

$$\text{soc } M = (K \begin{array}{c} \xleftarrow{0} \\ \xrightarrow{0} \end{array} K \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} 0) \cong S(1) \oplus S(2)$$

$$\text{rad } M = (K \begin{array}{c} \xleftarrow{[0 \ 1]} \\ \xrightarrow{[0 \ 0]} \end{array} K^2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} 0) \cong S(2) \oplus (K \begin{array}{c} \xleftarrow{1} \\ \xrightarrow{0} \end{array} K \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} 0)$$

$$\text{top } M = (0 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} K \begin{array}{c} \xleftarrow{0} \\ \xrightarrow{0} \end{array} K) \cong S(2) \oplus S(3)$$

となる. 更に, 例 2.1.8 と同様の計算によって $\text{End } M$ が局所的すなわち M が直既約であることがわかる. しかし, $\text{End } M$ は体にはならない. 何故ならば, $S(2)$ が $\text{top } M, \text{soc } M$ の直和因子であることから 2 つの 0 でない射 $p: M \rightarrow S(2), j: S(2) \rightarrow M$ が存在し, これらの合成 $jp: M \rightarrow M \in \text{End } M$ は 0 でない自己準同型であり, 逆元を持たないからである.

次の補題で直既約射影 A -加群の表現方法を述べる. A はベーシックで, $\{e_a \mid a \in Q_0\}$ は A の原始直交幂等元の完全系であったから, $A_A = \bigoplus_{a \in Q_0} e_a A$ は互いに非同型な直既約射影 A -加群への直和分解である. そこで各 $a \in Q_0$ に対して, $P(a) = e_a A$ と表記する.

補題 2.2.4. (Q, \mathcal{I}) を関係付きクイバー, $A = KQ/\mathcal{I}$ とし, 各 $a \in Q_0$ に対して $P(a) = e_a A$ とする.

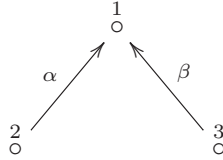
- (1) $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\beta)$ とすると, $P(a)_b$ は a から b へのパス w の剰余類 $\bar{w} = w + \mathcal{I}$ 全体の集合を基底とする K -ベクトル空間であり, 各矢 $\beta: b \rightarrow c$ とその剰余類 $\bar{\beta} = \beta + \mathcal{I}$ に対し, $\varphi_\beta: P(a)_b \rightarrow P(a)_c$ は $P(a)_b \ni \bar{w} \mapsto \bar{w}\bar{\beta} \in P(a)_c$ で与えられる K -線形写像である;
- (2) $\text{rad } P(a) = (P'(a)_b, \varphi'_\beta)$ とする. すると, $b \neq a$ のとき $P'(a)_b = P(a)_b$ であり, $b = a$ のとき $P(a)_a$ は a から a への非自明なパス w の剰余類 $\bar{w} = w + \mathcal{I}$ 全体の集合を基底とする K -ベクトル空間である. また, 矢 β の始点が a でないときは $\varphi'_\beta = \varphi_\beta$ であり, 始点が a のときは $\varphi'_\beta = \varphi_\beta|_{P'(a)_a}$ である.

証明. 定理 2.1.6 の $F: \text{mod } A \xrightarrow{\sim} \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$ の定義から, A -加群 $P(a)_A = e_a A$ に対応する表現は次のようになる: 各 $b \in Q_0$ に対して,

$$P(a)_b = P(a)e_b = e_a A e_b = e_a (KQ/\mathcal{I}) e_b = (\varepsilon_a(KQ)\varepsilon_b)/(\varepsilon_a \mathcal{I} \varepsilon_b)$$

である. 更に, $\beta: b \rightarrow c \in Q_1, \bar{\beta} = \beta + \mathcal{I}$ とすると, $\varphi_\beta: e_a A e_b \rightarrow e_b A e_c$ は $\bar{w} \in e_a A e_b$ に対して $\varphi_\beta(\bar{w}) = \bar{w}\bar{\beta}$ である. また, (2) の主張は (1) と補題 2.2.2 から従う. \square

例 2.2.5. (1) Q を



とする. 直既約射影 KQ -加群はそれぞれ

$$P(1) = S(1) = \begin{array}{ccc} & K & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ 0 & & 0 \end{array}, P(2) = \begin{array}{ccc} & K & \\ \nearrow^1 & & \nwarrow \\ K & & 0 \end{array}, P(3) = \begin{array}{ccc} & K & \\ \nearrow & & \nwarrow^1 \\ 0 & & K \end{array}$$

であり, $\text{rad } P(1) = 0, \text{rad } P(2) \cong \text{rad } P(3) \cong P(1)$ である.

(2) Q を

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 2 & & 3 \\ \circ & \xleftarrow{\beta} & \circ & \xleftarrow{\alpha} & \circ \\ & \delta & & \gamma & \end{array}$$

とし, 関係 $\alpha\beta = 0, \gamma\delta = 0$ を入れる. 直既約射影 A -加群はそれぞれ

$$P(1) = S(1), P(2) = (K^2 \begin{smallmatrix} \xleftarrow{[1]} \\ \xleftarrow{[0]} \end{smallmatrix} K \xrightarrow{[0]} 0), P(3) = (K^2 \begin{smallmatrix} \xleftarrow{[0 \ 1]} \\ \xleftarrow{[0 \ 0]} \end{smallmatrix} K^2 \begin{smallmatrix} \xleftarrow{[1]} \\ \xleftarrow{[0]} \end{smallmatrix} K)$$

であり,

$$\text{rad } P(1) = 0$$

$$\text{rad } P(2) = S(1)^2$$

$$\text{rad } P(3) \cong (K \begin{smallmatrix} \xleftarrow{1} \\ \xleftarrow{0} \end{smallmatrix} K \xrightarrow{0} 0) \oplus (K \begin{smallmatrix} \xleftarrow{0} \\ \xleftarrow{1} \end{smallmatrix} K \xrightarrow{0} 0)$$

である.

(3) Q を

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} & 2 \\ \circ & & \circ \end{array}$$

とし, 関係 $\alpha\beta = 0, \beta\alpha = 0$ を入れる. このとき,

$$P(1) = (K \begin{smallmatrix} \xleftarrow{0} \\ \xleftarrow{1} \end{smallmatrix} K), P(2) = (K \begin{smallmatrix} \xleftarrow{1} \\ \xleftarrow{0} \end{smallmatrix} K)$$

であり, $\text{rad } P(1) \cong S(2), \text{rad } P(2) \cong S(1)$ である.

(4) Q を

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & & \circ & & \\ & \beta & \swarrow & \nwarrow \alpha & \\ & 1 & & & 4 \\ \lambda \circ & & & & \circ \\ & \delta & \swarrow & \searrow \gamma & \\ & 3 & & & \\ & \circ & & & \end{array}$$

とし、関係 $\alpha\beta = \gamma\delta, \beta\lambda = 0, \lambda^3 = 0$ を入れる。このとき、

$$\begin{aligned}
P(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \curvearrowright K^3 \begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 0 & & 0 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & 0 & \end{array}, \quad \text{rad } P(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \curvearrowright K^2 \begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 0 & & 0 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & 0 & \end{array}; \\
P(2) &= 0 \curvearrowright K \begin{array}{ccc} & K & \\ \swarrow & & \searrow \\ 0 & & 0 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & 0 & \end{array}, \quad \text{rad } P(2) \cong S(1); \\
P(3) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \curvearrowright K^3 \begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 0 & & 0 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & 0 & \end{array}, \quad \text{rad } P(3) \cong P(1); \\
&\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \curvearrowright K \\
P(4) &= 0 \curvearrowright K \begin{array}{ccc} & K & \\ \swarrow & & \searrow \\ 1 & & 1 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & K & \end{array}, \quad \text{rad } P(4) = 0 \curvearrowright K \begin{array}{ccc} & K & \\ \swarrow & & \searrow \\ 1 & & 0 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & K & \end{array}
\end{aligned}$$

である。

次に直既約移入 A -加群の表現方法を述べる。互いに非同型な直既約移入 A -加群は、 K -双対 $D(-) = \text{Hom}_K(-, K)$ を用いて $I(a) = D(Ae_a)(a \in Q_0)$ で与えられる。

補題 2.2.6. (1) 各 $a \in Q_0$ に対して、単純加群 $S(a)$ と $I(a)$ の半単純成分 $\text{soc } I(a)$ は同型となる；

(2) $I(a) = (I(a)_b, \varphi_\beta)$ とすると、 $I(a)_b$ は b から a へのパス w の剰余類 $\bar{w} = w + \mathcal{I}$ 全体の集合を基底とする K -ベクトル空間の K -双対であり、各矢 $\beta : c \rightarrow b$ とその剰余類 $\bar{\beta} = \beta + \mathcal{I}$ に対し、 $\varphi_\beta : I(a)_c \rightarrow I(a)_b$ は対応 $\bar{w} \mapsto \bar{\beta}\bar{w}$ の K -双対で与えられる K -線形写像である；

(3) $I(a)/S(a) = (L_b, \psi_\beta)$ とする。すると、 L_b は b から a への長さ 1 以下のパスの剰余類による $I(a)_b$ の商空間であり、 ψ_β は誘導される写像である。

証明. (1) 補題 2.2.2(2) と補題 2.2.1(1) より、右 A -加群の同型 $\text{soc } I(a) \cong \text{top } e_a A \cong S(a)$ を得る。

(2)

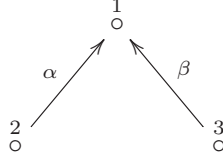
$$I(a)_b = I(a)e_b = D(Ae_a)e_b \cong D(e_b Ae_a) \cong D(\varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_b \mathcal{I} \varepsilon_a)$$

であるから、補題 2.2.4 より主張が従う。同様に、 $\beta : c \rightarrow b \in Q_1, \bar{\beta} = \beta + \mathcal{I}$ と

すると, K -線形写像 $\varphi_\beta : D(\varepsilon_c(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_c\mathcal{I}\varepsilon_a) \rightarrow D(\varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_b\mathcal{I}\varepsilon_a)$ は次で定義される: $\mu_\beta : (\varepsilon_b(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_b\mathcal{I}\varepsilon_a) \rightarrow (\varepsilon_c(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_c\mathcal{I}\varepsilon_a)$ を $\mu_\beta(\overline{w}) = \overline{\beta w}$ とすると, $\varphi_\beta = D(\mu_\beta)$ は $f \in D(\varepsilon_c(KQ)\varepsilon_a/\varepsilon_c\mathcal{I}\varepsilon_a)$ に対して $\varphi_\beta(f) = f\mu_\beta$ で与えられる. すなわち, $\varphi_\beta(f)(\overline{w}) = f(\overline{\beta w})$ である. (3) の主張は (2) から従う.

□

例 2.2.7. (1) Q を



とする. 直既約移入 KQ -加群はそれぞれ

$$I(1) = \begin{array}{ccc} & K & \\ 1 \nearrow & & \nwarrow 1 \\ K & & K \end{array}, I(2) = S(2), I(3) = S(3)$$

であり, $I(1)/S(1) \cong S(2) \oplus S(3), I(2)/S(2) = I(3)/S(3) = 0$ である.

(2) Q を

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \xrightleftharpoons[\delta]{\beta} & 2 & & \xrightleftharpoons[\gamma]{\alpha} & 3 \\ \circ & & & \circ & & & \circ \end{array}$$

とし, 関係 $\alpha\beta = 0, \gamma\delta = 0$ を入れる. 直既約射影 A -加群はそれぞれ

$$I(1) = (K \begin{array}{c} \xleftarrow{[1 \ 0]} \\ \xleftarrow{[0 \ 1]} \end{array} K^2 \begin{array}{c} \xleftarrow{[0 \ 0]} \\ \xleftarrow{[1 \ 0]} \\ \xleftarrow{[0 \ 1]} \end{array} K^2), I(2) = (0 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} K \begin{array}{c} \xleftarrow{[1 \ 0]} \\ \xleftarrow{[0 \ 1]} \end{array} K^2), I(3) = S(3)$$

であり,

$$I(1)/S(1) \cong (0 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} K \begin{array}{c} \xleftarrow{1} \\ \xleftarrow{0} \end{array} K) \oplus (0 \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} K \begin{array}{c} \xleftarrow{0} \\ \xleftarrow{1} \end{array} K),$$

$$I(2)/S(2) \cong S(3)^2, I(3)/S(3) = 0$$

である.

(3) Q を

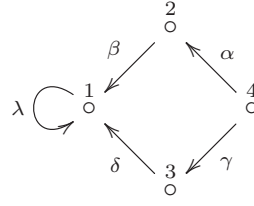
$$\begin{array}{ccc} 1 & & \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} & 2 \\ \circ & & & \circ \end{array}$$

とし, 関係 $\alpha\beta = 0, \beta\alpha = 0$ を入れる. このとき,

$$I(1) \cong P(2), I(2) \cong P(1)$$

であり, $I(1)/S(1) \cong S(2), I(2)/S(2) \cong S(1)$ である. 従って定義 0.0.17 より, $A = KQ/\mathcal{I}$ は自己移入多元環であることがわかる. 故に右 A -加群 A_A は移入加群である.

(4) Q を



とし, 関係 $\alpha\beta = \gamma\delta, \beta\lambda = 0, \lambda^3 = 0$ を入れる. このとき,

$$\begin{aligned}
 I(1) &= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \nearrow K \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circlearrowleft K^3 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \nwarrow K^3 \end{array}, \quad I(1)/S(1) = \begin{array}{c} K \nwarrow 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \circlearrowleft K^2 \\ K^3 \nwarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \nearrow K; \\
 I(2) &= \begin{array}{c} K \nwarrow 0 \\ 0 \circlearrowleft 0 \\ 0 \nwarrow 0 \end{array} \nearrow K, \quad I(2)/S(2) \cong S(4); \\
 I(3) &= \begin{array}{c} 0 \nwarrow 0 \\ 0 \circlearrowleft 0 \\ 0 \nwarrow 0 \end{array} \nearrow K, \quad I(3)/S(3) \cong S(4); \\
 I(4) &\cong S(4), \quad I(4)/S(4) = 0
 \end{aligned}$$

である. 特に,

$$I(1)/S(1) \cong \begin{array}{c} 0 \nwarrow 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \circlearrowleft K^2 \\ K^2 \nwarrow 0 \end{array} \oplus \begin{array}{c} K \nwarrow 0 \\ 0 \circlearrowleft 0 \\ 0 \nwarrow 0 \end{array} \nearrow K$$

であることが容易に確認できる.

これらの結果から, 各 $a \in Q_0$ は直既約射影 A -加群 $P(a)$ と直既約移入 A -加群 $I(a)$ に対応していることがわかる. これらの関係は加群圏の自己関手によって理解される.

定義 2.2.8. 加群圏 $\text{mod } A$ の中山関手 (Nakayama functor) を自己関手 $\nu = D \text{Hom}_A(-, A) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A$ で定める.

補題 2.2.9. 中山関手 ν は右完全であり, 関手 $- \otimes_A DA$ と関手的同型である.

証明. A -双対の左完全性と K -双対の完全性から中山関手 ν の右完全性が従う. 関手の間の射 $\phi : - \otimes_A DA \rightarrow \nu = D \operatorname{Hom}_A(-, A)$ を A -加群 M と $x \in M, f \in DA, \varphi \in \operatorname{Hom}_A(M, A)$ に対して

$$\phi_M : M \otimes_A DA \ni x \otimes f \mapsto (\varphi \mapsto f(\varphi(x))) \in D \operatorname{Hom}_A(M, A)$$

で定める. $M_A = A_A$ のときは ϕ_M は $A \otimes_A DA \cong DA, D \operatorname{Hom}_A(A, A) \cong DA$ より明らかに同型射である. また, M_A が直既約射影加群のとき,

$$M \otimes_A DA \cong e_a A \otimes_A DA \cong e_a DA \cong e_a D \operatorname{Hom}_A(A, A) \cong D \operatorname{Hom}_A(e_a A, A)$$

より ϕ_M は同型射であり, 関手の線形性から M_A が射影加群のとき ϕ_M は同型射になることがわかる. 今, M を任意に取り, $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$ を M の射影分解とする. $- \otimes_A DA, \nu$ の右完全性から, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 \otimes_A DA & \xrightarrow{p_1 \otimes DA} & P_0 \otimes_A DA & \xrightarrow{p_0 \otimes DA} & M \otimes_A DA & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \phi_{P_1} & & \downarrow \phi_{P_0} & & \downarrow \phi_M & & \\ \nu P_1 & \xrightarrow{\nu p_1} & \nu P_0 & \xrightarrow{\nu p_0} & \nu M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ϕ_{P_1}, ϕ_{P_0} は共に同型射であったから, ϕ_M も同型射となる. □

命題 2.2.10. 中山関手 ν の $\operatorname{mod} A$ の充満部分圏 $\operatorname{proj} A$ への制限関手は $\operatorname{mod} A$ の充満部分圏 $\operatorname{inj} A$ との同型を導く. すなわち, $\nu|_{\operatorname{proj} A} : \operatorname{proj} A \xrightarrow{\cong} \operatorname{inj} A$ である. 更に, $\nu^{-1} = \operatorname{Hom}_A(D({}_A A), -) : \operatorname{inj} A \rightarrow \operatorname{proj} A$ は擬逆関手となる.

証明. 各 $a \in Q_0$ に対して, $\nu P(a) = D \operatorname{Hom}_A(e_a A, A) \cong D(Ae_a) = I(a)$ より ν による $\operatorname{proj} A$ の像は $\operatorname{inj} A$ に含まれている. 逆に,

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(D({}_A A), I(a)) &= \operatorname{Hom}_A(D({}_A A), D(Ae_a)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{A^{\operatorname{op}}}(Ae_a, A) \cong e_a A = P(a) \end{aligned}$$

である. 従って命題の主張を得る. □

補題 2.2.11. $A = KQ/I$ を関係付きクイバー多元環とする. 任意の A -加群 M と $a \in Q_0$ に対して, K -線形写像

$$\theta_M : \operatorname{Hom}_A(e_a A, M) \ni \varphi \xrightarrow{\cong} \varphi(e_a) = \varphi(e_a)e_a \in Me_a$$

は K -ベクトル空間の関手的同型

$$\operatorname{Hom}_A(P(a), M) \xrightarrow{\cong} Me_a \xrightarrow{\cong} D \operatorname{Hom}_a(M, I(a))$$

を導く

証明. $\operatorname{Hom}_A(P(a), M) \xrightarrow{\cong} Me_a$ は θ_M の定義から明らかに成立する. 一方で,

$$\begin{aligned} D \operatorname{Hom}_A(M, I(a)) &= D \operatorname{Hom}_A(M, D(Ae_a)) \\ &\cong D \operatorname{Hom}_{A^{\operatorname{op}}}(Ae_a, DM) \\ &\cong D(e_a DM) \cong D(DM)e_a \cong Me_a \end{aligned}$$

より補題の主張が得られる. □

補題 2.2.12. $A = KQ/\mathcal{I}$ を関係付きクイバー多元環とし, $a, b \in Q_0$ とする.

(1) K -ベクトル空間の同型

$$\mathrm{Ext}_A^1(S(a), S(b)) \cong e_a(\mathrm{rad} A / \mathrm{rad}^2 A) e_b$$

が存在する;

(2) Q における a から b への矢の本数は, $\dim_K \mathrm{Ext}_A^1(S(a), S(b))$ と等しくなる.

証明. (1) $\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} S \rightarrow 0$ を単純加群 S の極小射影分解とする. 別の単純加群 S' について, $\mathrm{Ext}_A^1(S, S')$ を計算したい. 鎖複体 $\cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \rightarrow 0$ に対して $\mathrm{Hom}_A(-, S')$ を施すことで, 鎖複体

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Hom}_A(P_0, S') &\xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(p_1, S')} \mathrm{Hom}_A(P_1, S') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(p_2, S')} \\ &\mathrm{Hom}_A(P_2, S') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(p_3, S')} \mathrm{Hom}_A(P_3, S') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(p_4, S')} \cdots \end{aligned}$$

を得る. ここで, 任意の $i \geq 0$ で $\mathrm{Hom}_A(p_{i+1}, S') = 0$ となることを示そう. $f \in \mathrm{Hom}_A(P_i, S')$ を 0 でない準同型写像とする. S' は単純加群であったから, Schur's lemma より f は全射である. 従って P_i の直既約な直和因子 P' が存在して, f は自然な射影 $P_i \rightarrow P'$ と自然な射影 $P' \rightarrow P' / \mathrm{rad} P'$ の合成と等しくなり, $P' / \mathrm{rad} P' \cong S'$ である. 今, 極小射影分解の定義から, $\mathrm{Im} p_{i+1} = \mathrm{Ker} p_i \subseteq \mathrm{rad} P_i$ であるから, 任意の $x \in P_i$ に対して

$$\mathrm{Hom}_A(p_{i+1}, S')(f)(x) = (fp_{i+1})(x) \in f(\mathrm{Im} p_{i+1}) \subseteq f(\mathrm{rad} P_i) \subseteq \mathrm{rad} S' = 0$$

となる. 従って $\mathrm{Hom}_A(p_{i+1}, S')(f) = 0$ より $\mathrm{Hom}_A(p_{i+1}, S') = 0$ を得る. 特に, $\mathrm{Ext}_A^1(S, S') \cong \mathrm{Ker} \mathrm{Hom}_A(p_2, S') / \mathrm{Im} \mathrm{Hom}_A(p_1, S') \cong \mathrm{Hom}_A(P_1, S')$ が成立する. さて, $S = S(a)$ とし, $S(a)$ の極小射影分解を

$$\cdots \rightarrow \bigoplus_{c \in Q_0} P(c)^{n_c} \rightarrow P(a) \rightarrow S(a) \rightarrow 0$$

とする. ここで, n_c は $\mathrm{rad} P(a) / \mathrm{rad}^2 P(a) = \bigoplus_{c \in Q_0} S(c)^{n_c}$ を満たす値とする. このとき,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_A^1(S(a), S(b)) &\cong \mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{c \in Q_0} P(c)^{n_c}, S(b)\right) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{rad} P(a) / \mathrm{rad}^2 P(a), S(b)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(\mathrm{rad} P(a) / \mathrm{rad}^2 P(a), I(b)) \\ &\cong D \mathrm{Hom}_A(P(b), \mathrm{rad} P(a) / \mathrm{rad}^2 P(a)) \\ &\cong D \mathrm{Hom}_A(e_b A, e_a(\mathrm{rad} A / \mathrm{rad}^2 A)) \\ &\cong D(e_a(\mathrm{rad} A / \mathrm{rad}^2 A) e_b) \\ &\cong e_a(\mathrm{rad} A / \mathrm{rad}^2 A) e_b \end{aligned}$$

となり, 求めたい同型が得られる.

- (2) 定義より, a から b への矢の本数は K -ベクトル空間 $e_a(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)e_b$ の次元の本数であった. これと (1) の結果から補題の証明が完成する.

□

2.3 加群の次元ベクトルとオイラー標数

この節では, 次元ベクトルと呼ばれる整数の列ベクトルを導入する. これは, 有限次元多元環の加群を線形代数の手法で計算する際に便利である. 以下, A のクイバー Q の頂点を $\{1, \dots, n\}$ とすることとし, 頂点 $j \in Q_0$ に対応する A の原始冪等元を e_j , 直既約射影 A -加群を $P(j) = e_j A$, 直既約移入 A -加群を $I(j) = D(Ae_j)$, 単純加群を $S(j) = \text{top}(e_j A)$ と表記する. ここで D は K -双対である. 特に, 直既約分解 $A_A = e_1 A \oplus \dots \oplus e_n A$ が存在する.

定理 2.1.6 と補題 2.2.11 より, M は関係付きクイバー (Q, \mathcal{I}) の K -線形表現 (M_j, φ_β) で表され, K -ベクトル空間の同型 $M_j = Me_j \cong \text{Hom}_A(P(j), M) \cong D \text{Hom}_A(M, I(j))$ が成り立つ. これより次が定義できる.

定義 2.3.1. $A \cong KQ/I$ を K -多元環とし, $M \in \text{mod } A$ とする. M の次元ベクトル (dimension vector) を次の \mathbb{Z}^n 上のベクトルで定義する:

$$\mathbf{dim } M := \begin{bmatrix} \dim_K Me_1 \\ \vdots \\ \dim_K Me_n \end{bmatrix} = [\dim_K Me_1 \quad \dots \quad \dim_K Me_n]^t$$

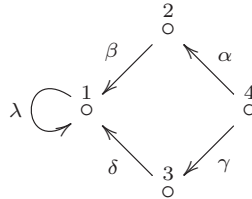
ここで, e_1, \dots, e_n は Q_0 の頂点 $1, \dots, n$ に対応する A の原始直交冪等元である.

定義から単純加群 $S(j)$ の次元ベクトルは \mathbb{Z}^n の標準基底の j 番目である. また, 上の同型から

$$\mathbf{dim } M = \begin{bmatrix} \dim_K \text{Hom}_A(P(1), M) \\ \vdots \\ \dim_K \text{Hom}_A(P(n), M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dim_K \text{Hom}_A(M, I(1)) \\ \vdots \\ \dim_K \text{Hom}_A(M, I(n)) \end{bmatrix}$$

であることがわかる. 更に, Krull-Schmidt の定理 (定理 0.0.12) から $\mathbf{dim } M$ は A の原始直交冪等元の完全系の取り方に依らない.

例 2.3.2. Q を



とし, 関係 $\alpha\beta = \gamma\delta, \beta\lambda = 0, \lambda^3 = 0$ を入れる. このとき, 例 2.2.5(4), 例 2.2.7(4) より直既約

射影加群及び直既約移入加群の次元ベクトルは次のようになる:

$$\begin{aligned}\dim P(1) &= [3 \ 0 \ 0 \ 0]^t, & \dim I(1) &= [3 \ 1 \ 3 \ 1]^t, \\ \dim P(2) &= [1 \ 1 \ 0 \ 0]^t, & \dim I(2) &= [0 \ 1 \ 0 \ 1]^t, \\ \dim P(3) &= [3 \ 0 \ 1 \ 0]^t, & \dim I(3) &= [0 \ 0 \ 1 \ 1]^t, \\ \dim P(4) &= [1 \ 1 \ 1 \ 1]^t, & \dim I(4) &= [0 \ 0 \ 0 \ 1]^t.\end{aligned}$$

また, 簡単のため与えられたクイバーの形に合わせて次元ベクトルを次のように表記することがある:

$$\dim I(1) = {}_3 \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \quad \dim I(4) = {}_0 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$$

補題 2.3.3. $A \cong KQ/I$ とし, $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ を A -加群の短完全列とする. このとき, $\dim M = \dim L + \dim N$ が成立する.

証明. 完全関手 $\mathrm{Hom}_A(P(j), -) \cong -e_j$ を施すことで, K -ベクトル空間の短完全列 $0 \rightarrow Le_j \rightarrow Me_j \rightarrow Ne_j \rightarrow 0$ を得る. これは分裂するので, 各 $j \in Q_0$ について $\dim_K Me_j = \dim_K Le_j + \dim_K Ne_j$ が成立する. \square

この補題の性質はしばしば「**dim** は加法的関数 (additive function) である」と理解される. これにより加群の次元ベクトルを次で定義するグロタンディーク群の言葉で特徴付けることができる.

定義 2.3.4. A を K -多元環とする. アーベル群 $K_0(A) = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ を $\mathrm{mod} A$ のグロタンディーク群 (Grothendieck group) と呼ぶ. ここで, \mathcal{F} は A -加群 $M \in \mathrm{mod} A$ の同型類 \widetilde{M} を基底とする自由アーベル群であり, \mathcal{F}' は $\mathrm{mod} A$ におけるすべての短完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ に対して $\widetilde{M} - \widetilde{L} - \widetilde{N}$ で生成される \mathcal{F} の部分群である. また, 自然な全射群準同型 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ による \widetilde{M} の像を $[M]$ で表記する.

次の定理で, グロタンディーク群 $K_0(A)$ はそれ自身が自由アーベル群であり, \mathbb{Z}^n と同型となることを示す.

定理 2.3.5. A をベーシックな有限次元 K -多元環とし, $S(1), \dots, S(n)$ を単純右 A -加群の同型類の完全系とする. このとき, $\mathrm{mod} A$ のグロタンディーク群 $K_0(A)$ は集合 $\{[S(1)], \dots, [S(n)]\}$ を基底とする自由アーベル群であり, 群同型 $\dim : K_0(A) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ で各 A -加群 M に対して $\dim[M] = \dim M$ となるものが唯一つ存在する.

証明. まず, 集合 $\{[S(1)], \dots, [S(n)]\}$ が $K_0(A)$ を生成することを示す. $M \in \mathrm{mod} A$ を A -加群とし, $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_t = M$ を M の組成列とする. $K_0(A)$ の定義から,

$$[M] = [M_t/M_{t-1}] + [M_{t-1}] = \dots = \sum_{j=1}^n [M_j/M_{j-1}] = \sum_{i=1}^n C_i(M)[S(i)]$$

が成立する. ここで, $C_i(M)$ は $S(i)$ に同型な M の組成因子の数である. これより, $\{[S(1)], \dots, [S(n)]\}$ が $K_0(A)$ を生成していることがわかる.

さて, 明らかに $M \cong N$ ならば $\mathbf{dim} M = \mathbf{dim} N$ であり, \mathbf{dim} の加法的性質から, 群準同型 $\mathbf{dim} : K_0(A) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ で各 $M \in \text{mod } A$ に対して $\mathbf{dim}[M] = \mathbf{dim} M$ となるものが唯一つ存在する. 生成集合 $\{[S(1)], \dots, [S(n)]\}$ は準同型 \mathbf{dim} によって自由群 \mathbb{Z}^n の標準基底に写されるため, この集合は $K_0(A)$ において \mathbb{Z} 上一次独立である. 従って $K_0(A)$ は自由群で, 準同型 $\mathbf{dim} : K_0(A) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ は同型である. \square

定理の結果から, M の次元ベクトルは M の単純組成因子の個数を記述していると見ることも可能である.

系 2.3.6. $A \cong KQ/I$ を K -多元環とし, 単純 A -加群 $S(j)$ ($j \in Q_0$) を一つ固定する. 任意の A -加群 $M \in \text{mod } A$ の $S(j)$ に同型な組成因子の数 $C_j(M)$ について, $C_j(M) = \dim_K Me_j$ が成立する. また, M の組成列の長さは $\ell(M) = \sum_{j \in Q_0} \dim_K Me_j = \dim_K M$ となる.

証明. 上の定理の証明から, $[M] = \sum_{i=1}^n C_i(M)[S(i)]$ が成立している. これより, $\mathbf{dim} M = \mathbf{dim}[M] = \sum_{i=1}^n C_i(M) \mathbf{dim}[S(i)] = \sum_{i=1}^n C_i(M) \mathbf{dim} S(i)$ を得る. $\{\mathbf{dim} S(1), \dots, \mathbf{dim} S(n)\}$ はアーベル群 \mathbb{Z}^n の標準基底であるから, $C_j(M) = \dim_K Me_j$ が得られる. また, これより $\ell(M) = \sum_{j \in Q_0} C_j(M) = \sum_{j \in Q_0} \dim_K Me_j = \dim_K M$ が従う. \square

定義 2.3.7. A をベーシックな有限次元 K -多元環とし, $\{e_1, \dots, e_n\}$ を A の原始直交冪等元の完全系とする. 次で定義される $n \times n$ 行列を A の**カルタン行列** (Cartan matrix) と呼ぶ:

$$C_A = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$$

ここで, $i, j = 1, \dots, n$ に対して $c_{ji} = \dim_K e_i A e_j$ である.

Krull-Schmidt の定理から, A の別の原始直交冪等元の完全系 $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ による A のカルタン行列 C'_A は C_A の行と列を並べ替えることによって得られる. すなわち, カルタン行列 C_A と C'_A は \mathbb{Z} 上**共役** (conjugate) である. 以下, 単に A のカルタン行列と言え, A の原始直交冪等元の完全系 $\{e_1, \dots, e_n\}$ によるカルタン行列を指すものとする.

命題 2.2.10 と補題 2.2.11 において, $M = e_b A$ とすれば, K -ベクトル空間の同型 $e_b A e_a \cong \text{Hom}_A(P(a), P(b)) \cong \text{Hom}_A(I(a), I(b))$ が得られる. これより, A のカルタン行列は一次独立な直既約射影 A -加群の間の準同型と一次独立な直既約移入 A -加群の間の準同型の数を記述している.

命題 2.3.8. C_A をベーシックな K -多元環 $A \cong KQ/I$ のカルタン行列とする.

- (1) $\mathbf{dim} P(i)$ は C_A の i 列目である;
- (2) $[\mathbf{dim} I(i)]^t$ は C_A の i 行目である;
- (3) $\mathbf{dim} P(i) = C_A \cdot \mathbf{dim} S(i)$;

$$(4) \dim I(i) = C_A^t \cdot \dim S(i).$$

証明. (1) $e_i A e_j = P(i) e_j$ と $\dim P(i) = \begin{bmatrix} \dim_K P(i) e_1 \\ \vdots \\ \dim_K P(i) e_n \end{bmatrix}$ より従う.

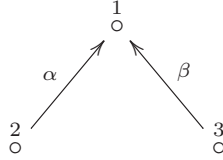
(2) $\dim_K I(i) e_j = \dim_K D \operatorname{Hom}_A(I(i), I(j)) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(e_i A, e_j A) = \dim_K e_j A e_i$ より従う.

(3), (4) は (1), (2) と $\dim S(1), \dots, \dim S(n)$ ($n = |Q_0|$) が \mathbb{Z}^n の標準基底であることから従う.

□

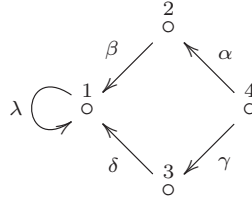
例 2.3.9. (1) クロネッカー多元環 $A = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{bmatrix}$ のカルタン行列は $C_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と
なる.

(2) A を



とする. このとき, カルタン行列は $C_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる.

(3) A を



とし, 関係 $\alpha\beta = \gamma\delta, \beta\lambda = 0, \lambda^3 = 0$ を入れる. このとき, カルタン行列は $C_A =$

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる.

命題 2.3.10. $A \cong KQ/\mathcal{I}$ を大域次元が有限な多元環とする. このとき, A のカルタン行列 C_A について, $\det C_A \in \{-1, 1\}$ となる. 特に, C_A は行列環 $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ において逆元を持つ. すなわち, $C_A \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{Z}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z}); \det A \in \{-1, 1\}\}$ である.

証明. $n = |Q_0|$ とし, $a \in Q_0$ とする. 大域次元が有限より, 単純加群 $S(a)$ に対して有限な射影分解 $0 \rightarrow P_{m_a} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow S(a) \rightarrow 0$ が存在する. これより, $\dim S(a) = \sum_{j=0}^{m_a} (-1)^j \dim P_j$ を得る. 一方で, Krull-Schmidt の定理から, 各 P_j は射影

加群 $P(1), \dots, P(n)$ の有限個の直和で表される. 従って, \mathbb{Z}^n における標準基底の a 番目である $\dim S(a)$ は $\dim P(1), \dots, \dim P(n) \in \mathbb{Z}^n$ の整数を係数とする一次結合によって表される. これと命題 2.3.8(1) より, 適当な $B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ と単位行列 E に対して

$$E = [\dim S(1) | \dots | \dim S(n)] = [\dim P(1) | \dots | \dim P(n)]B = C_A B$$

が成立する. ここで, 各列が列ベクトル $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Z}^n$ である行列を $[v_1 | \dots | v_n]$ で表記した. C_A の逆行列 B も整数行列より, $\dim C_A \in \{-1, 1\}$ が得られ, 命題の証明が完成する. \square

定義 2.3.11. A をベーシックで大域次元が有限な K -多元環とし, C_A を A のカルタン行列とする. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ に対して, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^t (C_A^{-1})^t \mathbf{y}$ で定まる非対称 \mathbb{Z} 上双線形写像 $\langle -, - \rangle_A : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ を A の**オイラー標数** (Euler characteristic) という.

$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ に対して $q_A(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_A$ で定まる二次形式 $q_A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ を A の**オイラー二次形式** (Euler quadratic form) という.

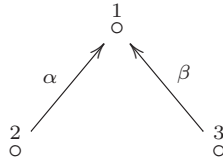
命題 2.3.10 より, C_A は正則であったから, C_A^{-1} は常に存在する.

例 2.3.12. (1) A をクロネッカー多元環 $\begin{bmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{bmatrix}$ とすると, 例 2.3.9(1) よりオイラー標数は

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A &= [x_1 \ x_2] \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right)^t \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= [x_1 - 2x_2 \ x_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 - 2x_2 y_1 \end{aligned}$$

となる.

(2) A を

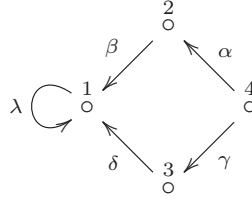


とすると, 例 2.3.9(2) より, オイラー標数は,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A &= [x_1 \ x_2 \ x_3] \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right)^t \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
&= [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
&= [x_1 - x_2 - x_3 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
&= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_2 y_1 - x_3 y_1
\end{aligned}$$

となる.

(3) A を



とし, 関係 $\alpha\beta = \gamma\delta, \beta\lambda = 0, \lambda^3 = 0$ を入れる. このとき, A の大域次元は無限となり, オイラー標数は定義されない. 実際, 単純加群 $S(1)$ の極小射影分解は

$$\cdots \rightarrow P(1) \rightarrow P(1) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

となっている. また, C_A は $M_n(\mathbb{Z})$ 上逆元を持たないことにも注意しておく.

次の命題はオイラー標数のホモロジー的意味を与える.

命題 2.3.13. A をベーシックで大域次元が有限な K -多元環とし, $\langle -, - \rangle_A$ を A のオイラー標数とする. このとき, 任意の $M, N \in \text{mod } A$ に対して, 次が成立する:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \langle \mathbf{dim} M, \mathbf{dim} N \rangle_A &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_K \text{Ext}_A^j(M, N); \\
(2) \quad q_A(\mathbf{dim} M) &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_K \text{Ext}_A^j(M, M)
\end{aligned}$$

証明. $q_A(\mathbf{dim} M) = \langle \mathbf{dim} M, \mathbf{dim} M \rangle_A$ より, (1) を示せば十分である. M の射影次元 $d = \text{pd } M < \infty$ に関する帰納法で証明しよう. 加法性から, M を直既約としても一般性を失わない. $d = 0$ のとき, M は射影加群であるから, $M \cong P(i) = e_i A$ となる $i \in \{1, \dots, n\}$ が存

在する. このとき, 命題 2.3.8 及び補題 2.2.11 より,

$$\begin{aligned}
\langle \dim M, \dim N \rangle_A &= \langle \dim P(i), \dim N \rangle_A \\
&= [\dim P(i)]^t (C_A^{-1})^t \dim N \\
&= [(C_A^{-1}) \dim P(i)]^t \dim N \\
&= [\dim S(i)]^t \dim N \\
&= \dim_K N e_i \\
&= \dim_K \operatorname{Hom}_A(P(i), N) \\
&= \dim_K \operatorname{Ext}_A^0(M, N)
\end{aligned}$$

を得る. これより, $d = 0$ のときは成立する. 今, $d \geq 1$ とし, $\operatorname{pd} M' = d - 1$ を満たす任意の加群 M' について主張が成立していると仮定する. P が射影加群である短完全列 $0 \rightarrow L \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ を考えよう. このとき, $\operatorname{pd} M = d$ より $\operatorname{pd} L = d - 1$ であり, Ext の長完全列

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(M, N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(P, N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_A(L, N) \\
& & \xrightarrow{\delta_0} & \operatorname{Ext}_A^1(M, N) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^1(P, N) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^1(L, N) \\
& & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \dots & \xrightarrow{\delta_{m-1}} & \operatorname{Ext}_A^m(M, N) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^m(P, N) & \longrightarrow & \operatorname{Ext}_A^m(L, N) \\
& & & \xrightarrow{\delta_m} & \operatorname{Ext}_A^{m+1}(M, N) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

が誘導される. この長完全列において, すべての $t \geq 1$ で $\operatorname{Ext}_A^t(P, N) = 0$ であるから, $\operatorname{Ext}_A^t(L, N) \cong \operatorname{Ext}_A^{t+1}(M, N)$ である. また, 完全列

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_A(M, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(P, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(L, N) \rightarrow \operatorname{Ext}_A^1(M, N) \rightarrow 0$$

より

$$\dim_K \operatorname{Hom}_A(P, N) - \dim_K \operatorname{Hom}_A(L, N) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(M, N) - \dim_K \operatorname{Ext}_A^1(M, N)$$

である. 従って $\dim M = \dim P - \dim L$ と帰納法の仮定から,

$$\begin{aligned}
\langle \dim M, \dim N \rangle_A &= \langle \dim P - \dim L, \dim N \rangle_A \\
&= \langle \dim P, \dim N \rangle_A - \langle \dim L, \dim N \rangle_A \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_K \operatorname{Ext}_A^j(P, N) - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_K \operatorname{Ext}_A^j(L, N) \\
&= \dim_K \operatorname{Hom}_A(P, N) - \dim_K \operatorname{Hom}_A(L, N) - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \dim_K \operatorname{Ext}_A^j(L, N) \\
&= \dim_K \operatorname{Hom}_A(M, N) - \dim_K \operatorname{Ext}_A^1(M, N) - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \dim_K \operatorname{Ext}_A^{j+1}(M, N) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \dim_K \operatorname{Ext}_A^j(M, N)
\end{aligned}$$

を得る. □

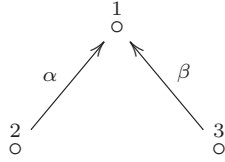
定義 2.3.14. A をベーシックで大域次元が有限な K -多元環とし, C_A を A のカルタン行列とする. 行列

$$\Phi_A := -C_A^t C_A^{-1}$$

を A の**コクセター行列** (Coxeter matrix) と呼ぶ. また, 任意の $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n] \in \mathbb{Z}^n$ に対して, $\Phi_A(\mathbf{x}) = \Phi_A \cdot \mathbf{x}$ で定まる群準同型 $\Phi_A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ を A の**コクセター変換** (Coxeter transformation) と呼ぶ.

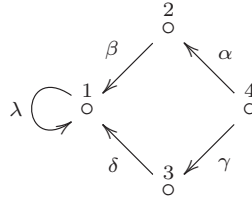
例 2.3.15. (1) クロネッカー多元環 $A = \begin{bmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{bmatrix}$ のコクセター行列は $\Phi_A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ となる.

(2) A を



とする. このとき, コクセター行列は $\Phi_A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ となる.

(3) A を



とし, 関係 $\alpha\beta = \gamma\delta, \beta\lambda = 0, \lambda^3 = 0$ を入れる. このとき, 例 2.3.12 と同様に A の大域次元が無限となるためコクセター行列は定義されない.

補題 2.3.16. (1) 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $\Phi_A \cdot \dim P(i) = -\dim I(i)$ が成立する;

(2) 任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n$ に対して, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = -\langle \mathbf{y}, \Phi_A \mathbf{x} \rangle_A = \langle \Phi_A \mathbf{x}, \Phi_A \mathbf{y} \rangle_A$ が成立する.

証明. (1) 命題 2.3.8(3) より, $\dim S(i) = C_A^{-1} \dim P(i)$ であり, これより $\dim I(i) = C_A^t \dim S(i) = C_A^t C_A^{-1} \dim P(i) = -\Phi_A \cdot \dim P(i)$ を得る.

(2) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^t (C_A^{-1})^t \mathbf{y} = ((\mathbf{y}^t C_A^{-1}) \mathbf{x})^t = \mathbf{y}^t C_A^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{y}^t (C_A^{-1})^t C_A^t C_A^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{y}^t (C_A^{-1})^t (-\Phi_A \mathbf{x}) = -\langle \mathbf{y}, \Phi_A \mathbf{x} \rangle_A$ より一つ目の等式が成立する. 同様の操作によってもう一方の等式も得られる. □

補題 2.3.16 の (1) は中山関手 ν を用いて表すことができる. 命題 2.2.10 より, 各 $i \in Q_0$ に対して $\nu P(i) \cong I(i)$ であったから, 任意の射影 A -加群 P について $\Phi_A \cdot \dim P = -\dim \nu P$

である.

3 Auslander-Reiten 理論

ここまで見てきたように, クイバーは有限次元多元環とそれらの加群を視覚的に捉えるうえで非常に便利な道具である. しかし, 実際に直既約加群とそれらの間の準同型を計算するには, 既約写像や概分裂完全列といった概念が必要である. この章では, まず既約写像や概分裂写像の概念を導入し, 次に紹介する主定理を証明する. これにより, AR-クイバーと呼ばれる新たなクイバーを定義することができる. また, 概分裂完全列に関しては [4] にも詳しく書かれているので, 必要に応じて参照してほしい. 主定理の紹介の前に, 切断と引き込みを思い出しておこう.

定義 3.0.1. $h: M \rightarrow N, u: L \rightarrow M$ を A -加群準同型とする.

A -加群準同型 $s: N \rightarrow M$ が h の**切断** (section) であるとは, $hs = 1_N$ となることである. A -加群準同型 $r: M \rightarrow L$ が u の**引き込み** (retraction) であるとは, $ru = 1_L$ となることである. s を h の切断とすると, h は全射, s は単射であり, 直和分解 $M = \text{Im } s \oplus \text{Ker } h \cong N \oplus \text{Ker } h$ が存在する. 更にこのとき, h は s の引き込みとなっている. 同様に, r を u の引き込みとすると, r は全射, u は単射, u は r の切断であり, 直和分解 $M = \text{Im } u \oplus \text{Ker } r \cong L \oplus \text{Ker } r$ が存在する.

定理 3.0.2. (=定理 3.1.13) A を有限次元 K -多元環とし, N_A を射影的でない有限次元直既約 A -加群とする. このとき, 加群圏 $\text{mod } A$ における非分裂短完全列

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

で, 次を満たすものが存在する:

- (1) L は移入的でない直既約加群である;
- (2) $u: L \rightarrow U$ が切断でないとする, $u = u'f$ を満たす $u': M \rightarrow U$ が存在する;
- (3) $v: V \rightarrow N$ が引き込みでないとする, $v = gv'$ を満たす $v': V \rightarrow M$ が存在する.

更に, この完全列は同型を除いて一意に定まる. 双対的に, L_A が移入的でない有限次元直既約 A -加群とすると, N が射影的でない直既約加群で, 性質 (2), (3) を満たす上のような非分裂短完全列が存在する. これも同様に同型を除いて一意に定まる.

このような完全列を N で終わる (或いは L で始まる) 概分裂完全列と呼ぶ.

以下この章を通して, A を有限次元 K -多元環, K を代数的閉体とし, 特に断りがない限り有限次元右 A -加群を単に A -加群と表記することとする.

3.1 既約写像と概分裂完全列

まず, この節で有限生成右 A -加群の圏 $\text{mod } A$ における既約写像, 極小写像, 概分裂写像の概念を与える. 多元環の表現論の目的は与えられた多元環上の加群とその間の射を調べることが

目的である. Krull-Schmidt の定理から, $\text{mod } A$ の任意の加群は直既約加群の直和で同型と直和因子の順番を除いて一意に書き表される. 従って, 有限次元多元環上の有限生成加群を全て調べるには, 有限生成直既約加群を全て調べれば十分である. 上記の写像の概念は加群とその間の射を調べる上で重要な役割を果たす.

定義 3.1.1. $L, M, N \in \text{mod } A$ とする.

- (1) A -加群準同型 $f : L \rightarrow M$ が**左極小** (left minimal) であるとは, $hf = f$ となる任意の $h \in \text{End } M$ が自己同型となることをいう;
- (2) A -加群準同型 $g : M \rightarrow N$ が**右極小** (right minimal) であるとは, $gk = g$ となる任意の $k \in \text{End } M$ が自己同型となることをいう;
- (3) A -加群準同型 $f : L \rightarrow M$ が次を満たすとき, f は**左概分裂** (left almost split) であるという:
 - (a) f は切断でない;
 - (b) 任意の $U \in \text{mod } A$ と切断でない任意の A -加群準同型 $u : L \rightarrow U$ に対して, $u'f = u$ となる $u' : M \rightarrow U$ が存在する. すなわち, u' は以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow u & \nearrow u' & \\ U & & \end{array}$$

- (4) A -加群準同型 $g : M \rightarrow N$ が次を満たすとき, g は**右概分裂** (right almost split) であるという:
 - (a) g は引き込みでない;
 - (b) 任意の $V \in \text{mod } A$ と引き込みでない任意の A -加群準同型 $v : V \rightarrow N$ に対して, $gv' = v$ となる $v' : V \rightarrow M$ が存在する. すなわち, v' は以下の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \swarrow v' & \downarrow v & \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

- (5) A -加群準同型 $f : L \rightarrow M$ が左極小かつ左概分裂であるとき, **左極小概分裂** (left minimal almost split) という;
- (6) A -加群準同型 $g : M \rightarrow N$ が右極小かつ右概分裂であるとき, **右極小概分裂** (right minimal almost split) という.

次の命題で, 左極小概分裂 (或いは右極小概分裂) 写像は定義域 (或いは終域) に対して一意に定まることを示す.

命題 3.1.2. (1) $f : L \rightarrow M, f' : L \rightarrow M'$ が左極小概分裂であるとする. このとき, $f' = hf$ となる同型写像 $h : M \rightarrow M'$ が存在する;

(2) $g : M \rightarrow N, g' : M' \rightarrow N$ が右極小概分裂であるとする. このとき, $g = g'k$ となる同型写像 $k : M \rightarrow M'$ が存在する.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. f, f' が共に左概分裂より, $f' = hf, f = h'f'$ となる $h : M \rightarrow M', h' : M' \rightarrow M$ が存在する. これより, $f = h'hf, f' = hh'f'$ である. 従って, f, f' の極小性から $h'h, hh'$ は共に自己同型となり, h が同型写像であることを得る. \square

補題 3.1.3. (1) $f : L \rightarrow M$ が左概分裂であるとする. このとき, L は直既約である;
(2) $g : M \rightarrow N$ が右概分裂であるとする. このとき, N は直既約である.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. 零でない L_1, L_2 について $L = L_1 \oplus L_2$ と直和分解されるとし, $p_i : L \rightarrow L_i (i = 1, 2)$ を射影とする. 今, 各 $i = 1, 2$ について p_i は切断でないから, $u_i f = p_i$ となる $u_i : M \rightarrow L_i$ が存在する. しかしこのとき, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} : M \rightarrow L$ について $u f = 1_L$ が成立し, これは f が切断でないことに矛盾する. \square

定義 3.1.4. A -加群準同型 $f : X \rightarrow Y$ が次を満たすとき, f は**既約** (irreducible) であるという:

- (1) f は切断でも引き込みでもない;
- (2) $f = f_1 f_2$ とすると, f_1 が引き込み, または f_2 が切断である.

既約写像は単射または全射となる: $f : L \rightarrow M$ を既約で全射でないとし, $f = jp$ を $\text{Im } f$ を通した自然な分解とする. このとき, j は引き込みでないから, p は切断である. 従って f は単射となる. 同様の議論で, 既約写像は自明でない二つの既約写像の合成で書けないことを得る.

例 3.1.5. (1) $e \in A$ を原始冪等元とする. このとき, eA は直既約で, 包含写像 $\text{rad } eA \hookrightarrow eA$ は既約右概分裂写像である. 実際, $v \in \text{Hom}_A(V, eA)$ とし, v は引き込みでないとする. このとき, $\text{Im } v$ は eA の真の部分加群である. $\text{rad } eA$ は eA の唯一の真極大部分加群であったから, これより $\text{Im } v \subseteq \text{rad } eA$ を得る. 従って, $v : V \rightarrow eA$ は $\text{rad } eA$ を通るため, $\text{rad } eA \hookrightarrow eA$ は右概分裂である. 更に, $\text{rad } eA$ の極大性から, これは既約写像にもなっている;

(2) S を単純 A -加群とし, $E = E_A(S)$ を S の移入包絡とする. このとき, 自然な全射 $p : E \rightarrow E/S$ は既約左概分裂写像である. これは (1) の K -双対を考えればよい.

さて, 既約写像を加群圏 $\text{mod } A$ の**根基** (radical) rad_A で特徴付けよう. 圏 $\mathcal{C} = \text{mod } A$ の根基 $\text{rad}_{\mathcal{C}}$ を rad_A で表記する. $X, Y \in \text{mod } A$ を直既約対象とすると,

$$\text{rad}_A(X, Y) = \begin{cases} \text{rad } \text{End } X & (X \cong Y) \\ \text{Hom}_A(X, Y) & (X \not\cong Y) \end{cases}$$

である. すなわち, $\text{rad}_A(X, Y)$ は逆写像を持たない準同型 $X \rightarrow Y$ 全てから成る K -ベクトル空間である. 一般の $X, Y \in \text{mod } A$ に対して, $\text{rad}_A(X, Y)$ は $\text{Hom}_A(X, Y)$ の $\text{End } Y$ - $\text{End } X$ -両側部分加群である. これより, $\text{rad}_A(-, -)$ は双関手 $\text{Hom}_A(-, -)$ の部分関手である.

更に, $X, Y \in \text{mod } A$ に対して,

$$\text{rad}_A^2(X, Y) = \{gf \mid f \in \text{rad}_A(X, Z), g \in \text{rad}_A(Z, Y), Z \in \text{mod } A\}$$

で定義する. すると, 明らかに $\text{rad}_A^2(X, Y) \subseteq \text{rad}_A(X, Y)$ であり, $\text{rad}_A^2(X, Y)$ は $\text{rad}_A(X, Y)$ の $\text{End } Y$ - $\text{End } X$ -両側部分加群である.

次の補題は商空間 $\text{rad}_A(X, Y)/\text{rad}_A^2(X, Y)$ が直既約加群の間の既約写像の数を記述していることを示している.

補題 3.1.6. $X, Y \in \text{mod } A$ を直既約加群とする. $f: X \rightarrow Y$ が既約写像であるための必要十分条件は $f \in \text{rad}_A(X, Y) \setminus \text{rad}_A^2(X, Y)$ であることである.

証明. f が既約であるとする. すると明らかに $f \in \text{rad}_A(X, Y)$ である. $f \in \text{rad}_A^2(X, Y)$ と仮定する. このとき, $Z \in \text{mod } A$ と $h \in \text{rad}_A(X, Z), g \in \text{rad}_A(Z, Y)$ を用いて $f = gh$ とかける.

Z の直既約分解 $Z = \bigoplus_{i=1}^t Z_i$ により,

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{bmatrix} : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t Z_i, \quad g = [g_1 \quad \dots \quad g_t] : \bigoplus_{i=1}^t Z_i \rightarrow Y$$

と表せる. 今, f が既約であるから, h が切断かまたは g が引き込みである. そこで h を切断とし, $h' = [h'_1 \quad \dots \quad h'_t] : \bigoplus_{i=1}^t Z_i \rightarrow X$ が $1_X = h'h = \sum_{i=1}^t h'_i h_i$ を満たすとする. 各 i で h_i は逆写像を持たないため, $h'_i h_i$ も逆写像を持たず, 従って $h'_i h_i \in \text{rad}_A(X, X) = \text{rad End } X$ である. これより $1_X \in \text{rad End } X$ であるが, これは矛盾である (何故ならば, $\text{End } X$ が局所多元環より, $\text{rad End } X$ は唯一の真極大部分加群である). 故に h は切断でなく, 同様の議論により g も引き込みでない. 以上により $f \notin \text{rad}_A^2(X, Y)$ を得る.

逆に, $f \in \text{rad}_A(X, Y) \setminus \text{rad}_A^2(X, Y)$ とする. X, Y が直既約であることと, f が非同型であることから f は切断でも引き込みでもない. さて, $h \in \text{Hom}_A(X, Z), g \in \text{Hom}_A(Z, Y)$ に対して, $f = gh$ とする. 上と同様にして, Z の直既約分解 $Z = \bigoplus_{i=1}^t Z_i$ により,

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_t \end{bmatrix} : X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t Z_i, \quad g = [g_1 \quad \dots \quad g_t] : \bigoplus_{i=1}^t Z_i \rightarrow Y$$

と表せる. これより $f = \sum_{i=1}^t g_i h_i$ とかける. $f \notin \text{rad}_A^2(X, Y)$ より, $h \notin \text{rad}_A(X, Z)$ または $g \notin \text{rad}_A(Z, Y)$, すなわち h_i が逆写像を持つような i もしくは g_j が逆写像を持つような j が存在する. 前者の場合 h は切断であり, 後者の場合 g は引き込みである. \square

補題 3.1.7. $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ を非分裂完全列とする.

(1) $f: L \rightarrow M$ について次は同値である:

- (a) f は既約である;
- (b) 任意の $v : V \rightarrow N$ に対して, $v = gv_1$ なる $v_1 : V \rightarrow M$ または $g = vv_2$ なる $v_2 : M \rightarrow V$ が存在する.
- (2) $g : M \rightarrow N$ について次は同値である:
- (a) g は既約である;
- (b) 任意の $u : L \rightarrow U$ に対して, $u = u_1f$ なる $u_1 : M \rightarrow U$ または $f = u_2u$ なる $u_2 : U \rightarrow M$ が存在する.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. f が既約であるとし, $v : V \rightarrow N$ を任意に取る. V と M の N 上のファイバー積 $E = V \times_N M$ によって可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & E & \xrightarrow{g'} & V \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_L & & \downarrow u & & \downarrow v \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

を得る. $f = uf'$ が既約より, f' が切断, または u が引き込みである. 前者の場合, g' は引き込みであるから, $u' : V \rightarrow E$ が $g'u' = 1_V$ なる準同型とすると, $v_1 = uu' : V \rightarrow M$ は $gv_1 = v$ を満たす. 後者の場合も同様に, $g = vv_2$ なる $v_2 : M \rightarrow V$ が存在する.

逆に, (b) の性質を満たすとする. $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ が非分裂より f は切断でも引き込みでもない. $f_2 : L \rightarrow U, f_1 : U \rightarrow M$ に対して, $f = f_1f_2$ とする. f が単射より, f_2 もそうであり, $V = \text{Coker } f_2$ とすることで可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f_2} & U & \xrightarrow{u} & V \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_L & & \downarrow f_1 & & \downarrow v \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

を得る. 特に, U は V と M の N 上のファイバー積 $E = V \times_N M$ と同型になる. $v = gv_1$ なる $v_1 : V \rightarrow M$ が存在する場合, ファイバー積の性質から u は引き込みであり, 従って f_2 は切断である. $g = vv_2$ なる $v_2 : M \rightarrow V$ が存在する場合, 同様にして f_1 は引き込みである. 以上により f は既約である. \square

上の補題を応用することで, 既約写像から直既約加群を構成する便利な方法が得られる.

- 系 3.1.8.** (1) $f : L \rightarrow M$ が単射既約写像ならば, $N = \text{Coker } f$ は直既約である;
- (2) $g : M \rightarrow N$ が全射既約写像ならば, $L = \text{Ker } g$ は直既約である.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. $h : M \rightarrow N$ を自然な全射とし, 零でない N_1, N_2 について $N = N_1 \oplus N_2$ を N の直和分解とする. $q_i : N_i \rightarrow N (i = 1, 2)$ をそれぞれ包含写像とし, $h = q_i u_i$ なる $u_i : M \rightarrow N_i$ が存在するとすると, h が全射より q_i もそうであり, 従って q_i は同型となるがこれは N_1, N_2 が零でないことに矛盾する. よって補題 3.1.7 より各 $i = 1, 2$ に対して $h v_i = q_i$ なる $v_i : N_i \rightarrow M$ が存在する. 故に $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} : N_1 \oplus N_2 \rightarrow M$ は $h v = 1_N$ を満たすが, これにより h が引き込みとなり, f が切断でないことに矛盾する. \square

- 補題 3.1.9.** (1) $f : L \rightarrow M$ を L が直既約であるような零でない A -加群準同型とする. f が切断でないことの必要十分条件は $\text{Im Hom}_A(f, L) \subseteq \text{rad End } L$ となることである;
- (2) $g : M \rightarrow N$ を N が直既約であるような零でない A -加群準同型とする. g が引き込みでないことの必要十分条件は $\text{Im Hom}_A(N, g) \subseteq \text{rad End } N$ となることである.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. L が直既約より, $\text{End } L$ は局所多元環である. $\text{Im Hom}_A(f, L) \not\subseteq \text{rad End } L$ とすると, $k = \text{Hom}_A(f, L)(h) = hf$ が逆写像を持つような $h : M \rightarrow L$ が存在する. 従って, $k^{-1}hf = 1_L$ より f は切断となる. 逆に, $hf = 1_L$ なる h が存在すると仮定すると, $\text{Hom}_A(f, L)(h) = 1_L$ より $\text{Hom}_A(f, L)$ は全射となる. 従って $\text{Im Hom}_A(f, L) = \text{End } L \not\subseteq \text{rad End } L$ を得る. \square

次の定理で既約写像と極小概分裂写像の概念を関連付ける. 具体的には, 既約写像は極小概分裂写像の構成要素として考えられることを示す.

- 定理 3.1.10.** (1) $f : L \rightarrow M$ が $\text{mod } A$ の左極小概分裂ならば, f は既約である. 更に, 次は同値である:
- (a) A -加群準同型 $f' : L \rightarrow M'$ は既約である;
- (b) $M' \neq 0$ であり, 直和分解 $M \cong M' \oplus M''$ と $f'' : L \rightarrow M''$ が存在し, $\begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix} : L \rightarrow M' \oplus M''$ が左極小概分裂となる.
- (2) $g : M \rightarrow N$ が $\text{mod } A$ の右極小概分裂ならば, g は既約である. 更に, 次は同値である:
- (a) A -加群準同型 $g' : M' \rightarrow N$ は既約である;
- (b) $M' \neq 0$ であり, 直和分解 $M \cong M' \oplus M''$ と $g'' : M'' \rightarrow N$ が存在し, $\begin{bmatrix} g' & g'' \end{bmatrix} : M' \oplus M'' \rightarrow N$ が右極小概分裂となる.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. $f : L \rightarrow M$ を左極小概分裂とする. すると定義から f は切断でないから f は非同型で, 補題 3.1.3 から L は直既約なので, f は引き込みでもない. さて, $f_2 : L \rightarrow X, f_1 : X \rightarrow M$ に対して, $f = f_1 f_2$ とする. f_2 を切断でないとしたときに f_1 が引き込みであることを示そう. f が左概分裂より, $f_2 = f_2' f$ なる $f_2' : M \rightarrow X$ が存在する. これより $f = f_1 f_2 = f_1 f_2' f$ となり, f の極小性から $f_1 f_2'$ は自己同型である. 従って f_1 は引き込みである. これで証明の前半部分が完成する.

今, $f' : L \rightarrow M'$ を $\text{mod } A$ の既約写像とする. すると明らかに $M' \neq 0$ である. また, f' は切断でないので, $f' = hf$ なる $h : M \rightarrow M'$ が存在する. f' の既約性と f が切断でないことから h は引き込みである. さて, $M'' = \text{Ker } h$ とする. すると $\begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} : M \rightarrow M' \oplus M''$ が同型となる

る $q : M \rightarrow M''$ が存在する. 従って, $\begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} f' \\ qf \end{bmatrix} : L \rightarrow M' \oplus M''$ は左極小概分裂となる.

逆に, f' が (b) の条件を満たすと仮定する. L が直既約であることと, f' が非同型であることから, f' は引き込みではない. 一方で, $hf' = 1_L$ なる h が存在するならば, $\begin{bmatrix} h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix} = 1_L$

であるが, $\begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix}$ が左概分裂, すなわち切断でないことに矛盾する. 従って f' は切断でもない. さて, $f_2 : L \rightarrow X, f_1 : X \rightarrow M'$ に対して, $f' = f_1 f_2$ とする. f_2 が切断でないとしたときに f_1 が引き込みであることを示そう. 今, $\begin{bmatrix} f_2 \\ f'' \end{bmatrix} : L \rightarrow X \oplus M'', \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : X \oplus M'' \rightarrow M' \oplus M''$ に対して, $\begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f'' \end{bmatrix}$ である. f_2 が切断でないことから, 補題 3.1.9 より $\text{Im Hom}_A(f_2, L) \subseteq \text{rad End } L$ で, 同様に $\text{Im Hom}_A(f'', L) \subseteq \text{rad End } L$ であるから, $\text{Im Hom}_A\left(\begin{bmatrix} f_2 \\ f'' \end{bmatrix}, L\right) \subseteq \text{rad End } L$ を得る. これより再び補題 3.1.9 から $\begin{bmatrix} f_2 \\ f'' \end{bmatrix}$ は切断でないことがわかる. 仮定から $\begin{bmatrix} f' \\ f'' \end{bmatrix}$ は左極小概分裂であったので, 前半の証明よりこれは既約であり, $\begin{bmatrix} f_2 \\ f'' \end{bmatrix}$ は切断でないから, $\begin{bmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ は引き込みである. 従って f_1 が引き込みであることが得られ, 証明の全てが完成した. \square

次で概分裂完全列と呼ばれる, 特別な場合の完全列を定義する. これは有限次元多元環の表現論を研究する上で非常に有用であることが知られている.

定義 3.1.11. $\text{mod } A$ の短完全列

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

が次を満たすとき, これを**概分裂完全列** (almost split sequence) という:

- (1) f は左極小概分裂である;
- (2) g は右極小概分裂である.

概分裂完全列が存在するかどうかは非自明であるが, 概分裂完全列が存在するならば, 補題 3.1.3 から L, N は直既約で, f が分解でなく g が引き込みでないことから概分裂完全列は分裂しない. 従って L は移入的でなく, N は射影的でない. 更に, 概分裂完全列の左端 L または右端 N に対して, 同型を除いて一意に定まる. 実際, $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0, 0 \rightarrow L' \rightarrow M' \rightarrow N' \rightarrow 0$ がそれぞれ $\text{mod } A$ の概分裂完全列とすると, 命題 3.1.2 より $M \cong M'$ であるから, 次の同値条件を得る:

- (1) これらの概分裂完全列は同型である;
- (2) A -加群の同型 $L \cong L'$ が存在する;
- (3) A -加群の同型 $N \cong N'$ が存在する.

補題 3.1.12.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

を各行が非分裂完全列である $\text{mod } A$ の可換図式とする.

- (1) L が直既約で w が自己同型ならば, u, v も自己同型である;
- (2) N が直既約で u が自己同型ならば, w, v も自己同型である.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. $w = 1_N$ とする. $\text{End } L$ が局所多元環であるから, u が非同型ならば, $u \in \text{rad } \text{End } L$ より u は冪零である, すなわち, $u^m = 0$ となる m が存在する. 従って可換図式より $v^m f = f u^m = 0$ であるから, v^m は f の余核 N を通る, すなわち, $v^m = hg$ なる $h: N \rightarrow M$ が存在する. $w = 1_N$ より $ghg = gv^m = w^m g = g$ で, g の全射性から $gh = 1_N$ となるが, 完全列が非分裂であることに矛盾する. \square

定理 3.1.13. $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ を $\text{mod } A$ の完全列とする. このとき, 次は同値である:

- (1) この完全列は概分裂である;
- (2) L は直既約で, g は右概分裂である;
- (3) N は直既約で, f は左概分裂である;
- (4) f は左極小概分裂である;
- (5) g は右極小概分裂である;
- (6) L, N は直既約で, f, g は既約である.

証明. (1) を仮定する. すると概分裂完全列の定義から (4), (5) は成立し, 補題 3.1.3 から (2), (3) も成立する. 更に補題 3.1.3 と定理 3.1.10 から (6) も成立する.

次に, (5) を仮定して (2) を示す. 定理 3.1.10 から g は既約であるから, 系 3.1.8 から $L = \text{Ker } g$ は直既約である. 双対性から, (4) を仮定すると (3) も成立する.

続いて, (2) を仮定して (3) を示す. g が右概分裂より, 補題 3.1.3 から N は直既約である. また, g は引き込みでないから, f は切断でない. さて, $u: L \rightarrow U$ を全ての $u': M \rightarrow U$ に対して $u'f \neq u$ であるとする. u が切断であることを示そう. M と U の押し出し $V = M +_L U$ によって各行が完全列である可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow 1_N & & \\ 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{k} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を得る. 下の完全列が分裂するならば, $h'h = 1_U$ なる $h': V \rightarrow U$ が存在するが, このとき $u = h'vf$ となり条件に矛盾する. 従って下の完全列は非分裂であり, 従って k は引き込みでない. これと g が右概分裂より, $k = g\bar{v}$ なる $\bar{v}: V \rightarrow M$ が存在する. 故に各行が完全列である可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \bar{u}u & & \downarrow \bar{v}v & & \downarrow 1_N & & \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を得る. ここで, \bar{u} は核を通るように $\bar{v}, 1_N$ から誘導される準同型である. 補題 3.1.12 より $\bar{u}u$

は自己同型であり、従って u は切断である。同様にして (3) を仮定すると (2) も成立するため、(2) と (3) は同値である。

今、(2), (3) を仮定して、 f, g が極小であることを示す。 $h \in \text{End } M$ が $hf = f$ を満たすとする。すると各行が完全列である可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1_L & & \downarrow h & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

が得られ、補題 3.1.12 から h, w は自己同型である。従って、 f は左極小である。同様にして g も右極小である。

最後に、(6) を仮定して (2) を示す。仮定から、 L は直既約で、 g は引き込みでない。 $v : V \rightarrow N$ を引き込みでないとし、 V を直既約であるとする (そうでなければ、直既約因子を考えればよい)。 f が既約であるから、補題 3.1.7 より $v = gv'$ なる $v' : V \rightarrow M$ か、または $g = vh$ なる $h : M \rightarrow V$ が存在する。前者の場合は g が概分裂となり、証明が完了する。後者の場合、 g の既約性と v が引き込みでないことから、 h は切断である。 V が直既約であったから h は同型となり、 $h^{-1} = v'$ となる。以上により定理の証明が完成する。 \square

3.2 Auslander-Reiten 移動

この節と次の節で、有限次元 A -加群に対して $\text{mod } A$ の概分裂完全列が存在かどうかを見る。まず、 A -双対関手

$$(-)^t = \text{Hom}_A(-, A) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{\text{op}}$$

を考える。 P_A を射影右 A -加群とすると、 $P^t = \text{Hom}_A(P, A)$ は射影左 A -加群である。実際、原始冪等元 $e \in A$ を用いて直既約射影加群を $P_A \cong eA$ と表せば、 $P^t = \text{Hom}_A(eA, A) \cong Ae$ を得る。 $(-)^t$ の加法性から、一般の射影加群についても上の主張は成り立つ。更に、簡単な計算から $\varepsilon_M(z)(f) = f(z)$ ($z \in M, f \in M^t$) で定義される評価写像 $\varepsilon_M : M \rightarrow M^{tt}$ は M について関手的で、 M が射影的ならば関手的同型であることがわかる。従って、関手 $(-)^t$ は射影右 A -加群の圏 $\text{proj } A$ と射影左 A -加群の圏 $\text{proj } A^{\text{op}}$ の間に双対性を誘導する。

さて、 M の極小射影分解

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$$

をとる。すなわち、 $p_0 : P_0 \rightarrow M, p_1 : P_1 \rightarrow \text{Ker } p_0$ は射影被覆である。これに左完全反変関手 $(-)^t$ を施すと、左 A -加群の完全列

$$0 \rightarrow M^t \xrightarrow{p_0^t} P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \rightarrow \text{Coker } p_1^t \rightarrow 0$$

を得る。ここで、

$$\text{Tr } M = \text{Coker } p_1^t$$

とおき、これを M の転置 (transpose) という。左 A -加群 $\text{Tr } M$ は射影被覆及び極小射影分解の一意性から同型を除いて一意的に定まる。

$\text{Tr } M$ のいくつかの性質を示そう.

命題 3.2.1. $M \in \text{mod } A$ を直既約とする.

- (1) 左 A -加群 $\text{Tr } M$ は零でない射影直和因子を持たない;
- (2) M が射影的でないならば, M の極小射影分解 $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$ から誘導される列

$$P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \rightarrow \text{Tr } M \rightarrow 0$$

は $\text{Tr } M$ の極小射影分解である;

- (3) M が射影的であるための必要十分条件は $\text{Tr } M = 0$ となることである. M が射影的でないならば, $\text{Tr } M$ は直既約で, $\text{Tr}(\text{Tr } M) \cong M$ である;
- (4) M, N を射影的でない直既約加群とする. このとき, $M \cong N$ であるための必要十分条件は $\text{Tr } M \cong \text{Tr } N$ となることである.

証明. まず, (3) の第一文を証明する. M が射影的であるとする. $P_1 = 0$ より $\text{Tr } M = 0$ である. 逆に, $\text{Tr } M = 0$ とすると, p_1^t が全射で ${}_A(P_1^t)$ が射影的より, p_1^t は引き込みとなる. 従って p_1 は切断より M は射影的である.

次に, (1) 及び (2) を証明する. M を射影的でないとする. すると先の証明から $\text{Tr } M \neq 0$ である. よって $P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \rightarrow \text{Tr } M \rightarrow 0$ は $\text{Tr } M$ の射影分解にはなっている. 後は極小であることを示せばよい. そこで, 極小でないと仮定し, 非自明な直和分解 $P_0^t = E_0' \oplus E_0'', P_1^t = E_1' \oplus E_1''$ と同型 $v: E_0'' \rightarrow E_1''$ に対して, 上の完全列と次の完全列

$$E_0' \oplus E_0'' \xrightarrow{\begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}} E_1' \oplus E_1'' \rightarrow \text{Tr } M \rightarrow 0$$

が同型であるとする. ここで $u: E_0' \rightarrow E_1'$ は左加群の準同型である. しかし, これに $(-)^t$ を施すと

$$E_1'^t \xrightarrow{u^t} E_0'^t \rightarrow M \rightarrow 0$$

が得られ, M の射影分解の極小性に矛盾する. 更に, $\text{Tr } M$ が零でない射影直和因子を持つと仮定する. すると射影加群 ${}_A E$ に対して, p_1^t は準同型 ($0 \rightarrow E$) を直和因子を持つ. しかし, 同様に $(-)^t$ を施すことで, p_1 は準同型 ($E^t \rightarrow 0$) を持つことがわかり, やはり極小性に矛盾する. これで (1), (2) が証明された.

最後に, (3) の第二文と (4) を証明する. P_1, P_0 が射影的より, $P_0^t \xrightarrow{p_1^t} P_1^t \rightarrow \text{Tr } M \rightarrow 0$ に再び $(-)^t$ を施すと, 各行が完全列である可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ \varepsilon_{P_1} \downarrow \simeq & & \varepsilon_{P_0} \downarrow \simeq & & & & \\ P_1^{tt} & \xrightarrow{p_1^{tt}} & P_0^{tt} & \xrightarrow{p_0^{tt}} & \text{Tr } \text{Tr } M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を得る. これより $M \cong \text{Tr } \text{Tr } M$ は明らかである. (4) についても極小射影分解の一意性から同様の議論によって得られる. □

上で見たように、転置 Tr は $\text{mod } A$ から $\text{mod } A^{\text{op}}$ への対応である。しかし、射影 A -加群 P に対して $\text{Tr } P = 0$ より転置 Tr には双対性が定まらない。そこで、射影加群を無視するために次のような剰余圏を考える。

A -加群 M, N に対して、 $\text{Hom}_A(M, N)$ の部分集合 $\mathcal{P}(M, N)$ を射影 A -加群を通るような写像全体の集合、すなわち、射影 A -加群 P に対して

$$\mathcal{P}(M, N) = \{f \in \text{Hom}_A(M, N) \mid f = hg, g : M \rightarrow P, h : P \rightarrow N\}$$

と定義する。これにより、 $\text{mod } A$ のイデアル \mathcal{P} が定められることを証明しよう。まず、 $f, f' \in \mathcal{P}(M, N)$ とすると、それぞれ射影加群 P, P' を通るように $f = hg, f' = h'g'$ とかけると、

$$f + f' = hg + h'g' = \begin{bmatrix} h & h' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix}$$

は $P \oplus P'$ を通る。また、 $\lambda \in K, f \in \mathcal{P}(M, N)$ とすると、 $\lambda f \in \mathcal{P}(M, N)$ である。従って、 $\mathcal{P}(M, N)$ は $\text{Hom}_A(M, N)$ の部分空間となる。次に、 $f \in \mathcal{P}(L, M), g \in \text{Hom}_A(M, N)$ とすると、 $gf \in \mathcal{P}(L, N)$ である。同様に $f \in \text{Hom}_A(L, M), g \in \mathcal{P}(M, N)$ とすると、 $gf \in \mathcal{P}(L, N)$ である。以上により \mathcal{P} が $\text{mod } A$ のイデアルとなることが示される。

さて、これにより剰余圏

$$\underline{\text{mod}} A = \text{mod } A / \mathcal{P}$$

を考えることができる。この圏の対象は $\text{mod } A$ と同じであり、 $M, N \in \underline{\text{mod}} A$ に対して、 M から N への射の K -ベクトル空間 $\underline{\text{Hom}}_A(M, N)$ は $\text{Hom}_A(M, N)$ の商空間

$$\underline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N) / \mathcal{P}$$

で定められる。更に、射の合成は $\text{mod } A$ から誘導される。このように定められる剰余圏を**射影安定圏** (projectively stable category) と呼ぶ。明らかに、対象については恒等的であり、 $f : M \rightarrow N$ についてはこれを $\mathcal{P}(M, N)$ で割った剰余類に送るような関手 $\text{mod } A \rightarrow \underline{\text{mod}} A$ が存在する。

同様に、 A -加群 M, N に対して、 $\text{Hom}_A(M, N)$ の部分集合 $\mathcal{I}(M, N)$ を移入 A -加群を通るような写像全体の集合、すなわち、移入 A -加群 E に対して

$$\mathcal{I}(M, N) = \{f \in \text{Hom}_A(M, N) \mid f = hg, g : M \rightarrow E, h : E \rightarrow N\}$$

と定義すれば、 \mathcal{I} は $\text{mod } A$ のイデアルとなり、従って剰余圏

$$\overline{\text{mod}} A = \text{mod } A / \mathcal{I}$$

を考えることができる。この圏の対象は $\text{mod } A$ と同じであり、 $M, N \in \overline{\text{mod}} A$ に対して、 M から N への射の K -ベクトル空間 $\overline{\text{Hom}}_A(M, N)$ は $\text{Hom}_A(M, N)$ の商空間

$$\overline{\text{Hom}}_A(M, N) = \text{Hom}_A(M, N) / \mathcal{I}$$

で定められる。更に、射の合成は $\text{mod } A$ から誘導される。このように定められる剰余圏を**移入安定圏** (injectively stable category) と呼ぶ。明らかに関手 $\text{mod } A \rightarrow \overline{\text{mod}} A$ が存在する。

転置 Tr は $\text{mod } A$ 上では双対性を定めなかったが, 射影安定圏 $\underline{\text{mod}} A$ 上では双対性を定める.

命題 3.2.2. 対応 $M \mapsto \text{Tr } M$ によって双対関手 $\text{Tr} : \underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A^{\text{op}}$ が誘導される.

証明. $\overrightarrow{\text{proj}} A$ を次のような圏とする:

- 三つの組 (P_1, P_0, f) を対象とする. ここで P_1, P_0 は射影 A -加群で, $f : P_1 \rightarrow P_0$ は $\text{mod } A$ の準同型である;
- $(u_1, u_0) : (P_1, P_0, f) \rightarrow (P_1', P_0', f')$ を対象の間の射とする. ここで, $u_1 : P_1 \rightarrow P_1'$, $u_0 : P_0 \rightarrow P_0'$ は次の図式を可換にする $\text{mod } A$ の準同型である:

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_0 \\ \downarrow u_1 & & \downarrow u_0 \\ P_1' & \xrightarrow{f'} & P_0' \end{array};$$

- $\overrightarrow{\text{proj}} A$ の射 $(u_1, u_0) : (P_1, P_0, f) \rightarrow (P_1', P_0', f')$, $(u_1', u_0') : (P_1', P_0', f') \rightarrow (P_1'', P_0'', f'')$ の合成を $(u_1', u_0')(u_1, u_0) = (u_1' u_1, u_0' u_0)$ で定める.

双対関手を構成するために, まず $\underline{\text{mod}} A$ が $\overrightarrow{\text{proj}} A$ の剰余圏としてかけることを述べる.

$F : \overrightarrow{\text{proj}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A$ を $\overrightarrow{\text{proj}} A \ni (P_1, P_0, f) \mapsto \text{Coker } f \in \text{mod } A$ と自然な関手 $\text{mod } A \rightarrow \underline{\text{mod}} A$ の合成関手とする. $(u_1, u_0) : (P_1, P_0, f) \rightarrow (P_1', P_0', f')$ を $\overrightarrow{\text{proj}} A$ の射としたとき, $F(u_1, u_0) = 0$ であることと次の図式

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_0 \\ \downarrow u_1 & \swarrow w & \downarrow u_0 \\ P_1' & \xrightarrow{f'} & P_0' \end{array}$$

において $f' w f = u_0 f$ なる $w : P_0 \rightarrow P_1'$ が存在することが同値であることを示そう. 実際そのような w が存在すると仮定し, 次の各行が完全列である可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_0 & \xrightarrow{g} & M = \text{Coker } f & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u_1 & \swarrow w & \downarrow u_0 & & \downarrow u & & \\ P_1' & \xrightarrow{f'} & P_0' & \xrightarrow{g'} & M' = \text{Coker } f' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を考える. ここで u は u_1, u_0 から誘導される準同型である. 今, $(u_0 - f' w) f = 0$ より $u_0 - f' w = v g$ なる $v : M \rightarrow P_0'$ が存在する. このとき, $g' v g = g' u_0 = u g$ で, g が全射より $g' v = u$ である. 従って $u \in \mathcal{P}(M, M')$ となり $F(u_1, u_0) = 0$ を得る. 逆に, $F(u_1, u_0) = 0$ とする. すなわち, u_1, u_0 から誘導される $u : \text{Coker } f \rightarrow \text{Coker } f'$ は射影加群を通る. g' が全射より, $u = g' v$ なる $v : M \rightarrow P_0'$ が存在する. このとき, $g'(u_0 - v g) = g' u_0 - g' v g = g' u_0 - u g = 0$ であり, $f' w = u_0 - v g$ なる $w : P_0 \rightarrow P_1'$ が存在する. 従って $f' w f = u_0 f$ となり, 上の同値が得られる.

更に, $F(u_1, u_0) = 0$ なる $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ の射 (u_1, u_0) のクラス $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ は $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ のイデアルとなることが即座にわかる. 実際, $(u_1, u_0) : (P_1, P_0, f) \rightarrow (P_1', P_0', f')$ を $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ の射, $(v_1, v_0) : (P_1', P_0', f') \rightarrow (P_1'', P_0'', f'')$ を $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ の射とする. すると上の同値より $f'wf = u_0f$ なる $w : P_0 \rightarrow P_1'$ が存在する. このとき, $v_1w : P_0 \rightarrow P_1''$ について $f''(v_1w)f = (f''v_1)wf = (v_0f')wf = (v_0u_0)f$ が成立する. 従って再び上の同値を適用すれば, $F(v_1u_1, v_0u_0) = 0$ が得られ, (v_1u_1, v_0u_0) が $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ の射であることがわかる. 同様に $(w_1, w_0) : (Q_1, Q_0, g) \rightarrow (P_1, P_0, f)$ を $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ の射とすると, (u_1w_1, u_0w_0) が $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ の射であることも確認できる.

さて, $\underline{\text{mod}} A$ が $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A / \overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ と同型となることを示そう. $M \in \underline{\text{mod}} A$ とする. すると, M の極小射影分解 $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ を用いて $M = F(P_1, P_0, f)$ とかける. また, $M = F(P_1, P_0, f), M' = F(P_1', P_0', f')$ と $\underline{\text{mod}} A$ の射 $u : M \rightarrow M'$ に対して, 次の各行が極小射影分解である図式を可換にする $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ の射 $(u_1, u_0) : (P_1, P_0, f) \rightarrow (P_1', P_0', f')$ が存在する:

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u_1 & & \downarrow u_0 & & \downarrow u & & \\ P_1' & \xrightarrow{f'} & P_0' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

すなわち, $u = F(u_1, u_0)$ である. 更に, $u = 0$ であることと $F(u_1, u_0)$ であることが同値であり, これは (u_1, u_0) が $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ の射であることを意味している. これらより, 圏の完全列

$$0 \rightarrow \overrightarrow{\text{proj}}_1 A \rightarrow \overrightarrow{\text{proj}}_1 A \xrightarrow{F} \underline{\text{mod}} A \rightarrow 0$$

を得る. 従って $\underline{\text{mod}} A \cong \overrightarrow{\text{proj}}_1 A / \overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ である.

今, $M \mapsto \text{Tr } M$ によって双対関手 $\text{Tr} : \underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A^{\text{op}}$ が誘導されることを証明する. 双対関手 $(-)^t : \text{proj } A \xrightarrow{F} \text{proj } A^{\text{op}}$ は明らかに双対関手

$$\overrightarrow{\text{proj}}_1 A \ni (P_1, P_0, f) \mapsto (P_0^t, P_1^t, f^t) \in \overrightarrow{\text{proj}}_1 A^{\text{op}}$$

を誘導する. 更に, $(-)^t$ の $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ への制限によって双対関手 $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A \rightarrow \overrightarrow{\text{proj}}_1 A^{\text{op}}$ も誘導する. 実際, $(u_1, u_0) : (P_1, P_0, f) \rightarrow (P_1', P_0', f')$ を $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A$ の射とすると, $f'wf = u_0f$ なる $w : P_0 \rightarrow P_1'$ が存在し, これより $f^t w^t f'^t = f^t u_0^t = u_1^t f'^t$ を得る. 従って (u_0^t, u_1^t) は $\overrightarrow{\text{proj}}_1 A^{\text{op}}$ の射であることがわかる.

ここまでの議論から, 各行が圏の完全列で, 左側が可換であるような図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overrightarrow{\text{proj}}_1 A & \longrightarrow & \overrightarrow{\text{proj}}_1 A & \longrightarrow & \underline{\text{mod}} A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (-)^t & & \downarrow (-)^t & & \downarrow \text{Tr} \\ 0 & \longrightarrow & \overrightarrow{\text{proj}}_1 A^{\text{op}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\text{proj}}_1 A^{\text{op}} & \longrightarrow & \underline{\text{mod}} A^{\text{op}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

を得る. $\text{Tr} : \underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A^{\text{op}}$ を右側が可換にするような一意的な関手で定義しよう. すなわち, $M = F(P_1, P_0, f)$ に対して, $\text{Tr } M = F(P_0^t, P_1^t, f^t)$ で定め, また $M = F(P_1, P_0, f), M' = F(P_1', P_0', f')$ に対して $u : M \rightarrow M'$ を $\underline{\text{mod}} A$ の射とすると, 各行が完全

列である可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u_1 & & \downarrow u_0 & & \downarrow u & & \\ P_1' & \xrightarrow{f'} & P_0' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

が存在する. これに $(-)^t$ を施すことで, 各行が完全列で, 左側が可換であるような図式

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^t & \xrightarrow{f^t} & P_1^t & \longrightarrow & \text{Tr } M & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow u_0^t & & \uparrow u_1^t & & \uparrow & & \\ P_0'^t & \xrightarrow{f'^t} & P_1'^t & \longrightarrow & \text{Tr } M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

を得る. $\text{Tr } u : \text{Tr } M' \rightarrow \text{Tr } M$ を上の図式の右側を可換にするような一意的な準同型で定めれば, $\text{Tr} : \underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A^{\text{op}}$ は well-defined で, 双対性を与える. \square

上で定めた双対性 Tr を**転置** (transposition) と呼ぶ. 更に, $\text{mod } A$ の自己関手を定めたければ, K -双対 $D = \text{Hom}_K(-, K)$ を合成すればよい.

定義 3.2.3. K -双対 $D = \text{Hom}_K(-, K)$ と転置 Tr の合成

$$\tau = D \text{Tr} \quad \tau^{-1} = \text{Tr } D$$

を **AR-移動** (Auslander-Reiten translations) という.

次の命題で加群の AR-移動の構成法を述べる. まず, 中山関手

$$\nu = D(-)^t = D \text{Hom}_A(-, A) : \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A$$

(定義 2.2.8) を思い出そう. 命題 2.2.10 より, これは圏同値

$$\text{proj } A \xrightleftharpoons[\nu^{-1}]{\nu} \text{inj } A$$

を誘導する. ここで $\nu^{-1} = \text{Hom}_A(DA, -)$ は擬逆関手である.

命題 3.2.4. (1) $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$ を A -加群 M の極小射影分解とする. このとき, 完全列

$$0 \rightarrow \tau M \rightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \rightarrow 0$$

が存在する;

(2) $0 \rightarrow N \xrightarrow{i_0} E_0 \xrightarrow{i_1} E_1$ を A -加群 N の極小移入分解とする. このとき, 完全列

$$0 \rightarrow \nu^{-1} N \xrightarrow{\nu^{-1} i_0} \nu^{-1} E_0 \xrightarrow{\nu^{-1} i_1} \nu^{-1} E_1 \rightarrow \tau^{-1} N \rightarrow 0$$

が存在する.

証明. (1) 与えられた M の極小射影分解に $(-)^t$ と D を施すことで, 求めたい完全列が得られる.

(2) 与えられた N の極小移入分解に D と $(-)^t$ を施すことで, 完全列

$$0 \rightarrow (DN)^t \xrightarrow{(Di_0)^t} (DE_0)^t \xrightarrow{(Di_1)^t} (DE_1)^t \rightarrow \text{Tr } DN = \tau^{-1}N \rightarrow 0$$

を得る. また, 任意の A -加群 X に対して,

$$(DX)^t \cong \text{Hom}_{A^{\text{op}}}(DX, A) \cong \text{Hom}_A(DA, DD X) \cong \text{Hom}_A(DA, X) \cong \nu^{-1}X$$

より, 各行が完全列であるような可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (DN)^t & \xrightarrow{(Di_0)^t} & (DE_0)^t & \xrightarrow{(Di_1)^t} & (DE_1)^t \longrightarrow \tau^{-1}N \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & \nu^{-1}N & \xrightarrow{\nu^{-1}i_0} & \nu^{-1}E_0 & \xrightarrow{\nu^{-1}i_1} & \nu^{-1}E_1 \end{array}$$

を得る. 故に (2) が従う.

□

例 3.2.5. A をクロネッカークイバー

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \circ & \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} & \circ \end{array}$$

とし, M_A を

$$K \xrightleftharpoons[0]{1} K$$

とする. このとき, M は直既約である. 実際, $f \in \text{End } M$ とすると, f は組 (a_1, a_2) で与えられ, 可換性から $a_1 \cdot 1 = 1 \cdot a_2$ と $a_1 \cdot 0 = 0 \cdot a_2$ を満たす. これらより, $f = a \cdot 1_M$ とかける. ここで, $a = a_1 = a_2 \in K$ である. 従って, $\text{End } M_A \cong K$ より確かに M は直既約となっている. M の極小射影分解は

$$0 \rightarrow P(1) \xrightarrow{p_1} P(2) \xrightarrow{p_2} M_A \rightarrow 0$$

で与えられる. ここで,

$$P(1) = S(1) = (K \xrightleftharpoons{\quad} 0), \quad P(2) = (K^2 \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}} K)$$

は直既約射影 A -加群で, $p_1 : P(1) \hookrightarrow P(2)$ は $\begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} \xleftarrow{\quad} 0$ への埋め込み, p_2 は p_1 の余核への準同型である. 特に, M は射影的でないことに注意しておく. 命題 3.2.4(1) より, 中山関手 ν をこの完全列に施すことで, 完全列

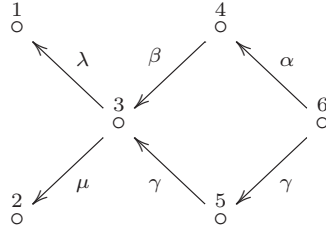
$$0 \rightarrow \tau M \rightarrow I(1) \xrightarrow{\nu p_1} I(2) \rightarrow 0$$

を得る. ここで,

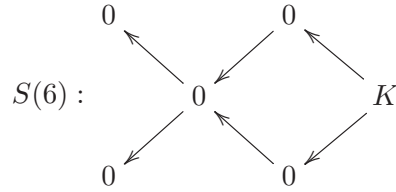
$$I(1) = (K \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}} K^2), \quad I(2) = S(2) = (0 \xrightleftharpoons{\quad} K)$$

は直既約移入 A -加群である．また， νp_1 は $0 \xleftarrow{\quad} \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}$ への全射である． $I(2) = S(2)$ が単純加群で， $\nu p_1 \neq 0$ より νp_1 が全射であることに注意する．従って， $\tau M = \text{Ker } \nu p_1$ は $K \xleftarrow[0]{1} K$ で与えられ， $\tau M \cong M$ を得る．

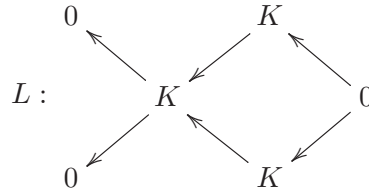
例 3.2.6. A がクイバー



で与えられるとし，関係 $\alpha\beta = \gamma\delta, \gamma\mu = 0, \beta\lambda = 0$ を入れる．単純移入加群



に対して，これの射影被覆は $P(6)$ からの自然な全射であり，その核 L は直既約加群



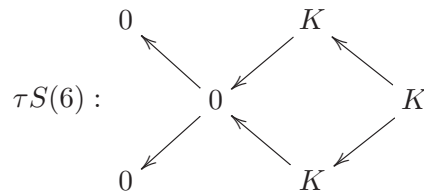
で与えられる． $\text{top } L \cong S(4) \oplus S(5)$ であり，従って L の射影被覆は $P(4) \oplus P(5)$ からの全射で与えられるから， $S(6)$ の極小射影分解

$$P(4) \oplus P(5) \xrightarrow{p_1} P(6) \xrightarrow{p_2} S(6) \rightarrow 0$$

を得る．命題 3.2.4(1) より，中山関手 ν を施すことで，完全列

$$0 \rightarrow \tau S(6) \rightarrow I(4) \oplus I(5) \xrightarrow{\nu p_1} I(6) \rightarrow 0$$

が得られる． $I(6) = S(6)$ が単純加群で， $\nu p_1 \neq 0$ より νp_1 が全射であることに注意しておく．従って，



が得られるが， $\tau S(6) \not\cong S(6)$ である．

補題 3.2.7. $M \in \text{mod } A$ とする．

- (1) $\text{pd}_A M \leq 1$ であるための必要十分条件は $\text{Hom}_A(DA, \tau M) = 0$ であることである;
(2) $\text{id}_A M \leq 1$ であるための必要十分条件は $\text{Hom}_A(\tau^{-1} M, A) = 0$ であることである.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. 完全列

$$0 \rightarrow \tau M \rightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \rightarrow 0$$

に $\nu^{-1} = \text{Hom}_A(DA, -)$ を施すことで, 各行が完全列である可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \nu^{-1} \tau M & \longrightarrow & \nu^{-1} \nu P_1 & \longrightarrow & \nu^{-1} \nu P_0 \\ & & & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } p_1 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0 \end{array}$$

を得る. 従って $\text{Hom}_A(DA, \tau M) = \nu^{-1} \tau M \cong \text{Ker } p_1$ より補題の主張が得られる. \square

この結果により, 大域次元が有限な任意の多元環 A のコクセター変換に関する AR-移動の次元ベクトルの式を得られる.

補題 3.2.8. (1) M を $\text{mod } A$ の射影的でない直既約加群とし, $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$ を M の極小射影分解とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\dim \tau M = \Phi_A(\dim M) - \Phi_A(\dim \text{Ker } p_1) + \dim \nu M$$

- (2) N を $\text{mod } A$ の移入的でない直既約加群とし, $0 \rightarrow N \xrightarrow{i_0} E_0 \xrightarrow{i_1} E_1$ を N の極小移入分解とする. このとき, 次が成り立つ:

$$\dim \tau^{-1} N = \Phi_A^{-1}(\dim N) - \Phi_A^{-1}(\dim \text{Coker } i_1) + \dim \nu^{-1} N$$

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. 完全列 $0 \rightarrow \text{Ker } p_1 \rightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \rightarrow 0$ より,

$$\dim M - \dim \text{Ker } p_1 = -\dim P_1 + \dim P_0$$

が成り立つ. これにコクセター変換 Φ_A と補題 2.3.16(1) を施すことで,

$$\Phi_A(\dim M) - \Phi_A(\dim \text{Ker } p_1) = \dim \nu P_1 - \dim \nu P_0$$

を得る. 一方で, τM の移入分解 $0 \rightarrow \tau M \rightarrow \nu P_1 \rightarrow \nu P_0 \rightarrow \nu M \rightarrow 0$ より,

$$\dim \nu M - \dim \tau M = -\dim \nu P_1 + \dim \nu P_0$$

が成り立つ. これを整理して上の式を代入することで求めたい式を得る. \square

系 3.2.9. (1) M を $\text{mod } A$ の直既約加群で, $\text{pd}_A M \leq 1$ と $\text{Hom}_A(M, A) = 0$ を満たすものとする. このとき, $\dim \tau M = \Phi_A(\dim M)$ である;

- (2) N を $\text{mod } A$ の直既約加群で, $\text{id}_A N \leq 1$ と $\text{Hom}_A(DA, N) = 0$ を満たすものとする. このとき, $\dim \tau^{-1} N = \Phi_A^{-1}(\dim N)$ である.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. 仮定から M は射影的でなく, $\nu M = D \operatorname{Hom}_A(M, A) = 0$ である. また, $\operatorname{pd}_A M \leq 1$ より $\operatorname{Ker} p_1 = 0$ である. 従って上の補題から求めたい式を得る. \square

AR-移動に関する基本的な性質を次の命題にまとめる. 証明は τ, τ^{-1} が転置 Tr と K -双対 D の合成であることから明らかである.

命題 3.2.10. M, N を $\operatorname{mod} A$ の直既約加群とする.

- (1) $\tau M = 0$ であるための必要十分条件は M が射影的であることである;
- (2) $\tau^{-1} N = 0$ であるための必要十分条件は N が移入的であることである;
- (3) M が射影的でないならば, τM は移入的でない直既約加群で, $\tau^{-1} \tau M \cong M$ である;
- (4) N が移入的でないならば, $\tau^{-1} N$ は射影的でない直既約加群で, $\tau \tau^{-1} N \cong N$ である;
- (5) M, N が共に射影的でないならば, $M \cong N$ であることと $\tau M \cong \tau N$ であることは同値である;
- (6) M, N が共に移入的でないならば, $M \cong N$ であることと $\tau^{-1} M \cong \tau^{-1} N$ であることは同値である.

系 3.2.11. AR-移動 τ, τ^{-1} は互いに圏同値 $\underline{\operatorname{mod}} A \xrightleftharpoons[\tau^{-1}]{\tau} \overline{\operatorname{mod}} A$ を誘導する.

証明. 命題 3.2.2 と命題 3.2.10 より明らか. \square

さて, 任意の A -加群 X, Y に対して,

$$\begin{aligned} \varphi_Y^X : \quad Y \otimes_A X^t &\longrightarrow \operatorname{Hom}_A(X, Y) \\ y \otimes f &\longmapsto (x \mapsto yf(x)) \end{aligned}$$

で定められる関手的準同型

$$\varphi^X : (-) \otimes_A X^t \rightarrow \operatorname{Hom}_A(X, -)$$

を考える. ここで, $x \in X, y \in Y, f \in X^t$ である. X が射影的ならば, φ^X は関手的同型であり, Y が射影的ならば, φ_Y^X は同型であることが容易に確認できる. φ_Y^X の余核が $\underline{\operatorname{Hom}}_A(X, Y)$ となることを次で証明する.

補題 3.2.12. 任意の A -加群 X, Y に対して, 各変数について関手的である準同型の完全列

$$Y \otimes_A X^t \xrightarrow{\varphi_Y^X} \operatorname{Hom}_A(X, Y) \rightarrow \underline{\operatorname{Hom}}_A(X, Y) \rightarrow 0$$

が存在する.

証明. 任意の A -加群 Y と射影加群 P に対して, $f : P \rightarrow Y$ を全射とする. 任意の A -加群 X に対して, 完全列

$$\operatorname{Hom}_A(X, P) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(X, f)} \operatorname{Hom}_A(X, Y) \rightarrow \underline{\operatorname{Hom}}_A(X, Y) \rightarrow 0$$

が存在することを示そう。すなわち, $\text{Im Hom}_A(X, f) = \mathcal{P}(X, Y)$ であることを示せばよい。実際, $\alpha \in \text{Im Hom}_A(X, f)$, $\beta \in \text{Hom}_A(X, P)$ とすると, $\alpha = f\beta$ より明らかに $\text{Im Hom}_A(X, f) \subseteq \mathcal{P}(X, Y)$ である。逆に, $g \in \mathcal{P}(X, Y)$ とすると, 定義から射影加群 P'_A と $g_2 : X \rightarrow P'$, $g_1 : P' \rightarrow Y$ が存在して, $g = g_1 g_2$ とかける。 f が全射で, P' が射影的より $g_1 = fh$ なる $h : P' \rightarrow P$ が存在する。これより, $g = g_1 g_2 = fhg_2 = \text{Hom}_A(X, f)(hg_2) \in \text{Im Hom}_A(X, f)$ となり完全列の存在性が証明された。

$\varphi_P^X : P \otimes_A X^t \rightarrow \text{Hom}_A(X, P)$ は同型で, φ^X は関手的であったから, 各行が完全列である可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} P \otimes_A X^t & \xrightarrow{f \otimes X^t} & Y \otimes_A X^t & \longrightarrow & 0 \\ \varphi_P^X \downarrow \simeq & & \varphi_Y^X \downarrow & & \\ \text{Hom}_A(X, P) & \xrightarrow{\text{Hom}_A(X, f)} & \text{Hom}_A(X, Y) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_A(X, Y) \longrightarrow 0 \end{array}$$

を得る。従って,

$$\begin{aligned} \text{Im } \varphi_Y^X &= \varphi_Y^X(f \otimes X^t)(P \otimes X^t) \\ &= \text{Hom}_A(X, f)\varphi_P^X(P \otimes X^t) \\ &\cong \text{Im Hom}_A(X, f) = \mathcal{P}(X, Y) \end{aligned}$$

より $\text{Coker } \varphi_Y^X \cong \underline{\text{Hom}}_A(X, Y)$ となり, 補題の証明が完成する。 \square

定理 3.2.13. (Auslander-Reiten formula) A を K -多元環とし, M, N を $\text{mod } A$ の A -加群とする。このとき, 同型

$$\text{Ext}_A^1(M, N) \cong D\underline{\text{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M) \cong D\overline{\text{Hom}}_A(N, \tau M)$$

が存在する。

証明. 二つ目の同型は同様に示されるため一つ目の同型のみ証明する。 N が移入的ならば, $\text{Ext}_A^1(M, N) = D\underline{\text{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M) = 0$ より, N が移入的な直和因子を持たないとして示せば十分である。命題 3.2.10 より, $L = \tau^{-1}N$ を用いて $N = \tau L$ とかける。 $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} L \rightarrow 0$ を L の極小射影分解とする。 $\nu = D(-)^t$ を施すことで, 完全列

$$0 \rightarrow \tau L \rightarrow DP_1^t \xrightarrow{Dp_1^t} DP_0^t \xrightarrow{Dp_0^t} DL^t \rightarrow 0$$

を得る。 DP_1^t, DP_0^t は移入加群である。更に $\text{Hom}_A(M, -)$ を施せば, 鎖複体

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, \tau L) \rightarrow \text{Hom}_A(M, DP_1^t) \xrightarrow{\bar{p}_1} \text{Hom}_A(M, DP_0^t) \xrightarrow{\bar{p}_0} \text{Hom}_A(M, DL^t)$$

が得られる。ここで, $\bar{p}_1 = \text{Hom}_A(M, Dp_1^t), \bar{p}_0 = \text{Hom}_A(M, Dp_0^t)$ とおいた。これより,

$$\text{Ext}_A^1(M, N) = \text{Ext}_A^1(M, \tau L) = \text{Ker } \bar{p}_0 / \text{Im } \bar{p}_1$$

を得る。

一方で, L の極小射影分解に右完全関手 $D \operatorname{Hom}_A(-, M)$ を施すことで, 完全列

$$D \operatorname{Hom}_A(P_1, M) \xrightarrow{\tilde{p}_1} D \operatorname{Hom}_A(P_0, M) \xrightarrow{\tilde{p}_0} D \operatorname{Hom}_A(L, M) \rightarrow 0$$

を得る. ここで, $\tilde{p}_1 = D \operatorname{Hom}_A(p_1, M)$, $\tilde{p}_0 = D \operatorname{Hom}_A(p_0, M)$ とおいた. 今, 双対 $D\varphi^X : D \operatorname{Hom}_A(X, -) \rightarrow D((-) \otimes_A X^t)$ と随伴 $\eta : D((-) \otimes_A X^t) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(-, DX^t)$ の合成

$$\omega^X = \eta^X D\varphi^X : D \operatorname{Hom}_A(X, -) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(-, DX^t)$$

を考える. これは X が射影的ならば同型である. これより, 下の行が完全列である可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Hom}_A(M, DP_1^t) & \xrightarrow{\bar{p}_1} & \operatorname{Hom}_A(M, DP_0^t) & \xrightarrow{\bar{p}_0} & \operatorname{Hom}_A(M, DL^t) \\ \omega_M^{P_1} \uparrow \simeq & & \omega_M^{P_0} \uparrow \simeq & & \omega_M^L \uparrow \\ D \operatorname{Hom}_A(P_1, M) & \xrightarrow{\tilde{p}_1} & D \operatorname{Hom}_A(P_0, M) & \xrightarrow{\tilde{p}_0} & D \operatorname{Hom}_A(L, M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

が得られ, A -加群準同型 $\tilde{p}_0(\omega_M^{P_0})^{-1}$ から準同型 $\psi : \operatorname{Ker} \bar{p}_0 \rightarrow \operatorname{Ker} \omega_M^L$ が誘導される. \tilde{p}_0 が全射で, $\omega_M^{P_0}$ が同型より, ψ も全射であり, $\operatorname{Ker} \tilde{p}_0 = \operatorname{Im} \tilde{p}_1$ と $\omega_M^{P_1}, \omega_M^{P_0}$ が同型より $\operatorname{Ker} \psi \cong \operatorname{Im} \tilde{p}_1$ である. 以上の議論から,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \bar{p}_0 / \operatorname{Im} \tilde{p}_1 &\cong \operatorname{Ker} \bar{p}_0 / \operatorname{Ker} \psi \cong \operatorname{Ker} \omega_M^L \\ &= \operatorname{Ker} D\varphi_M^L \cong D \operatorname{Coker} \varphi_M^L \end{aligned}$$

となり, 補題 3.2.12 より, $\operatorname{Ext}_A^1(M, N) \cong D \operatorname{Coker} \varphi_M^L \cong \underline{\operatorname{Hom}}_A(L, M) = \underline{\operatorname{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M)$ を得る. \square

系 3.2.14. A を K -多元環, $M, N \in \operatorname{mod} A$ とする.

(1) $\operatorname{pd} M \leq 1$ なる M と任意の N に対して, 同型

$$\operatorname{Ext}_A^1(M, N) \cong D \operatorname{Hom}_A(N, \tau M)$$

が存在する;

(2) $\operatorname{id} N \leq 1$ なる N と任意の M に対して, 同型

$$\operatorname{Ext}_A^1(M, N) \cong D \operatorname{Hom}_A(\tau^{-1}, M)$$

が存在する.

証明. 定理 3.2.13 より, $\operatorname{Ext}_A^1(M, N) \cong D \overline{\operatorname{Hom}}_A(N, \tau M)$ である. 今, $\operatorname{pd} M \leq 1$ なので補題 3.2.7 より, $\operatorname{Hom}_A(DA, \tau M) = 0$ である. 任意の $\operatorname{mod} A$ の移入加群は $(DA)^s$ ($s \geq 1$) の直和因子であったから, $\mathcal{I}(N, \tau M) = 0$ となる. 従って, $\overline{\operatorname{Hom}}_A(N, \tau M) = \operatorname{Hom}_A(N, \tau M)$ より (1) の証明が完成する. (2) も同様に示される. \square

系 3.2.15. A を K -多元環, $M, N \in \operatorname{mod} A$ とする.

(1) $\text{pd } M \leq 1, \text{id } N \leq 1$ ならば, 同型

$$\text{Hom}_A(N, \tau M) \cong \text{Hom}_A(\tau^{-1}N, M)$$

が存在する;

(2) $\text{pd } M \leq 1, \text{id } \tau N \leq 1$ で, N が射影的でない直既約加群ならば, 同型

$$\text{Hom}_A(\tau N, \tau M) \cong \text{Hom}_A(N, M)$$

が存在する;

(3) $\text{pd } \tau^{-1}M \leq 1, \text{id } N \leq 1$ で, M が移入的でない直既約加群ならば, 同型

$$\text{Hom}_A(\tau^{-1}N, \tau^{-1}M) \cong \text{Hom}_A(N, M)$$

が存在する.

証明. (1) は系 3.2.14 から従い, (2), (3) は (1) と命題 3.2.10 から従う. □

3.3 概分裂完全列の存在性

前節で得た結果を用いることで, 概分裂完全列の存在性を導くことができる. これまでと同様にこの節では A を有限次元 K -多元環とし, rad_A を $\text{mod } A$ の根基とする.

定理 3.3.1. (1) 射影的でない有限生成直既約 A -加群 M_A に対して, $\text{mod } A$ の概分裂完全列

$$0 \rightarrow \tau M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$$

が存在する;

(2) 移入的でない有限生成直既約 A -加群 N_A に対して, $\text{mod } A$ の概分裂完全列

$$0 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow \tau^{-1}N \rightarrow 0$$

が存在する.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. M を射影的でない有限生成直既約 A -加群とする. 定理 3.2.13 より, 任意の直既約加群 L に対して, 各変数について関手的な同型

$$D\text{Hom}_A(L, M) \cong \text{Ext}_A^1(M, \tau L)$$

が存在する. $S(L, M) = \text{Hom}_A(L, M) / \text{rad}_A(L, M)$ とする. 今, $\mathcal{P}(L, M) \subseteq \text{rad}_A(L, M)$ である. 実際, $L \not\cong M$ ならば $\text{rad}_A(L, M) = \text{Hom}_A(L, M)$ であり, $L \cong M$ ならば, $\mathcal{P}(M, M)$ はイデアルで $\text{rad End } M$ は $\text{End } M$ が局所的より唯一の極大イデアルとなり, 確かに $\mathcal{P}(L, M) \subseteq \text{rad}_A(L, M)$ である. これより, 自然な全射 $p_{L,M} : \text{Hom}_A(L, M) \rightarrow S(L, M)$ と自然な単射 $Dp_{L,M} : DS(L, M) \rightarrow D\text{Hom}_A(L, M)$ を得る.

M が直既約より, $\text{End } M, \underline{\text{End}} M$ は局所的である. また,

$$p_{M,M} : \underline{\text{End}} M \rightarrow S(M, M) = \text{End } M / \text{rad End } M$$

が全射より $0 \rightarrow \text{rad } \underline{\text{End}} M \rightarrow \underline{\text{End}} M \rightarrow S(M, M) \rightarrow 0$ は完全で、従って $S(M, M) \cong \text{top } \underline{\text{End}} M$ である。更に、これの $Dp_{M, M}$ による像 $Dp_{M, M}(DS(M, M))$ は $D\underline{\text{Hom}}_A(M, M)$ の単純な半単純成分と同型になる。さて、 $\xi' \in DS(M, M)$ を零でない元とし、 $\xi \in \text{Ext}_A^1(M, \tau M) \cong D\underline{\text{Hom}}_A(M, M)$ をその像とする。 $\text{Ext}_A^1(M, \tau M)$ の定義から ξ を短完全列

$$0 \rightarrow \tau M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$$

で表示したときに、これが概分裂完全列であることを示そう。まず、 $\xi \neq 0$ より、この完全列は分裂しない。また、 M は射影的でない直既約加群であったから、命題 3.2.10 より τM も直既約である。従って定理 3.1.13 より、 g が右概分裂であることを示せば十分である。 ξ は零でない $\text{Ext}_A^1(M, \tau M)$ の元より、 g は引き込みでないことがわかる。 V を直既約加群とし、 $v: V \rightarrow M$ を引き込みでない準同型とする。すると明らかに v は同型でなく、これにより可換図式

$$\begin{array}{ccccc} DS(M, M) & \xrightarrow{Dp_{M, M}} & D\underline{\text{Hom}}_A(M, M) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}_A^1(M, \tau M) \\ \downarrow DS(M, v) & & \downarrow D\underline{\text{Hom}}_A(M, v) & & \downarrow \text{Ext}_A^1(v, \tau M) \\ DS(M, V) & \xrightarrow{Dp_{M, V}} & D\underline{\text{Hom}}_A(M, V) & \xrightarrow{\cong} & \text{Ext}_A^1(V, \tau M) \end{array}$$

を得る。仮定から $v \in \text{rad}_A(V, M)$ より、 $DS(M, v)(\xi') = 0$ である。従って可換性から、 $\text{Ext}_A^1(v, \tau M)(\xi) = 0$ となる。すなわち、各行が完全列で更に上の列は分裂するような可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ext}_A^1(v, \tau M)(\xi) : & 0 & \longrightarrow & \tau M & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} V \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow 1_{\tau M} & & \downarrow w & \downarrow v \\ \xi : & 0 & \longrightarrow & \tau M & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \end{array}$$

が存在する。 $g'' : V \rightarrow E'$ を $g'g'' = 1_V$ なる射としよう。すると $v' = wg''$ は $gv' = gwg'' = vg'g'' = v$ を満足する。従って g は右概分裂となり、定理の主張が得られる。 \square

次の系は概分裂完全列の例である。

- 系 3.3.2.** (1) $0 \rightarrow \tau M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ が $\text{mod } A$ の概分裂完全列ならば、これは $\text{End } M$ - $\text{End } M$ -両側加群 $\text{Ext}_A^1(M, \tau M) \cong D\underline{\text{Hom}}_A(M, M)$ の単純な半単純成分の零でない元 ξ の表現である；
- (2) $M \in \text{mod } A$ を射影的でない直既約加群とする。 $\underline{\text{End}} M$ が斜体であるための必要十分条件は $\overline{\text{End}} \tau M$ が斜体となることである。さらにこのとき、任意の非分裂完全列 $0 \rightarrow \tau M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ は概分裂完全列で、 $\underline{\text{End}} M \cong K$ である；
- (3) $N \in \text{mod } A$ を移入的でない直既約加群とする。 $\overline{\text{End}} N$ が斜体であるための必要十分条件は $\underline{\text{End}} \tau^{-1} M$ が斜体となることである。さらにこのとき、任意の非分裂完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow \tau^{-1} N \rightarrow 0$ は概分裂完全列で、 $\overline{\text{End}} N \cong K$ である。

証明. (1) は定理 3.3.1 の証明から従う。(3) は (2) と同様に示されるため (2) のみ証明する。最初の必要十分条件は系 3.2.11 から従う。今、 $\underline{\text{End}} M$ を斜体と仮定する。 $\dim_K \underline{\text{End}} M$ が有限

であることと K が代数的閉体であることから, $\text{End } M \cong K$ であり, $\text{Ext}_A^1(M, \tau M)$ は 1 次元 K -ベクトル空間である. 従って, 定理 3.3.1 の証明から任意の非分裂拡大 $0 \rightarrow \tau M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ は $\text{Ext}_A^1(M, \tau M)$ の半単純成分の元の表現となり, 故に概分裂完全列である. \square

例 3.3.3. A をクロネッカークイバー

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} & 2 \\ \circ & & \circ \end{array}$$

とし, M を表現

$$K \xrightleftharpoons[0]{1} K$$

とする. 例 3.2.5 で見たように, $\text{End } M \cong K, \tau M \cong M$ である. よって系 3.3.2 より, 任意の非分裂拡大 $0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ は概分裂完全列である. E を表現

$$K^2 \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}} K^2$$

とする. E の部分表現

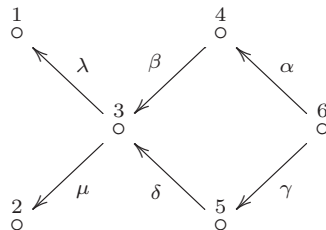
$$E' : \begin{array}{c} 0 \\ K \end{array} \xrightleftharpoons{\quad} \begin{array}{c} 0 \\ K \end{array}$$

について, 明らかに $E' \cong M$ であり, 更に $E/E' \cong M$ である. 従って, 短完全列 $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E/E' \rightarrow 0$ を得る. これが概分裂完全列であることを示そう. そのためにはこれが非分裂, つまり E が直既約であることを示せばよい. 今, 任意の E の自己準同型を考える. すなわち, $f \in \text{End } E$ は行列の組 $(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix})$ で,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

を満たすとする. これらを計算すると, $a = a' = d = d', \quad b = b' = 0, \quad c = c'$ を得る. 従って, $a \in K$ と冪零な自己準同型 $g \in \text{End } E$ を用いて $f = a \cdot 1_E + g$ とかける. 今, $I = \{f \in \text{End } E \mid a = 0\}$ とおく. すると, I は $\text{End } E$ の冪零なイデアルとなる. 更に, $(\text{End } E)/I \cong K$ より, I は $\text{End } E$ の極大イデアルとなる. 従って $I = \text{rad } \text{End } E$ であり, $\text{End } E$ が局所多元環であることがわかる. 故に E は直既約である.

例 3.3.4. A がクイバー



で与えられるとし, 関係 $\alpha\beta = \gamma\delta, \gamma\mu = 0, \beta\lambda = 0$ を入れる. 例 3.2.6 で見たように, 短完全列 $0 \rightarrow \tau S(6) \rightarrow I(4) \oplus I(5) \xrightarrow{\nu p_1} I(6) \rightarrow 0$ が存在する. 明らかに $\text{End } \tau S(6) \cong K$ より

$\overline{\text{End}} \tau S(6) \cong K$ である. 更に, 定理 0.0.12 よりこの完全列は分裂せず, 従って系 3.3.2(2) よりこれは概分裂完全列となる.

定理 3.3.1 は, 任意の射影的でない (移入的でない) 直既約加群について, それで終わる (それから始まる) 右 (左) 極小概分裂写像が存在することを保障している. 次の命題では直既約射影加群 (移入加群) についても同様にそれで終わる (それから始まる) 右 (左) 極小概分裂写像が存在することを示す.

命題 3.3.5. (1) $P \in \text{mod } A$ を直既約射影加群とする. A -加群準同型 $g : M \rightarrow P$ が右極小概分裂であるための必要十分条件は, g が単射かつ $\text{Im } g = \text{rad } P$ となることである;
(2) $I \in \text{mod } A$ を直既約移入加群とする. A -加群準同型 $f : I \rightarrow M$ が左極小概分裂であるための必要十分条件は, f が全射かつ $\text{Ker } f = \text{soc } I$ となることである.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. 命題 3.1.2 より, 包含写像 $g : \text{rad } P \hookrightarrow P$ が右極小概分裂であることを示せば十分である. まず, g が単射より g は右極小である: 実際, 単射準同型 $g' : M \rightarrow N$ と $k \in \text{End } M$ に対して, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \downarrow k & \searrow g' & \\ M & \xrightarrow{g'} & N \end{array}$$

を考える. $a \in M$ について, $g'(a) = g'(k(a))$ であるが, g' が単射より $a = k(a)$ である. 従って, k は自己同型となり確かに右極小である. 更に, 明らかに g は引き込みでない. $v : V \rightarrow P$ を引き込みでない準同型とする. P が射影的より, $\text{rad } P$ は P の唯一の極大部分加群である. また, v の終域が射影的なので, v は全射でないことがわかる. 従って $v(V) \subseteq \text{rad } P$ となり, 命題の証明が完成する. \square

系 3.3.6. $X \in \text{mod } A$ を直既約加群とする.

- (1) 右極小概分裂写像 $g : M \rightarrow X$ が存在する. 更に, $M = 0$ であることと X が単純射影加群であることは同値である;
- (2) 左極小概分裂写像 $f : X \rightarrow M$ が存在する. 更に, $M = 0$ であることと X が単純移入加群であることは同値である.

証明. 定理 3.3.1 と命題 3.3.5 から即座に従う. \square

例 3.3.7. A がクイバー

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 2 \\ & \circ & \circ \\ & \longleftarrow & \end{array}$$

で与えられるとする. $\text{mod } A$ の短完全列 $0 \rightarrow S(1) \xrightarrow{f} P(2) \xrightarrow{g} S(2) \rightarrow 0$ を考える. ここで, f は $S(1)$ から $\text{rad } P(2)$ への埋め込みで, g は $P(2)$ から $\text{top } P(2)$ への自然な全射である. $P(2) = I(1)$ より, 命題 3.3.5 から f が右極小概分裂, g が左極小概分裂であることがわかる. 一方で, 後に示す事実から, この短完全列は概分裂完全列となることもわかる. 従って, f は左

極小概分裂, g は右極小概分裂にもなっている.

- 命題 3.3.8.** (1) $M \in \text{mod } A$ を射影的でない直既約加群とする. 既約写像 $f : X \rightarrow M$ が存在することと既約写像 $f' : \tau M \rightarrow X$ が存在することは同値である;
- (2) $N \in \text{mod } A$ を移入的でない直既約加群とする. 既約写像 $g : N \rightarrow Y$ が存在することと既約写像 $g' : Y \rightarrow \tau^{-1}N$ が存在することは同値である.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. $f : X \rightarrow M$ を既約写像とする. 定理 3.1.10 より, $[f \ h] : X \oplus Y \rightarrow M$ が右極小概分裂となるような $h : Y \rightarrow M$ が存在する. 更に M が射影的でないことから, 定理 3.3.1 より概分裂完全列 $0 \rightarrow \tau M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ が存在する. これらと命題 3.1.2 より, $[f \ h]$ が全射であることがわかる. 従って, 系 3.1.8 より, $L = \text{Ker}[f \ h]$ は直既約で, 定理 3.1.13 より, 短完全列

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{\begin{bmatrix} f' \\ h' \end{bmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{[f \ h]} M \rightarrow 0$$

は概分裂完全列である. 故に同型 $g : \tau M \rightarrow L$ と既約写像 $f'g : \tau M \rightarrow X$ が存在する. 逆も同様に示される. \square

- 系 3.3.9.** (1) $S \in \text{mod } A$ を移入的でない単純射影加群とする. $f : S \rightarrow M$ が既約ならば, M は射影加群である;
- (2) $S \in \text{mod } A$ を射影的でない単純移入加群とする. $g : M \rightarrow S$ が既約ならば, M は移入加群である.

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. M を直既約とする. M が射影的でないならば, 命題 3.3.8 より既約写像 $\tau M \rightarrow S$ が存在する. しかし, 系 3.3.6 より $\tau M = 0$ となり M が射影的でないことに矛盾する. \square

上の系は概分裂完全列の例の構成法を与えている. S を移入的でない単純射影加群とし, $f : S \rightarrow P$ を左極小概分裂とする. すると系 3.3.9 より P は射影加群で, 更に命題 3.3.5 より, P の各直既約直和因子 P' に対し, 対応する f の構成要素 $f' : S \rightarrow P'$ で, その像が $\text{rad } P'$ の直和因子である単射となるものが存在する. そこで, 改めて P をそのような直既約射影加群 P' の直和としてとれば, 完全列 $0 \rightarrow S \xrightarrow{f} P \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0$ は概分裂完全列となる.

例 3.3.10. A がクイバー

$$\overset{1}{\circ} \longleftarrow \overset{2}{\circ} \longrightarrow \overset{3}{\circ} \longleftarrow \overset{4}{\circ}$$

で与えられるとする. このとき, $S(3)$ は移入的でない単純射影加群で, $\text{rad } P(4)$ と等しく $\text{rad } P(2)$ の直和因子である. 従って概分裂完全列

$$0 \rightarrow S(3) \rightarrow P(2) \oplus P(4) \rightarrow (P(2) \oplus P(4))/S(3) \rightarrow 0$$

を得る.

この節の最後に, 次の命題でもう一つ概分裂完全列の例を見る.

命題 3.3.11. P を単純でなく射影的かつ移入的な直既約加群とする. 更に, $S = \text{soc } P, R = \text{rad } P$ とおく. このとき, 完全列

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}} R/S \oplus P \xrightarrow{[-j \ p]} P/S \rightarrow 0$$

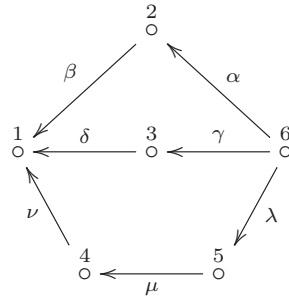
は概分裂完全列となる. ここで i, j は包含写像, p, q は自然な全射である.

証明. まず, R が単純な半単純成分 S をもつので, R は直既約である. これと定理 3.1.10 及び命題 3.3.5 より, $i: R \rightarrow P$ は同型を除いて P で終わる唯一の非自明な既約写像である. 双対的に, P/S も直既約で, $p: P \rightarrow P/S$ は同型を除いて P から始まる唯一の非自明な既約写像である. 従って命題 3.3.8 より $p': \tau(P/S) \rightarrow P$ も既約写像であり, 一意性から $R \cong \tau(P/S)$ を得る. 与えられた完全列は分裂しないため, 定理 3.1.13 から $\begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}: R \rightarrow R/S \oplus P$ が左概分裂であることを示せば十分である. $u: R \rightarrow U$ を切断でない準同型とする. u が単射であるとすると, P が移入加群であることから可換図式

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{u} & U \\ i \downarrow & \nearrow r & \\ P & & \end{array}$$

が存在する. 今, i が既約で u は切断でないから, $r: U \rightarrow P$ は引き込みとなる. 従って $rr' = 1_P$ なる $r': P \rightarrow U$ が存在する. これより, u は P を通るため, $\begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}: R \rightarrow R/S \oplus P$ は左概分裂となる. u が単射でないと仮定する. すると, $u = u'u''$ なる全射 $u'': R \rightarrow U'$ と単射 $u': U' \rightarrow U$ が存在する. $\text{Ker } u \neq 0$ より $S \subseteq \text{Ker } u = \text{Ker } u''$ であり, これより u'' は R/S を通ることがわかる. すなわち, $u'' = u_1q$ なる $u_1: R/S \rightarrow U'$ が存在する. 従って, $\bar{u} = [u'u_1, 0]$ は $\bar{u} \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} = u'u_1q = u'u'' = u$ を満足する. 以上により命題の証明が完成する. \square

例 3.3.12. A がクイバー



で与えられるとし, 関係 $\alpha\beta = \gamma\delta = \lambda\mu\nu$ を入れる. このとき, $P(6) = I(1)$ は射影的かつ移入的であり, 従って命題 3.3.11 より次は概分裂完全列となる:

$$0 \rightarrow \text{rad } P(6) \rightarrow S(2) \oplus S(3) \oplus P(5)/S(1) \oplus P(6) \rightarrow P(6)/S(1) \rightarrow 0$$

3.4 Auslander-Reiten クイバー

A を有限次元 K -多元環とする. 今, $\text{mod } A$ の持つ情報をクイバーの形で表示したい. そのためには, 頂点を加群で表現し, 矢を準同型で表現すればよい. 更に, 定理 0.0.12 より任意の

$\text{mod } A$ の加群は直既約加群の直和に一意的に分解されるから、頂点は直既約加群の同型類で表現すればよいことがわかる。同様に、矢も既約写像で表現すればよい。より正確な議論を行うために、まず既約写像に関するいくつかの性質を述べる。

定義 3.4.1. $M, N \in \text{mod } A$ を直既約加群とする。補題 3.1.6 より A -加群準同型 $f : M \rightarrow N$ が既約写像であるための必要十分条件は $f \in \text{rad}_A(X, Y) \setminus \text{rad}_A^2(X, Y)$ となることであった。そこで、

$$\text{Irr}(M, N) = \text{rad}_A(M, N) / \text{rad}_A^2(M, N)$$

で定めると、これは M から N への既約写像の数を記述している。これを**既約写像空間** (space of irreducible morphisms) と呼ぶ。補題 3.1.6 より $\text{Irr}(M, N)$ は $\text{End } N$ - $\text{End } M$ -両側加群で、左に関して $\text{rad } \text{End } N$ 、右に関して $\text{rad } \text{End } M$ によって零化される。

補題 3.4.2. A を有限次元 K -多元環, $I = \text{rad } A$, $h \in A$ とする。 $\bar{h} \in A/I$ が逆元を持つならば, h も逆元を持つ。

証明. $\bar{h} \in A/I$ が逆元を持つとする。すると, $\bar{h}\bar{p} = \bar{1}$ なる $\bar{p} \in A/I$ が存在する。すなわち, $\overline{1 - hp} = \bar{0}$ より $1 - hp \in I$ である。従って, ある $s \in I$ に対して $1 - hp = s$ と書け, $hp = 1 - s$ を得る。今, ある $m \geq 1$ に対して $I^m = 0$ であり, $s \in I$ より $s^m = 0$ である。従って

$$(1 - s)(1 + s + s^2 + \cdots + s^{m-1}) = 1 - s^m = 1$$

より $1 - s$ は逆元を持つ。故に $hp(1 - s)^{-1} = 1$ となり, h が右逆元を持つことがいえる。以上より, h は逆元を持つ。 \square

次の命題で、既約写像空間と極小概分裂写像の関係を与える。

命題 3.4.3. $M = \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i}$ を $\text{mod } A$ の加群とする。ただし, 各 M_i は直既約で互いに非同型である。

$$(1) \ L \text{ を直既約, } f : L \rightarrow M \text{ を } \text{mod } A \text{ の準同型とし, } f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_t \end{bmatrix}, f_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ \vdots \\ f_{in_i} \end{bmatrix} : L \rightarrow M_i^{n_i}$$

とする。 f が左極小概分裂であるための必要十分条件は各 $f_{ij} \in \text{rad}_A(L, M_i)$ で、これらを $\text{rad}_A^2(L, M_i)$ で割った $\bar{f}_{i1}, \dots, \bar{f}_{in_i}$ が $\text{Irr}(L, M_i)$ の基底を成すことである。更に, $\text{Irr}(L, M') \neq 0$ なる直既約加群 $M' \in \text{mod } A$ が存在するならば, ある i で $M' \cong M_i$ となることである;

$$(2) \ N \text{ を直既約, } g : M \rightarrow N \text{ を } \text{mod } A \text{ の準同型とし, } g = \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_t \end{bmatrix}, g_i = \begin{bmatrix} g_{i1} & \cdots & g_{in_i} \end{bmatrix} : M_i^{n_i} \rightarrow N \text{ とする。}$$

g が右極小概分裂であるための必要十分条件は各 $g_{ij} \in \text{rad}_A(M_i, N)$ で、これらを $\text{rad}_A^2(M_i, N)$ で割った $\bar{g}_{i1}, \dots, \bar{g}_{in_i}$ が $\text{Irr}(M_i, N)$ の基底を成すことである。更に, $\text{Irr}(M', N) \neq 0$ なる直既約加群 $M' \in \text{mod } A$ が存在するならば, ある i で $M' \cong M_i$ となることである。

証明. (2) は同様に示されるため (1) のみ証明する. f を左極小概分裂とする. 定理 3.1.10 より, $u : U \rightarrow V$ を既約写像, $v : V \rightarrow W$ を引き込みとすると, $vu : U \rightarrow W$ は既約となる. 今, f が左極小概分裂なので, 再び定理 3.1.10 より f は既約である. 従って $f_{ij} : L \rightarrow M_i$ は既約となり, 補題 3.1.6 より $f_{ij} \in \text{rad}_A(L, M_i)$ を得る.

一方で, $\text{Irr}(L, M') \neq 0$ なる直既約加群 M' が存在する, すなわち既約写像 $L \rightarrow M'$ が存在するならば, 定理 3.1.10 より, ある i で $M \cong M_i$ となる. 後は $\bar{f}_{i1}, \dots, \bar{f}_{in_i}$ が $\text{Irr}(L, M_i)$ の基底を成すことを示せばよい.

$\bar{h} \in \text{Irr}(L, M_i)$ を $h \in \text{rad}_A(L, M_i)$ の剰余類とする. すると h は切断でないから h は f を通る, すなわち,

$$h = uf = \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^{n_k} u_{kj} f_{kj}$$

なる $u = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_t \end{bmatrix} : \bigoplus_{k=1}^t M_k^{n_k} \rightarrow M_i, u_k = \begin{bmatrix} u_{k1} & \dots & u_{kn_k} \end{bmatrix} : M_k^{n_k} \rightarrow M_i$ が存在する. 各 u_{ij} は M_i の自己準同型で, $\text{End } M_i$ が局所多元環で K が代数的閉体より, $\text{End } M_i / \text{rad } \text{End } M_i \cong K$ なので, $u_{ij} = \lambda_j \cdot 1_M + u'_{ij}$ とかける. ここで, $\lambda_j \in K, u'_{ij} \in \text{rad } \text{End } M_i$ である. 一方で, $k \neq i$ ならば, $u_{kj} \in \text{rad}_A(M_k, M_i)$ である. $f_{kj} \in \text{rad}_A(L, M_k)$ であったから, $k \neq i$ に対して $u_{kj} f_{kj} \in \text{rad}_A^2(L, M_i)$ を得る. 従って

$$\bar{h} = \sum_k \sum_j \bar{u}_{kj} \bar{f}_{kj} = \sum_j \lambda_j \cdot \bar{f}_{ij}$$

となり, $\{\bar{f}_{i1}, \dots, \bar{f}_{in_i}\}$ が K -ベクトル空間 $\text{Irr}(L, M_i)$ を生成することがわかる. さて, これらが一次独立であることを示そう. $\text{Irr}(L, M_i)$ において, $\sum_j \lambda_j \bar{f}_{ij} = 0$ とする. すると

と $v = \sum_j \lambda_j \bar{f}_{ij} \in \text{rad}_A^2(L, M_i)$ である. 今, ある j で $\lambda_j \neq 0$ と仮定する. すると, $\ell = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_{n_i} \end{bmatrix} : M_i^{n_i} \rightarrow M_i$ は引き込みであるから, 証明の冒頭と同様に $v = \ell f_i$ は既約となるが, $v \in \text{rad}_A^2(L, M_i)$ に矛盾する. 従って各 j で $\lambda_j = 0$ となり, $\{\bar{f}_{i1}, \dots, \bar{f}_{in_i}\}$ が $\text{Irr}(L, M_i)$ の基底であることを得る.

逆に, 各 j で $\{\bar{f}_{i1}, \dots, \bar{f}_{in_i}\}$ が $\text{Irr}(L, M_i)$ の基底であると仮定し, $f' : L \rightarrow U$ を左極小概分裂写像とする. すると, $f : L \rightarrow M$ は切断でなく, 必要性の証明から $U \cong M$ を得る. 実際, $U = \bigoplus_{k=1}^s U_k^{m_k}$ を U の直既約分解とする. ここで, U_1, \dots, U_s は互いに非同型な直既約加群である. 各 k について $\text{Irr}(L, U_k) \neq 0$ より, ある j で $U_k \cong M_j$ となり, $m_k = \dim_K \text{Irr}(L, U_k) = \dim_K \text{Irr}(L, M_j) = n_j$ を得る. 同様に, 各 j について $\text{Irr}(L, M_j) \neq 0$ より, ある k で $M_j \cong U_k$ となる. これより $U = \bigoplus_{k=1}^s U_k^{m_k} \cong \bigoplus_{j=1}^t M_j^{n_j} = M$ を得る.

上の議論から, $U = M, f' : L \rightarrow M$ が左極小概分裂写像であるとしても一般性を失わない. 必要性の主張から, $f' = [f'_{js}] : L \rightarrow \bigoplus_{j=1}^t M_j^{n_j}$ について, 各 j で $\{\bar{f}'_{j1}, \dots, \bar{f}'_{jn_j}\}$ は K -ベクト

ル空間 $\text{Irr}(L, M_j)$ の基底を成す. f は切断でないので, $f = hf'$ なる $h: M \rightarrow M$ が存在する. 補題 3.4.2 より h は同型となり, f が左極小概分裂写像となることがわかる. \square

注意 3.4.4. $P(a) = e_a A$ を直既約射影 A -加群, $I(a) = D(Ae_a)$ を直既約移入 A -加群とする.

- (1) 命題 3.3.5 より包含写像 $\text{rad } P(a) \hookrightarrow P(a)$ は既約な右極小概分裂写像である. X_1, \dots, X_t を互いに非同型な直既約 A -加群とし, $\text{rad } P(a) \cong X_1^{n_1} \oplus \dots \oplus X_t^{n_t}$ とすると, $n_j = \dim_K \text{Irr}(X_j, P(a))$ であり, 任意の $\text{Irr}(X, P(a)) \neq 0$ なる A -加群 X について, ある j で $X \cong X_j$ となる;
- (2) 自然な全射 $I(a) \rightarrow I(a)/\text{soc } I(a)$ は既約な左極小概分裂写像である. Y_1, \dots, Y_s を互いに非同型な直既約 A -加群とし, $I(a)/\text{soc } I(a) \cong Y_1^{m_1} \oplus \dots \oplus Y_s^{m_s}$ とすると, $m_j = \dim_K \text{Irr}(I(a), Y_j)$ であり, 任意の $\text{Irr}(I(a), Y) \neq 0$ なる A -加群 Y について, ある j で $Y \cong Y_j$ となる.

ここまでの結果を次の系にまとめる.

系 3.4.5. $0 \rightarrow L \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i} \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ を $\text{mod } A$ の短完全列とする. ここで, L, N は直

既約で各 M_i は互いに非同型な直既約加群である. また, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_t \end{bmatrix}$, $f_i = \begin{bmatrix} f_{i1} \\ \vdots \\ f_{in_i} \end{bmatrix} : L \rightarrow M_i^{n_i}$, $g = \begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_t \end{bmatrix}$, $g_i = \begin{bmatrix} g_{i1} & \dots & g_{in_i} \end{bmatrix} : M_i^{n_i} \rightarrow N$ と記述する. このとき, 次は同値である:

- (1) この完全列は概分裂である;
- (2) 各 i で $f_{ij} \in \text{rad}_A(L, M_i)$ であり, これらを $\text{rad}_A^2(L, M_i)$ で割った \bar{f}_{ij} が $\text{Irr}(L, M_i)$ の基底を成す. 更に, $\text{Irr}(L, M') \neq 0$ なる直既約加群 $M' \in \text{mod } A$ が存在するならば, ある i で $M' \cong M_i$ となる;
- (3) 各 i で $g_{ij} \in \text{rad}_A(M_i, N)$ であり, これらを $\text{rad}_A^2(M_i, N)$ で割った \bar{g}_{ij} が $\text{Irr}(M_i, N)$ の基底を成す. 更に, $\text{Irr}(M', N) \neq 0$ なる直既約加群 $M' \in \text{mod } A$ が存在するならば, ある i で $M' \cong M_i$ となる.

更に, これらの同値が成立しているならば, 各 i で

$$\dim_K \text{Irr}(L, M_i) = \dim_K \text{Irr}(M_i, N)$$

となる.

証明. 命題 3.4.3 より従う. また, 最後の主張は (2), (3) より従う. \square

系 3.4.6. $X, Y \in \text{mod } A$ を直既約加群とする.

- (1) $\tau X \neq 0, \tau Y \neq 0$ ならば, K -ベクトル空間の同型 $\text{Irr}(\tau X, \tau Y) \cong \text{Irr}(X, Y)$ が存在する;
- (2) $\tau^{-1} X \neq 0, \tau^{-1} Y \neq 0$ ならば, K -ベクトル空間の同型 $\text{Irr}(\tau^{-1} X, \tau^{-1} Y) \cong \text{Irr}(X, Y)$ が

存在する.

証明. (2) は双対的に示されるため (1) のみ証明する. $\tau X \neq 0, \tau Y \neq 0$ より, X, Y は射影的ではなく, 従って $\text{mod } A$ の概分裂完全列 $0 \rightarrow \tau X \rightarrow U \xrightarrow{u} X \rightarrow 0, 0 \rightarrow \tau Y \rightarrow V \xrightarrow{v} Y \rightarrow 0$ が存在する. まず, $\text{Irr}(X, Y) \neq 0$ を仮定して $\text{Irr}(\tau X, \tau Y) \cong \text{Irr}(X, Y)$ を示す. v は右極小概分裂写像であるから, 命題 3.4.3(2) より, X は V の直和因子 V_i と同型となる. また, $\text{Irr}(X, Y) \neq 0$ であるから, 命題 3.3.8 より既約写像 $\tau Y \rightarrow X$ が存在する. 今, $0 \rightarrow \tau Y \rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^t V_i \xrightarrow{v} Y \rightarrow 0$ が概分裂完全列なので系 3.4.5 より, $\dim_K \text{Irr}(\tau Y, V_i) = \dim_K \text{Irr}(V_i, Y)$ であり, 従って K -ベクトル空間の同型 $\text{Irr}(\tau Y, X) \cong \text{Irr}(X, Y)$ を得る. 更に, $\text{Irr}(\tau Y, X) \neq 0$ であり, u も右極小概分裂写像であるから, 命題 3.4.3(2) より, τY は U の直和因子 U_j と同型となる. 従って再び系 3.4.5 を適用すれば K -ベクトル空間の同型 $\text{Irr}(\tau Y, X) \cong \text{Irr}(\tau X, \tau Y)$ が存在し, 以上より K -ベクトル空間の同型 $\text{Irr}(\tau X, \tau Y) \cong \text{Irr}(X, Y)$ を得る. 同様の議論から, $\text{Irr}(\tau X, \tau Y) \neq 0$ においても $\text{Irr}(\tau X, \tau Y) \cong \text{Irr}(X, Y)$ が得られ, 系の証明が完成する. \square

さて, 圏 $\text{mod } A$ のクイバーを次で定義する.

定義 3.4.7. A をベーシックな有限次元連結 K -多元環とする. $\text{mod } A$ のクイバー $\Gamma(\text{mod } A)$ を次で定める:

- (1) $\Gamma(\text{mod } A)$ の頂点を $\text{mod } A$ の直既約加群 X の同型類 $[X]$ とする;
- (2) 二点 $[M], [N] \in \Gamma(\text{mod } A)$ に対して, 矢 $[M] \rightarrow [N]$ の本数を K -ベクトル空間 $\text{Irr}(M, N)$ の次元の数とする.

このようにして定めたクイバー $\Gamma(\text{mod } A)$ を A の **AR-クイバー** (Auslander-Reiten quiver) と呼ぶ.

定義から, 矢 $[L] \rightarrow [M]$ が存在することと $\text{Irr}(L, M) \neq 0$, すなわち既約写像 $L \rightarrow M$ が存在することは同値である. 定理 3.3.1, 命題 3.3.5, 命題 3.4.3 より, $[M]$ の直前 $[M]^-$ は次のような頂点 $[L]$ の集合である:

- (1) M が射影的ならば, L は $\text{rad } M$ の直既約直和因子である;
- (2) M が射影的でないならば, L は M で終わる概分裂完全列の中間の直既約直和因子である.

同様に, $[M]$ の直後 $[M]^+$ は次のような頂点 $[N]$ の集合である:

- (1) M が移入的ならば, N は $M/\text{soc } M$ の直既約直和因子である;
- (2) M が移入的でないならば, N は M で始まる概分裂完全列の中間の直既約直和因子である.

特に, 任意の M に対して $[M]^+, [M]^-$ は有限集合である. これは, $\Gamma(\text{mod } A)$ の各点の近傍は有限であることを意味している. このような性質を持つとき, すなわち各点の近傍が有限であるとき, クイバーは**局所有限** (locally finite) であるという.

また, AR-クイバーの各連結成分は高々有限個の頂点から成る. 実際, 局所有限クイバー Γ の頂点 x を任意に一つとる. N_1 を x の近傍全体の集合とし, $i \geq 2$ に対して N_i を N_{i-1} に属する頂点の近傍全体の集合とする. すると, Γ が局所有限より各 N_i は有限で, Γ が連結より $\Gamma_0 = \bigcup_{i \geq 1} N_i$ は有限個の頂点からなる連結成分である.

明らかに, $\Gamma(\text{mod } A)$ が有限, つまり有限個の頂点から成るための必要十分条件は A が有限表現型, すなわち有限次元直既約 A -加群の同型類が有限であることである.

更に, 定義 3.1.4 より任意の既約写像 $f: M \rightarrow N$ は単射または全射であったから, $M = N$ ならば M が有限次元 K -ベクトル空間より f は同型となる. これより, AR-クイバーはループを持たないことがわかる.

AR-クイバーは加法的構造を持つ. Γ'_0 を $\Gamma(\text{mod } A)$ の直既約射影加群の頂点の集合とし, Γ''_0 を $\Gamma(\text{mod } A)$ の直既約移入加群の頂点の集合とする. 各 $[N] \in \Gamma(\text{mod } A)_0 \setminus \Gamma'_0$ に対し, 命題 3.2.10 より $[\tau N] \in \Gamma(\text{mod } A)_0 \setminus \Gamma''_0$ である. これより, 全単射

$$\tau: \Gamma(\text{mod } A)_0 \setminus \Gamma'_0 \rightarrow \Gamma(\text{mod } A)_0 \setminus \Gamma''_0$$

を得る. 任意の射影的でない直既約加群 N に対し, $\tau[N] = [\tau N]$ である. この逆写像は

$$\tau^{-1}: \Gamma(\text{mod } A)_0 \setminus \Gamma''_0 \rightarrow \Gamma(\text{mod } A)_0 \setminus \Gamma'_0$$

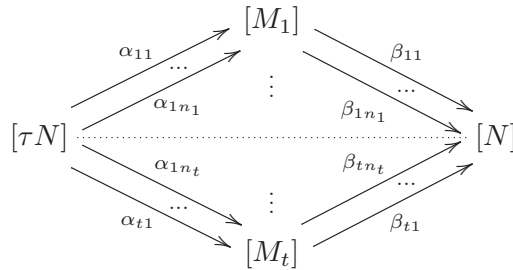
で与えられ, 任意の移入的でない直既約加群 L に対し, $\tau^{-1}[L] = [\tau^{-1}L]$ である. この τ を $\Gamma(\text{mod } A)$ の**並進写像** (translation) という. N を射影的でない直既約 A -加群とし,

$$0 \rightarrow \tau N \rightarrow \bigoplus_{i=1}^t M_i^{n_i} \rightarrow N \rightarrow 0$$

を N で終わる概分裂完全列とすると, 系 3.4.5 より各 i に対して

$$n_i = \dim_K \text{Irr}(M_i, N) = \dim_K \text{Irr}(\tau N, M_i)$$

であるから, この概分裂完全列は $\Gamma(\text{mod } A)$ における次のようなメッシュに対応している:



特に, 上の図から $[\tau N]^+ = [N]^-$ であることと, 各 $[M_i]$ について, $[\tau N]$ から $[M_i]$ への矢の集合 $\{\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in_i}\}$ と $[M_i]$ から $[N]$ への矢の集合 $\{\beta_{i1}, \dots, \beta_{in_i}\}$ の間に全単射が存在することがわかる.

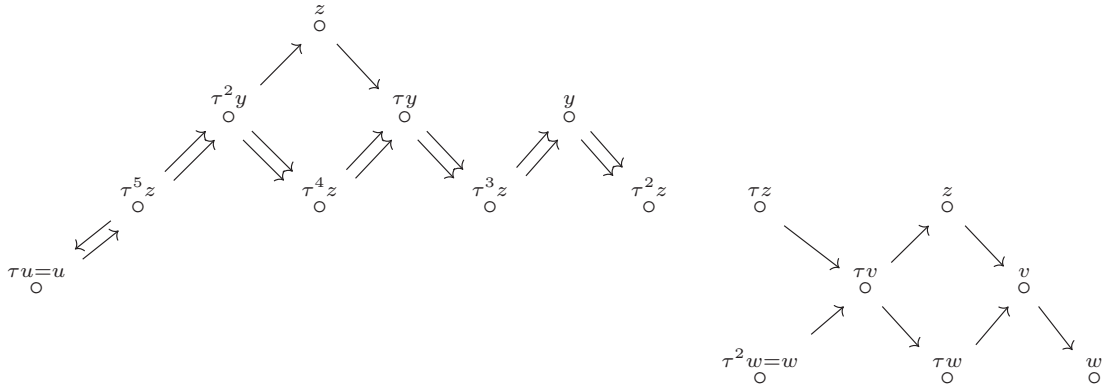
次で並進クイバーを定義する. 並進クイバーは AR-クイバーの持つ特徴を抽出したクイバーである. 並進クイバーに関して, [4] に詳しく書かれているのでそちらも参照されたい.

定義 3.4.8. Γ をループを持たない局所有限クイバーとし, τ を Γ_0 の部分集合の間の全単射とする. τx が存在するような任意の $x \in \Gamma_0$ と任意の $y \in x^-$ に対して, y から x への矢の本数と τx から y への矢の本数が等しいとき, 組 (Γ, τ) を **並進クイバー** (translation quiver) という. また, 並進クイバー (Γ, τ) に対して, Γ の充満部分クイバー Γ' と, $\tau x \in \Gamma'$ であるような $x \in \Gamma'$ について $\tau' x = \tau x$ となる τ' の組 (Γ', τ') を並進クイバー (Γ, τ) の **充満並進部分クイバー** (full translation subquiver) という.

τx が存在するような $x \in \Gamma_0$ について, $(\tau x)^+ = x^-$ となることが定義から即座にわかる. また, 全単射 τ を Γ の **並進写像** (translation) という. Γ の頂点で, τ が定義されない頂点を **射影頂点** (projective point) といい, τ^- が定義されない頂点を **移入頂点** (injective point) という. 射影頂点でない頂点 $x \in \Gamma_0$ と $\tau x, (\tau x)^+ = x^-$ から成る Γ の充満部分クイバーは τx から始まり x で終わる **メッシュ** (mesh) と呼ばれる. さて, Γ'_1 を終点が射影的でない矢からなる Γ_1 の部分集合とする. 射影的でない $x \in \Gamma_0$ に対して, x を終点とする矢と τx を始点とする矢の間に全単射が存在するから, x を終点とする矢 $\alpha \in \Gamma'_1$ を τx を始点とする矢 $\sigma \alpha$ に写すような単射 $\sigma : \Gamma'_1 \rightarrow \Gamma_1$ を定義することができる. これを Γ の **偏極** (polarisation) という. 明らかに, Γ が多重辺を持たなければ, Γ の偏極は一意的に定まる.

系 3.4.9. A の AR-クイバー $\Gamma(\text{mod } A)$ は並進クイバーである. 射影的でない任意の A -加群 M による頂点 $[M]$ に対して, 並進写像 τ は $\tau[M] = [\tau M]$ で定められる.

並進クイバーの例は以下のように簡単に構成することができる. 必ずしも AR-クイバーである必要はない.



ほとんどの場合, 多重辺を持たない AR-クイバーを考える. 次で示すように, 有限表現型である場合は多重辺を持たない AR-クイバーとなる.

命題 3.4.10. A を有限表現型の多元環とする. このとき, $\Gamma(\text{mod } A)$ は多重辺を持たない.

証明. 任意の直既約 A -加群 M, N について, $\dim_K \text{Irr}(M, N) \leq 1$ であればよい. そこで, $\dim_K \text{Irr}(M, N) \geq 2$ となる組 M, N が存在すると仮定する. 特に $\text{Irr}(M, N) \neq 0$ である. 任意の既約写像 $M \rightarrow N$ は単射または全射であるから, $\dim_K M \neq \dim_K N$ である. 今, $\dim_K M > \dim_K N$ とする. すると $M \rightarrow N$ が全射より N は射影加群でなく, $\dim_K \text{Irr}(M, N) \geq 2$ より概分裂完全列 $0 \rightarrow \tau N \rightarrow M^2 \oplus E \rightarrow N \rightarrow 0$ が存在する. これ

より,

$$\begin{aligned}\dim_K \tau N &= 2 \dim_K M + \dim_K E - \dim_K N \\ &> \dim_K M > \dim_K N\end{aligned}$$

を得る. また, 系 3.4.6 より $\dim_K \text{Irr}(\tau N, M) \geq 2$ であるから, 任意の $i > j$ なる自然数 i, j に対して, 帰納的に

$$\dim_K \tau^i M > \dim_K \tau^i N > \dim_K \tau^j M > \dim_K \tau^j N$$

が得られる. これより $\mathbb{N} \ni i \mapsto \tau^i[N] \in \Gamma(\text{mod } A)_0$ が単射となり, 従って $[N]$ を含む $\Gamma(\text{mod } A)$ の連結成分は無限であるが, A が有限表現型であることに矛盾する. $\dim_K M < \dim_K N$ についても双対的な議論で同様に矛盾が得られ, 命題の証明が完成する. \square

さて, 多元環 A の AR-クイバー $\Gamma(\text{mod } A)$ を具体的に構成しよう. 多くの場合, $\text{mod } A$ の全ての概分裂完全列を具体的に計算せずとも, 組み合わせ論的手法によるアルゴリズム操作で $\Gamma(\text{mod } A)$ を構成することが可能である.

例 3.4.11. A をパス多元環

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \beta & & 2 & & \alpha & & 3 \\ \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ \end{array}$$

とする. 補題 2.2.4 及び補題 2.2.6 より, 直既約射影 A -加群及び直既約移入 A -加群は次の表現で与えられる:

$$\begin{aligned}P(1) &= (K \longleftarrow 0 \longleftarrow 0) = S(1); \\ P(2) &= (K \xleftarrow{1} K \longleftarrow 0); \\ P(3) &= (K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K) = I(1); \\ I(2) &= (0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K); \\ I(3) &= (0 \longleftarrow 0 \longleftarrow K) = S(3).\end{aligned}$$

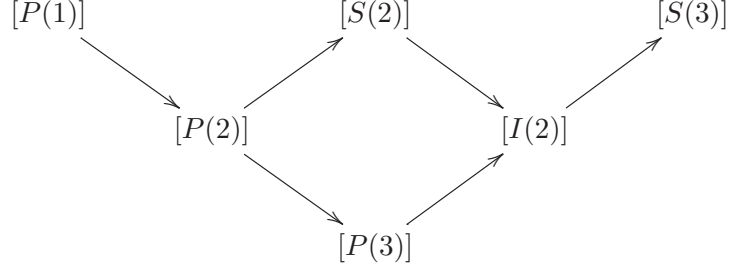
また, $S(2)$ は射影的でも移入的でもない単純加群であり,

$$\begin{aligned}P(1) &= \text{rad } P(2), \quad P(2) = \text{rad } P(3) \\ I(3) &= I(2)/S(2), \quad I(2) = I(1)/S(1) = P(3)/S(1)\end{aligned}$$

である. $P(1)$ は移入的でない単純射影加群であるから, 系 3.3.9 より $P(1)$ から始まる既約写像の終域は射影加群である. 更に, $P(1) = \text{rad } P(2)$ と $P(1)$ が $\text{rad } P(3)$ の直和因子でないことから, 包含写像 $i: P(1) \hookrightarrow P(2)$ は $P(1)$ から始まる唯一の既約写像かつ $P(2)$ で終わる唯一の右極小概分裂写像である. 従って $0 \rightarrow P(1) \xrightarrow{i} P(2) \rightarrow \text{Coker } i \rightarrow 0$ は概分裂完全列である. また, 簡単な計算から $\text{Coker } i = P(2)/P(1) = S(2)$ であることがわかる.

次に, $P(2)$ を考える. 直前で見たように, $P(2) \rightarrow S(2)$ は既約写像である. また, $P(2) = \text{rad } P(3)$ より包含写像 $P(2) \hookrightarrow P(3)$ も既約写像である. 今, $P(3) = I(1)$ は射影的かつ移入的であるから, 命題 3.3.11 より $0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \oplus S(2) \rightarrow I(2) \rightarrow 0$ は概分裂完全列であ

る. 一方で, $I(2) \rightarrow I(2)/S(2) = I(3) = S(3)$ は左極小概分裂で, その核は $S(2)$ であるから, $0 \rightarrow S(2) \rightarrow I(2) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$ も概分裂完全列となる. 以上の議論により A の AR-クイバー $\Gamma(\text{mod } A)$ は以下で与えられる:



一般に A の AR-クイバー $\Gamma(\text{mod } A)$ を記述する際に, 射影的でない頂点 x と τx は行を揃えて書く.

例 3.4.12. A がクイバー

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & \gamma & & 2 & & \beta & & 3 & & \alpha & & 4 \\ \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ \end{array}$$

で与えられるとし, 関係 $\alpha\beta\gamma = 0$ を入れる. 上と同様に直既約射影 A -加群及び直既約移入 A -加群は次の表現で与えられる:

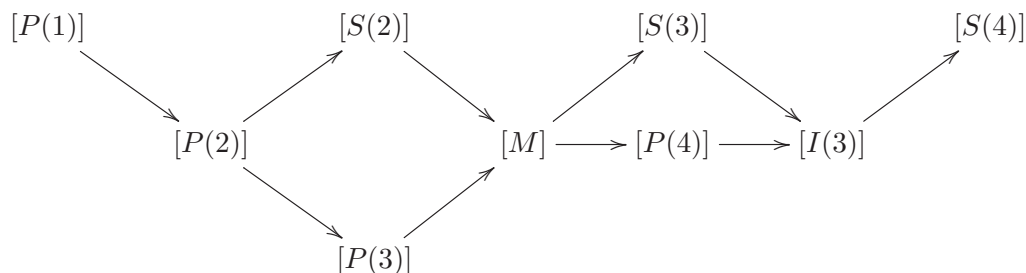
$$\begin{aligned} P(1) &= S(1); \\ P(2) &= (K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{\quad} 0 \xleftarrow{\quad} 0); \\ P(3) &= (K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{\quad} 0) = I(1); \\ P(4) &= (0 \xleftarrow{\quad} K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K) = I(2); \\ I(3) &= (0 \xleftarrow{\quad} 0 \xleftarrow{\quad} K \xleftarrow{1} K); \\ I(4) &= S(4). \end{aligned}$$

また, $P(1) = \text{rad } P(2) \rightarrow P(2)$, $P(2) = \text{rad } P(3) \rightarrow P(3)$ は右極小概分裂であり, $I(2) \rightarrow I(2)/S(2) = I(3)$, $I(3) \rightarrow I(3)/S(3) = I(4)$ は左極小概分裂である. 更に, $P(3) = I(1)$, $P(4) = I(2)$ は射影的かつ移入的であるから, 完全列

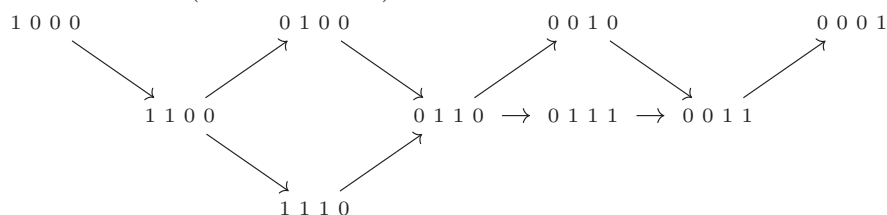
$$\begin{aligned} 0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \oplus P(2)/S(1) \rightarrow P(3)/S(1) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \text{rad } P(4) \rightarrow P(4) \oplus \text{rad } P(4)/S(2) \rightarrow P(4)/S(2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

は概分裂完全列である. $P(2)/S(1) = S(2)$, $P(4)/S(2) = I(3)$, $M = \text{rad } P(4) = P(3)/S(1) = (0 \xleftarrow{\quad} K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{\quad} 0)$, $\text{rad } P(4)/S(2) = S(3)$ であるから, A の AR-

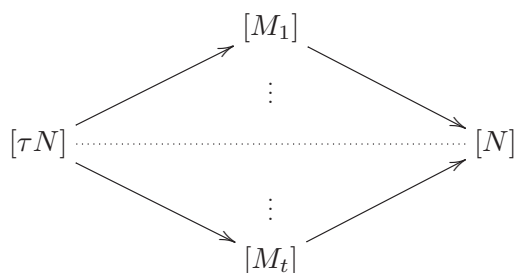
クイバー $\Gamma(\text{mod } A)$ は以下で与えられる:



また, 各直既約加群をそれらの次元ベクトルで置き換えて, 次のように表記することがあることを注意しておく (例 2.3.2 を見よ):

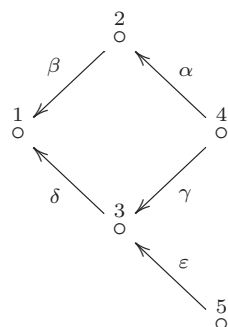


$\Gamma(\text{mod } A)$ の各メッシュ



に対して, $\dim N + \dim \tau N = \sum_{i=1}^t \dim M_i$ が成立している. これは, 対応する概分裂完全列が存在することからわかる. この事実を用いた構成方法を次の例で紹介する.

例 3.4.13. A がクイバー



で与えられるとし, 関係 $\alpha\beta = \gamma\delta, \varepsilon\delta = 0$ を入れる. A のクイバー Q_A が非巡回ならば, A は少なくとも一つ単純射影加群を持つ. この例の場合は $P(1)$ のみが該当し, その次元ベクトルは $\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$ である. 更に, $P(1)$ で終わる $\Gamma(\text{mod } A)$ の矢は存在せず, $P(1)$ から始まる矢の終点は射影加群である. 従ってこの例の場合, $\text{rad } P(2) = \text{rad } P(3) = P(1)$ より $P(1)$ から始まる矢は

$[P(1)] \rightarrow [P(2)], [P(1)] \rightarrow [P(3)]$ の二本のみである. また, $P(2), P(3)$ で終わる矢もこれらのみである. これと $P(1)$ が移入的でないことから, 概分裂完全列

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \oplus P(3) \rightarrow \tau^{-1}P(1) \rightarrow 0$$

を得る. 更に, $\dim \tau^{-1}P(1) = \dim P(2) + \dim P(3) - \dim P(1) = \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} = \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}$ であり, これより $\tau^{-1}P(1) = \text{rad } P(4)$ であることと $P(4)$ で終わる矢が $[\tau^{-1}P(1)] \rightarrow [P(4)]$ のみであることわかる. こまでの情報を AR-クイバーに整理すると次のようになる:

$$\begin{array}{ccccc} & & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & & & & \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & & \end{array}$$

上と同様に $P(2), P(3)$ から始まる概分裂完全列をそれぞれ計算することで, 次のように書き進めることができる:

$$\begin{array}{ccccc} & & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ & \nearrow & & \searrow & \nearrow \\ \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & & & & \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ & \searrow & & \nearrow & \searrow \\ & & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} & & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \end{array}$$

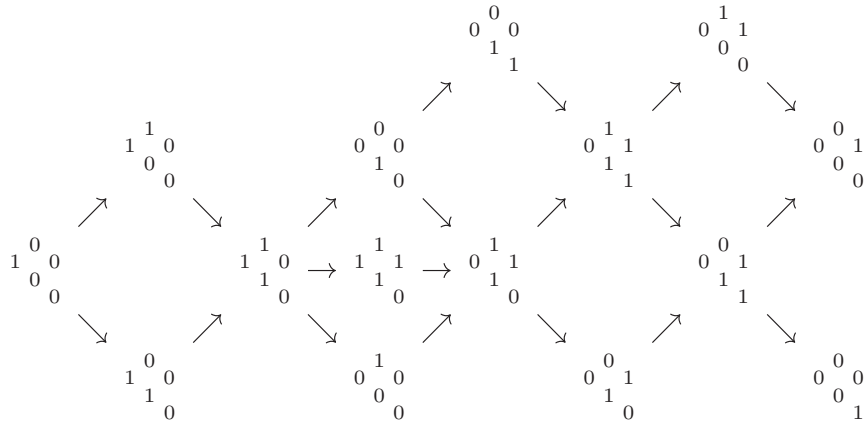
さて, $S(3) = \text{rad } P(5)$ より, $P(5)$ で終わる矢は $[S(3)] \rightarrow [P(5)]$ のみである. これで全ての射影加群が現れたことになる. 他の直既約加群は, 直既約加群 L に対して, $\tau^{-1}L$ で表されるから, 概分裂完全列

$$0 \rightarrow L \rightarrow M_1 \oplus \cdots \oplus M_t \rightarrow \tau^{-1}L \rightarrow 0$$

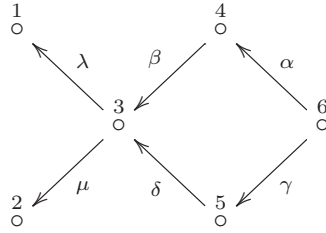
を考えればよい. $\dim L, \dim M_i (1 \leq i \leq t)$ は帰納的に得られるため, $\sum_{i=1}^t \dim M_i - \dim L$ を計算することで $\dim \tau^{-1}L$ を具体的に求めることができる. この操作を移入加群が現れるまで繰り返せば, $\Gamma(\text{mod } A)$ を構成することができる. 実際, 直既約移入加群 $I(a)$ に対して, 概分裂完全列 $0 \rightarrow S(a) \rightarrow I(a) \rightarrow I(a)/S(a) \rightarrow 0$ より

$$\dim_K I(a) = \dim_K S(a) + \dim_K I(a)/S(a) = 1 + \dim_K I(a)/S(a) > \dim_K I(a)/S(a)$$

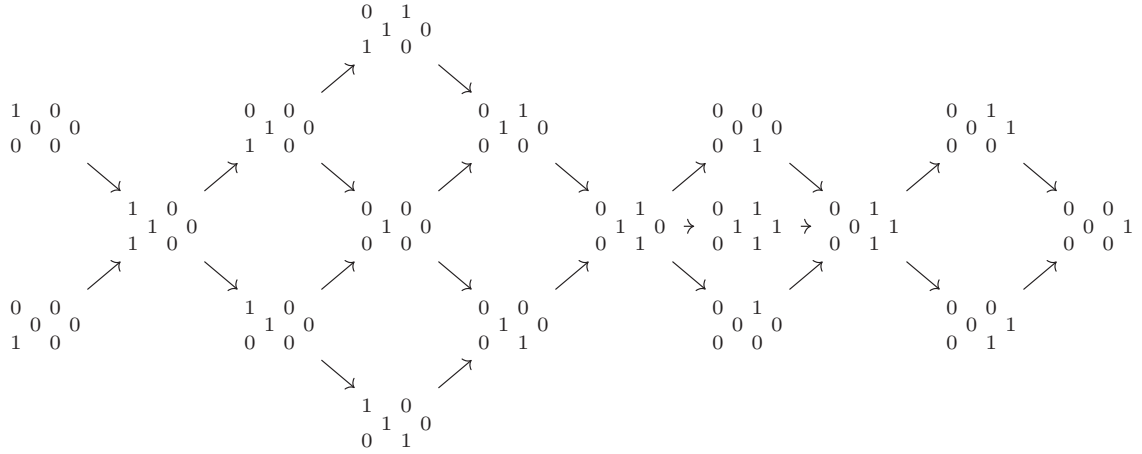
であるが, 上と同様に計算すると, $\dim_K \tau^{-1}I(a) = \dim_K I(a)/S(a) - \dim_K I(a) < 0$ となり, 矛盾する. このように構成すれば, A の AR-クイバー $\Gamma(\text{mod } A)$ は以下で与えられる:



例 3.4.14. A がクイバー



で与えられるとし, 関係 $\alpha\beta = \gamma\delta$, $\delta\mu = 0$, $\beta\lambda = 0$ を入れる. 同様の議論で AR クイバー $\Gamma(\text{mod } A)$ は以下で与えられる:



さて, M, N, L を $\mathbf{dim} M = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}$, $\mathbf{dim} N = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}$, $\mathbf{dim} L = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}$ なる単純 A -加群とする. $\mathbf{dim} \tau M = \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}$ より, $\text{Hom}_A(DA, \tau M) = 0$ であり, 従って補題 3.2.7 より $\text{pd}_A M = 1$ である.

一方で, $\text{pd}_A N \geq 2$ である. 実際, $\mathbf{dim} \tau N = \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}$ であり, 直既約移入加群 $\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}$ から τN への射が存在するので, $\text{Hom}_A(DA, \tau N) \neq 0$ であり, 従って $\text{pd}_A N \geq 2$ である. N の極小射影分解

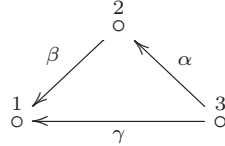
$$0 \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \rightarrow 0$$

より確かに $\text{pd}_A N = 2$ となっている. 同様にして, $\text{id}_A L \geq 2$ である. 実際, $\mathbf{dim} \tau^{-1} L =$

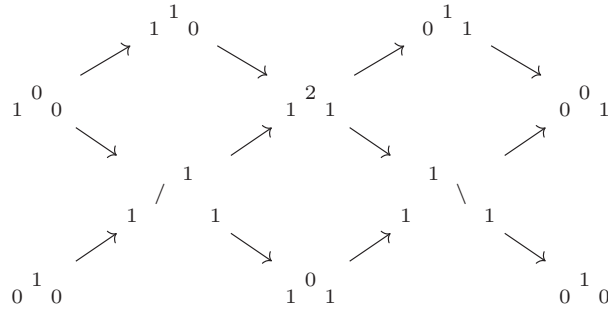
$\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$ であり, $\tau^{-1}L$ から直既約射影加群 $\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$ への射が存在するので, $\text{Hom}_A(\tau^{-1}L, A) \neq 0$ であり, 従って $\text{id}_A L \geq 2$ である.

これらの例のような方法で, 有限かつ非巡回な場合, AR-クイバーを構成することができる. これは, 任意の直既約加群が次元ベクトルによって同型を除いて一意に定まるからである. 次の例は, 次元ベクトルで一意に決定しない例である.

例 3.4.15. A がクイバー



で与えられるとし, 関係 $\alpha\beta = 0$ を入れる. このとき, AR-クイバー $\Gamma(\text{mod } A)$ は以下で与えられる:



この AR-クイバーは二つの $S(2) = \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}$ によってサイクルを形成している. ここで, $\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}$ は直既約射影加群 $P(3) = \begin{smallmatrix} 0 & K & 1 \\ & \swarrow & \searrow \\ K & \xleftarrow{1} & K \end{smallmatrix}$ の表現であり, $\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}$ は直既約移入加群 $I(1) = \begin{smallmatrix} 1 & K & 0 \\ & \swarrow & \searrow \\ K & \xleftarrow{1} & K \end{smallmatrix}$ の表現である. $P(3) \not\cong I(1)$ であるが, $\dim P(3) = \dim I(1)$ であり, 従って次

元ベクトルで直既約加群が一意的に定まらない.

4 中山多元環と自己移入多元環

この章では, 中山多元環と呼ばれる, 表現論においてよく知られている多元環について説明する. 中山多元環は常に有限表現型であり, 簡単な方法で全ての非同型な直既約加群を調べ上げることができるため, 多元環の構造を調べるうえで非常にありがたい性質を持ったクラスである. この章において, 特に断りがない限り A を有限次元 K -多元環とし, 加群は有限次元右 A -加群を考えるものとする.

4.1 Loewy 列と加群の Loewy 長

A -加群 M に対して, M の部分加群の減少列

$$M \supset \text{rad } M \supset \text{rad}^2 M \supset \dots \supset \text{rad}^i M \supset \dots \supset 0$$

を考える. この列は M の **radical 列** (radical series) 或いは**下降 Loewy 列** (descending Loewy series) と呼ばれる. M は K -ベクトル空間として有限次元であるから, $\text{rad}^m M = 0$ なる最小の整数 $m \geq 1$ が存在し, 従って radical 列は有限であり, m 個の 0 でない項を持つ. この m を radical 列の**長さ** (length) と呼び, $rl(M)$ と表記する.

双対的概念として, M の **socle 列** (socle series) 或いは**上昇 Loewy 列** (ascending Loewy series) が存在する. M の半単純成分 $\text{soc } M$ は, M の全ての単純部分加群の和であった. そこで, 整数 $i \geq 0$ に対して $\text{soc}^i M$ を帰納的に次のように定義する:

- $\text{soc}^0 M = 0$ とする;
- 自然な全射 $p: M \rightarrow M/\text{soc}^i M$ に対して,

$$\text{soc}^{i+1} M = p^{-1}(\text{soc}(M/\text{soc}^i M))$$

とする.

すると定義より $\text{soc}^{i+1} M \supset \text{soc}^i M$ であり, M の部分加群の上昇列

$$0 = \text{soc}^0 M \subset \text{soc } M = \text{soc}^1 M \subset \text{soc}^2 M \subset \dots \subset \text{soc}^i M \subset \dots \subset M$$

が得られる. 同様に $\text{soc}^m M = M$ なる最小の整数 $m \geq 1$ が存在し, この m を socle 列の**長さ** (length) と呼び, $sl(M)$ と表記する.

定義から $rl(M)$, $sl(M)$ は共に M の組成列の長さ $\ell(M)$, つまり K -ベクトル空間としての M の次元以下であることが即座にわかる. また, radical 列と socle 列は一般には一致しないが, これらの長さは等しくなる. これを証明していこう.

補題 4.1.1. $f: M_A \rightarrow N_A$ を全射 A -加群準同型とする. このとき, 任意の $i \geq 0$ に対して $f(\text{rad}^i M) = \text{rad}^i N$ である.

証明. $\text{rad}^i M = M \cdot \text{rad}^i A$ より $i = 1$ を示せば十分である. 命題 0.0.4 より,

$$f(\text{rad } M) = f(M \text{ rad } A) = f(M) \text{ rad } A = N \text{ rad } A = \text{rad } N$$

である. □

系 4.1.2. $0 \rightarrow L_A \xrightarrow{f} M_A \xrightarrow{g} N_A \rightarrow 0$ を A -加群の完全列とする. このとき, $rl(M) \geq \max\{rl(L), rl(N)\}$ である.

証明. 命題 0.0.4 より $f(\text{rad}^i L) \subseteq \text{rad}^i M$ であり, 上の補題から $g(\text{rad}^i M) = \text{rad}^i N$ である. 従って $\text{rad}^i M = 0$ ならば $\text{rad}^i L = 0, \text{rad}^i N = 0$ である. □

さて, まずは任意の A -加群 M に対して, $sl(M) = rl(DM)$ を示そう. $i \geq 1$ に対して完全列

$$0 \rightarrow \text{soc}^i M \rightarrow M \xrightarrow{p} M/\text{soc}^i M \rightarrow 0$$

と包含写像 $j : \text{soc}(M/\text{soc}^i M) \hookrightarrow M/\text{soc}^i M$ を考える. 一般に $\text{soc}^{i+1} M$ はファイバー積

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{soc}^i M & \longrightarrow & \text{soc}^{i+1} M & \longrightarrow & \text{soc}(M/\text{soc}^i M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow j \\ 0 & \longrightarrow & \text{soc}^i M & \longrightarrow & M & \xrightarrow{p} & M/\text{soc}^i M \longrightarrow 0 \end{array}$$

で得られる. 今, 任意の加群 M に対して同型 $D(\text{soc}^i M) \cong DM/\text{rad}^i DM$ が存在することを i に関する帰納法で示そう. $i = 1$ のときは, $DM/\text{rad} DM$ が半単純であることと K -双対 D の性質から即座に同型が従う. $i \geq 2$ とする. 帰納法の仮定より $D(\text{soc}^i M) \cong DM/\text{rad}^i DM$ であり, 短完全列 $0 \rightarrow D(M/\text{soc}^i M) \rightarrow DM \rightarrow D(\text{soc}^i M) \rightarrow 0$ より $D(M/\text{soc}^i M) \cong \text{rad}^i DM$ である. また, $D(\text{soc} X) \cong DX/\text{rad} DX$ より

$$\begin{aligned} D(\text{soc}(M/\text{soc}^i M)) &\cong D(M/\text{soc}^i M)/\text{rad} D(M/\text{soc}^i M) \\ &\cong \text{rad}^i DM/\text{rad}^{i+1} DM \end{aligned}$$

であるから, 上の可換図式に D を施すと, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{Ker } D(j) & & \text{Ker } f & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{rad}^i DM & \longrightarrow & DM & \longrightarrow & DM/\text{rad}^i DM \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow D(j) & & \downarrow f & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & \text{rad}^i DM/\text{rad}^{i+1} DM & \longrightarrow & N & \xrightarrow{p} & DM/\text{rad}^i DM \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

が得られる. ここで, $D(\text{soc}^{i+1} M) \cong N$ は押し出しである. 従って蛇の補題 (補題 0.0.18) から $N \cong DM/\text{Ker } f \cong DM/\text{Ker } D(j) \cong DM/\text{rad}^{i+1} DM$ となり, $sl(M) = rl(DM)$ を得る.

命題 4.1.3. 任意の A -加群 M に対して, $rl(M) = sl(M)$ が成立する.

証明. まず, $sl(M) \leq rl(M)$ を $sl(M)$ に関する帰納法で示そう. $sl(M) = 0$ と $M = 0$ は同値であり, 従って $rl(M) = 0$ と同値である. よって $sl(M) = 0$ のときは成り立つ.

$sl(X) = i \geq 0$ なる任意の X に対して $sl(X) \leq rl(X)$ が成立すると仮定し, $sl(M) = i + 1$ なる M を考える. $rl(M) = j$ とおく. すると $j > 0$ であり, $\text{rad}(\text{rad}^{j-1} M) = 0$ より $\text{rad}^{j-1} M$ は M の半単純部分加群である. これより, $\text{rad}^{j-1} M \subseteq \text{soc } M$ であり, A -加群準同型 $M/\text{rad}^{j-1} M \rightarrow M/\text{soc } M$ を得る. 従って系 4.1.2 より $rl(M/\text{rad}^{j-1} M) \geq rl(M/\text{soc } M)$ である. 故に $rl(M) = j = 1 + rl(M/\text{rad}^{j-1} M) \geq 1 + rl(M/\text{soc } M)$ を得る. 一方で,

$sl(M) = 1 + sl(M/\text{soc } M)$ であり, 帰納法の仮定から $rl(M/\text{soc } M) \geq sl(M/\text{soc } M)$ である. 従って, $rl(M) \geq 1 + rl(M/\text{soc } M) \geq 1 + sl(M/\text{soc } M) = sl(M)$ となり, 上の主張が示される. この関係式と $sl(M) = rl(DM)$ より, $sl(M) = rl(DM) \geq sl(DM) = rl(D(DM)) = rl(M)$ が得られ, 命題の証明が完成する. \square

定義 4.1.4. A -加群 M_A の **Loewy 長** (Loewy length) $\ell\ell(M)$ を

$$\ell\ell(M) := rl(M) = sl(M)$$

で定める.

任意の加群 M に対して明らかに $\ell\ell(M) \leq \ell(M)$ である. また, radical 列 (或いは socle 列) の定義と命題 0.0.4 より, M の直既約分解 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ に対して,

$$\ell\ell(M) = \max\{\ell\ell(M_1), \dots, \ell\ell(M_m)\}$$

である.

例 4.1.5. A がクイバー

$$\circ \xrightleftharpoons[\delta]{\beta} \circ \xrightleftharpoons[\gamma]{\alpha} \circ$$

で与えられるとし, 二つの零関係 $\alpha\beta = 0, \gamma\delta = 0$ を入れる. また, 表現 M_A を

$$K \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}} K^3 \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}} K$$

とする. このとき, M の radical 列は

$$M \supset (K \xrightleftharpoons[0]{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}} K^2 \xrightleftharpoons{0} 0) \supset (K \xrightleftharpoons[0]{0} 0 \xrightleftharpoons{0} 0) \supset 0$$

であり, socle 列は

$$0 \subset (K \xrightleftharpoons[0]{0} K \xrightleftharpoons{0} 0) \subset (K \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}} K^3 \xrightleftharpoons{0} 0) \subset M$$

である. 見てわかる通り, これらは一致していない. 更に, $\ell\ell(M) = 3$ であり, $\ell(M) = \dim_K M = 5$ である.

4.2 単列加群と右単列多元環

どのような加群 M が $\ell\ell(M) = \ell(M)$ を満たすかという問いは極めて自然である. そこで, 次の定義を導入する.

定義 4.2.1. A -加群 M_A が組成列を唯一つ持つとき, M を **単列加群** (uniserial) という.

すなわち, M が単列加群であることと M の部分加群が全順序となっていることは同値である. 明らかに, M が単列加群ならば任意の M の部分加群と M の剰余加群も単列加群である. 更に, M の K -双対 DM は単列左 A -加群である. また, 単列加群 M は単純 top(と単純 socle)を持つから直既約である.

単列加群はその組成列によって同型を除いて一意に定まる. M, N を単列加群, $0 = M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_m = M, 0 = N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_m = N$ を組成列とし, 各 i に対して $M_i/M_{i-1} \cong N_i/N_{i-1}$ であるとする. m に関する帰納法で示そう. $m = 1$ のときは $M = N = 0$ より明らかに成り立つ. $m = 2$ のときは $M_2 = M_2/M_1 \cong N_2/N_1 = N_2$ より成り立つ. 今, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M_{m-1} & \longrightarrow & M_m & \longrightarrow & M_m/M_{m-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N_{m-1} & \longrightarrow & N_m & \longrightarrow & N_m/N_{m-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

を考える. 仮定から $M_m/M_{m-1} \cong N_m/N_{m-1}$ であり, 帰納法の仮定から $M_{m-1} \cong N_{m-1}$ であるから, $M_m \cong N_m$ を得る. 従って上の主張は証明された.

次の補題は単列加群をその Loewy 列によって特徴付ける.

補題 4.2.2. 右 A -加群 M に対して, 次は同値である:

- (1) M は単列加群である;
- (2) radical 列 $M \supset \text{rad } M \supset \dots \supset 0$ は組成列である;
- (3) socle 列 $0 \subset \text{soc } M \subset \dots \subset M$ は組成列である;
- (4) $\ell(M) = \ell\ell(M)$ である.

証明. まず, (1) と (2) の同値を証明する. (1) と (3) の同値は同様に示される. M が単列加群であるとする. radical 列が組成列となることを M の組成列の長さ $\ell(M)$ に関する帰納法で示そう. $\ell(M) = 1$ のときは, M が単純加群より $\text{rad } M = 0$ である. $\ell(M) = t$ とする. M が単列加群より, 唯一の極大イデアル $\text{rad } M$ を持つ. また, $\text{rad } M \subset M$ より $\text{rad } M$ も単列加群である. 従って帰納法の仮定から $\text{rad } M \supset \text{rad}^2 M \supset \dots \supset 0$ は $\text{rad } M$ の組成列であるから, $M \supset \text{rad } M \supset \text{rad}^2 M \supset \dots \supset 0$ は M の組成列となる. 逆に,

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_t = 0, \quad M \supset \text{rad } M \supset \dots \supset \text{rad}^t M = 0$$

が共に M の組成列であったとする. 各 $0 \leq i \leq t$ で $M_i = \text{rad}^i M$ であることを i に関する帰納法で示す. $i = 0$ のときは明らかである. $i \geq 0$ まで成立していると仮定する. すると $\text{rad}^i M / \text{rad}^{i+1} M$ が単純加群より, $\text{rad}^i M$ は唯一の極大イデアル $\text{rad}^{i+1} M$ を持つ. 従って $M_{i+1} = \text{rad}^{i+1} M$ より (1) と (2) の同値が得られる.

次に, (2) と (4) の同値を証明する. (2) を仮定すると, 明らかに $\ell(M) = \ell\ell(M)$ より (4) は

成立する. 今, $m = \ell(M) = \ell\ell(M)$ とする. すると,

$$\begin{aligned} m &= \ell(M/\text{rad } M) + \ell(\text{rad } M) \\ &= \ell(M/\text{rad } M) + \ell(\text{rad } M/\text{rad}^2 M) + \ell(\text{rad}^2 M) \\ &= \cdots = \sum_{i=0}^{m-1} \ell(\text{rad}^i M/\text{rad}^{i+1} M) \end{aligned}$$

であり, 各 $\text{rad}^i M/\text{rad}^{i+1} M \neq 0$ より $i = 0, \dots, m-1$ に対して $\ell(\text{rad}^i M/\text{rad}^{i+1} M) = 1$ である. これより, 各 $\text{rad}^i M/\text{rad}^{i+1} M \neq 0$ が単純加群であることがわかり, 従って M の radical 列 $M \supset \text{rad } M \supset \cdots \supset \text{rad}^m M = 0$ は組成列となる. \square

定義 4.2.3. 任意の直既約射影右 A -加群が単列加群であるとき, 多元環 A は**右単列** (right serial) であるという. 任意の直既約射影左 A -加群が単列加群であるとき, 多元環 A は**左単列** (left serial) であるという.

同値な条件として, A が右単列である必要十分条件は任意の直既約移入左 A -加群が単列加群であることであり, A が左単列である必要十分条件は任意の直既約移入右 A -加群が単列加群であることである. また, A が右単列多元環であることと反転環 A^{op} が左単列多元環であることは同値である.

例 4.2.4. 有限次元 K -多元環 $K[t]/\langle t^n \rangle (n \geq 2)$ と下三角行列多元環 $\mathbb{T}_n(K)$ は共に右かつ左単列多元環である.

右単列多元環のクイバーは次の補題から即座に描くことができる.

補題 4.2.5. A が右単列多元環であるための必要十分条件は任意の直既約射影右加群 P に対し, $\text{rad } P/\text{rad}^2 P$ が 0 または単純加群となることである.

証明. A を右単列, P を直既約射影加群とする. すると補題 4.2.2 より, $P \supset \text{rad } P \supset \cdots \supset 0$ は組成列である. 特に $\text{rad } P/\text{rad}^2 P$ は 0 または単純加群である.

逆に, 任意の直既約射影右加群 P に対して, $\text{rad } P/\text{rad}^2 P$ が 0 または単純加群であると仮定する. すると再び補題 4.2.2 より, P の radical 列 $P \supset \text{rad } P \supset \cdots \supset 0$ が組成列であればよい. すなわち, $\text{rad}^{i-1} P/\text{rad}^i P$ が 0 または単純加群であればよい. これを i に関する帰納法で示そう. まず, $i = 1$ のときは $\text{top } P = P/\text{rad } P$ が単純加群より成り立つ. また, $i = 2$ のときも仮定から成り立つ. $i \geq 2$ とし, $\text{rad}^{i-1} P/\text{rad}^i P$ が単純加群とする. $f: P' \rightarrow \text{rad}^{i-1} P$ を射影被覆とし, $p: \text{rad}^{i-1} P \rightarrow \text{rad}^{i-1} P/\text{rad}^i P$ を自然な全射とすると, $pf: P' \rightarrow \text{rad}^{i-1} P/\text{rad}^i P$ も射影被覆となる. 実際, f は定義から極小であり, $\text{Ker } p = \text{rad}^i P = \text{rad}(\text{rad}^{i-1} P)$ より p も極小である. 従って合成 pf も極小となる. 更に, 帰納法の仮定から $\text{rad}^{i-1} P/\text{rad}^i P$ が単純なので, P' は直既約となる. 補題 4.1.1 より,

$$\begin{aligned} f(\text{rad } P') &= \text{rad}(\text{rad}^{i-1} P) = \text{rad}^i P, \\ f(\text{rad}^2 P') &= \text{rad}^2(\text{rad}^{i-1} P) = \text{rad}^{i+1} P \end{aligned}$$

であるから, これらから一意に誘導される全射 $\bar{f}: \text{rad } P'/\text{rad}^2 P' \rightarrow \text{rad}^i P/\text{rad}^{i+1} P$ で, 次

の図式を可換にするものが存在する:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{rad}^2 P' & \longrightarrow & \text{rad} P' & \longrightarrow & \text{rad} P' / \text{rad}^2 P' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f. & & \downarrow f. & & \downarrow \bar{f} \\
0 & \longrightarrow & \text{rad}^{i+1} P & \longrightarrow & \text{rad}^i P & \longrightarrow & \text{rad}^i P / \text{rad}^{i+1} P \longrightarrow 0
\end{array}$$

P' が直既約射影加群なので, 仮定から $\text{rad} P' / \text{rad}^2 P'$ は 0 または単純加群であり, 従って $\text{rad}^i P / \text{rad}^{i+1} P$ も 0 または単純加群である. \square

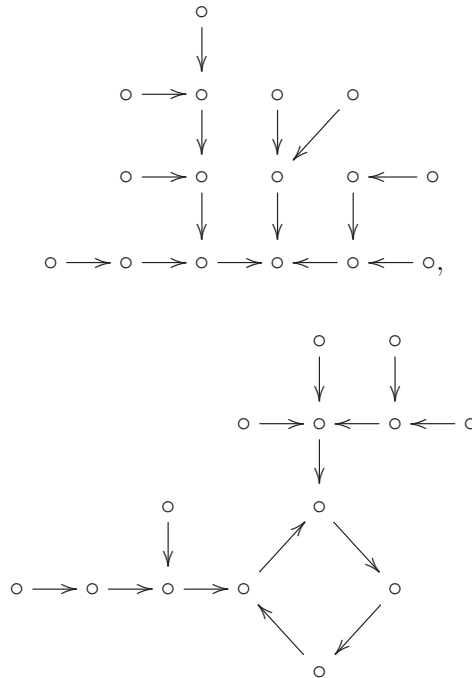
定理 4.2.6. ベーシックな K -多元環 A が右単列であるための必要十分条件は, A のクイバー Q_A の任意の頂点 a について, 始点が a の矢が高々一本であることである.

証明. 補題 4.2.5 より, A が右単列であるための必要十分条件は各 $a \in (Q_A)_0$ に対して, A -加群

$$\text{rad} P(a) / \text{rad}^2 P(a) = e_a(\text{rad} A / \text{rad}^2 A)$$

が 0 または単純加群となることである. すなわち, $\dim_K e_a(\text{rad} A / \text{rad}^2 A) \leq 1$ となることであり, これは $e_a(\text{rad} A / \text{rad}^2 A)e_b \neq 0$ なる頂点 $b \in (Q_A)_0$ が高々一点のみであることを意味している. 更にこのとき $\dim_K e_a(\text{rad} A / \text{rad}^2 A)e_b = 1$ である. 従って Q_A の定義から, 始点が a の矢は上のような頂点 b に対して $\alpha: a \rightarrow b$ 唯一つである. \square

上の定理を満たすような連結クイバーの例を次に述べる.



特に, 連結右単列多元環 A のクイバー Q_A は矢が出ない頂点が唯一つであるような木か, 矢の向きが同一方向であるサイクルを唯一つ含んでいるかのいずれかである. また, $A \cong KQ_A / \mathcal{I}$ が右単列ならば, Q_A は上の定理を満たすが, 許容イデアル \mathcal{I} によらない.

記号 4.2.7. 次の表記は単列加群を扱う上で便利である. M_A を単列加群とし, radical 列を

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_t = 0$$

とする. ここで $a_i \in Q_A (0 \leq i \leq t)$ に対して, $M_i/M_{i+1} \cong S(a_i)$ である. 単列加群が組成列によって同型を除いて一意に定まることから, M は

$$M = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{t-1} \end{pmatrix}$$

とかける. 更に, この表記法は M の構造を理解しやすくするだけでなく, M の組成因子によって準同型をより簡単に計算できるようにする. 実際, $f: M \rightarrow N$ を単列加群 M から単列加群 N への準同型とすると, Schur's lemma より, $\text{top } M = M/\text{rad } M$ は N の単純組成因子と同型となる.

例 4.2.8. 右単列 K -多元環 A がクイバー

$$\overset{1}{\circ} \xrightarrow{\alpha} \overset{2}{\circ} \curvearrowright \beta$$

で与えられるとし, 関係 $\alpha\beta^2 = 0, \beta^3 = 0$ を入れる. このとき, 直既約射影 A -加群はそれぞれ

$$P(1)_A = K \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} K^2 \curvearrowright \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

,

$$P(2)_A = 0 \longrightarrow K^3 \curvearrowright \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる. 記号 4.2.7 を用いれば, $P(1)_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, P(2)_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とかける. また, $\text{top } P(1) = S(1)$ が $P(2)$ の組成因子に現れないため, $\text{Hom}_A(P(1), P(2)) = 0$ であり, 一方で $P(2)$ から $P(1)$ への射は, その像が $\text{rad } P(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるものと $\text{soc } P(1) = (2)$ であるものの二つが存在する.

4.3 中山多元環

定義 4.3.1. 多元環 A が右かつ左単列であるとき, **中山多元環** (Nakayama algebra) と呼ばれる.

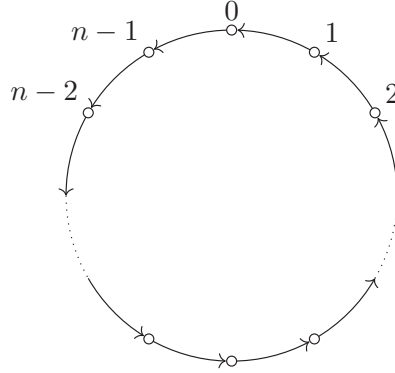
すなわち, A が中山多元環であるための必要十分条件は全ての直既約射影 A -加群と直既約移入 A -加群が単列加群となることである. また, A が中山多元環であることと, 反転環 A^{op} が中山多元環であることは同値である.

定理 4.3.2. A をベーシックな連結多元環とする. A が中山多元環であるための必要十分条件は A のクイバー Q_A が次のいずれかとなることである:

(1)



(2)



証明. 定理 4.2.6 より, A が中山多元環であるための必要十分条件は A のクイバー Q_A の任意の頂点 a について, 始点が a の矢と終点が a の矢はそれぞれ高々一本である. \square

$A \cong KQ_A/\mathcal{I}$ が中山多元環ならば, Q_A は上の定理を満たすが, 許容イデアル \mathcal{I} によらない. また, (1) のような形をしたクイバーを A_n 型, (2) のような形をしたクイバーを Cyc_n 型と呼ぶことにする.

さて, 次で中山多元環の任意の任意の直既約加群が単列加群となることを示し, それらの直既約加群の具体的構成を述べる. そのために二つの補題を証明する.

補題 4.3.3. A を K -多元環, J を A の真のイデアルとする.

- (1) A が右単列ならば, A/J も右単列である;
- (2) A が中山多元環ならば, A/J も中山多元環である.

証明. (2) は (1) とその双対から従うため, (1) のみ証明する. $A_A = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ を直既約加群

P_i による A の直和分解とする. このとき, $A/J = \bigoplus_{i=1}^n (P_i/P_iJ)$ は 0 または直既約加群である P_i/P_iJ による A/J の直和分解である. 特に, 各直既約射影 A/J -加群 P' はいずれかの P_i/P_iJ と同型となる. 従って P' は単列加群 P_i の剰余加群より P' も単列加群である. \square

補題 4.3.4. A を中山多元環とし, P_A を $\ell\ell(P) = \ell\ell(A)$ なる直既約射影 A -加群とする. このとき, P は移入加群である.

証明. $P \rightarrow E$ を $\text{mod } A$ の移入包絡とする. P が単列加群より, $\text{soc } P$ は単純であり, 従って $\text{soc } E$ も単純である. これより E が直既約であることがわかる. 今, A が中山多元環より E は単列加群であるから,

$$\ell\ell(A_A) = \ell\ell(P) = \ell(P) \leq \ell(E) = \ell\ell(E) \leq \ell\ell(A_A)$$

となり $\ell(P) = \ell(E)$ を得る. 従って $P \cong E$ であり, P は移入加群である. \square

定理 4.3.5. A をベーシックな連結中山多元環とし, M を直既約 A -加群とする. このとき, $M \cong P/\text{rad}^t P$ なる直既約射影 A -加群 P と $1 \leq t \leq \ell(P)$ が存在する. 特に, A は有限表現型である.

証明. P が単列加群で, 各 $1 \leq t \leq \ell(P)$ に対して $\text{rad}^t P \subset P$ より, 各 $P/\text{rad}^t P$ は直既約単列加群である. M_A を任意の直既約 A -加群とし, $t = \ell(M)$ をその Loewy 長とする. 特に, $0 = \text{rad}^t M = M \text{rad}^t A$ より M は自然な $A/\text{rad}^t A$ -加群構造を持つ. また, $\text{rad}^{t-1} M \neq 0$ より $\text{rad}^{t-1} A \neq 0$ であり, $\ell(A/\text{rad}^t A) = t$ である. 一方で, 補題 4.3.3 より $A/\text{rad}^t A$ は中山多元環であり, 更に直和分解

$$A/\text{rad}^t A \cong \bigoplus_{i=1}^n (P_i/P_i \text{rad}^t A) = \bigoplus_{i=1}^n (P_i/\text{rad}^t P_i)$$

が存在する. ここで, 各 $P_i/\text{rad}^t P_i$ は直既約である.

さて, $f: \bigoplus_{j=1}^r P'_j \rightarrow M$ を $\text{mod}(A/\text{rad}^t A)$ における M の射影被覆とする. 各 P'_j は直既約である. このとき, f が全射であるから系 4.1.2 より,

$$t = \ell(A/\text{rad}^t A) \geq \max\{\ell(P'_1), \dots, \ell(P'_r)\} \geq \ell(M) = t$$

である. これより, $\ell(P'_j) = t$ なる j ($1 \leq j \leq r$) が存在することがわかる. そこで, $1 \leq j \leq s$ のとき $\ell(P'_j) = t$ とし, $s \leq j \leq r$ のとき $\ell(P'_j) < t$ であると仮定する. また, f_j を f の P'_j への制限 $f|_{P'_j}$ とする. もし全ての $j \leq s$ で f_j が単射でないとすると, 完全列 $0 \rightarrow \text{Ker } f_j \rightarrow P'_j \rightarrow \text{Im } f_j \rightarrow 0$ より $\ell(\text{Im } f_j) < t$ であることがわかる. 一方で, f から誘導される写像 $\bigoplus_{j=1}^r \text{Im } f_j \rightarrow M$ は全射であるから, 系 4.1.2 より $\ell(M) < \ell(\bigoplus_{j=1}^r \text{Im } f_j) < \max\{\ell(\text{Im } f_1), \dots, \ell(\text{Im } f_r)\} < t$ となるが, これは仮定に矛盾する. 従って $f_q: P'_q \rightarrow M$ が単射となるような $q \leq s$ が存在する. 今, $\ell(P'_q) = t = \ell(A/\text{rad}^t A)$ であるから, 補題 4.3.4 より, P'_q は $A/\text{rad}^t A$ -加群として移入的である. 従って, f_q が単射であることと P'_q が移入的であることから $f_q: P'_q \rightarrow M$ は切断であることがわかる. 更に, M が直既約であることから f_q は同型である. これと P'_q が直既約射影 $A/\text{rad}^t A$ -加群であることより $P'_q \cong P_i/\text{rad}^t P_i$ なる $1 \leq i \leq n$ が存在し, 従って $M \cong P_i/\text{rad}^t P_i$ を得る. \square

この定理より, 非同型な直既約 A -加群の数は

$$\sum_{i=1}^n \ell(P_i) \quad (\leq n \cdot \ell(A))$$

と一致する. また, 直既約射影加群 P と $1 \leq t \leq \ell(P)$ に対して $M \cong P/\text{rad}^t P$ ならば, $P \rightarrow M$ は射影被覆である. 更に, 任意の直既約 A -加群はその単純 top 或いは単純 soc と組成列の長さから同型を除いて一意に定まる. 実際, $S(a)$ を直既約 A -加群 M の単純 top とし, $t \geq 1$ をその組成列の長さとする. すると, M が単列加群より $t = \ell(M)$ であり, 従って $M \cong P(a)/\text{rad}^t P(a)$ である.

系 4.3.6. A をベーシックな連結多元環とする. A が中山多元環であるための必要十分条件は任意の A -加群が単列加群となることである.

証明. 十分性は定義から明らかであり, 必要性は定理 4.3.5 から従う. \square

例 4.3.7. A がクイバー

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & \gamma & & 2 & & \beta & & 3 & & \alpha & & 4 \\ \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ \end{array}$$

で与えられるとし, 関係 $\alpha\beta\gamma = 0$ を入れる (例 3.4.12 を見よ). 直既約射影 A -加群は次の表現で与えられる:

$$P(1) = (K \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow 0) = (1);$$

$$P(2) = (K \xleftarrow{1} K \longleftarrow 0 \longleftarrow 0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P(3) = (K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K \longleftarrow 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = I(1);$$

$$P(4) = (0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K \xleftarrow{1} K) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = I(2).$$

また, 定理 4.3.5 より残りの直既約 A -加群は次の表現で与えられる:

$$P(2)/\text{rad } P(2) = (0 \longleftarrow K \longleftarrow 0 \longleftarrow 0) = (2);$$

$$P(3)/\text{rad } P(3) = (0 \longleftarrow 0 \longleftarrow K \longleftarrow 0) = (3);$$

$$P(3)/\text{rad}^2 P(3) = (0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K \longleftarrow 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

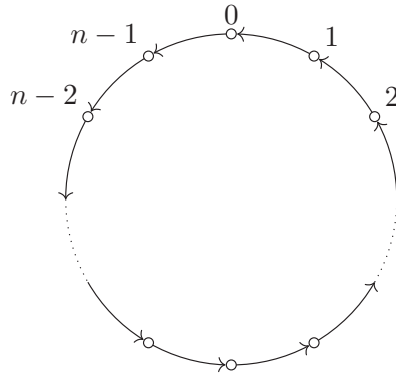
$$P(4)/\text{rad } P(4) = (0 \longleftarrow 0 \longleftarrow 0 \longleftarrow K) = (4) = I(4);$$

$$P(4)/\text{rad}^2 P(4) = (0 \longleftarrow 0 \longleftarrow K \xleftarrow{1} K) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = I(3).$$

記号 4.2.7 によって例えば $\text{Im}(P(3)/\text{rad}^2 P(3) \rightarrow P(4)/\text{rad}^2 P(4)) = S(3)$, $\text{Im}(P(3) \rightarrow P(4)) = P(3)/\text{rad}^2 P(3)$ であることが簡単にわかる. これらは全射でも単射でもない. 一方で, $\text{Coker}(P(2) \rightarrow P(3)) = S(3)$ なる $P(2) \rightarrow P(3)$ は単射であり, $\text{Ker}(P(4) \rightarrow P(4)/\text{rad}^2 P(4)) = S(2)$ なる $P(4) \rightarrow P(4)/\text{rad}^2 P(4)$ は全射である.

次の命題の前に自己移入多元環の概念を思い出しておこう (定義 0.0.17 を見よ). 多元環 A に対して, 右 A -加群 A_A が移入 A -加群であるとき, 或いは同値な条件であるが, 全ての射影右 A -加群が移入的であるとき, A を自己移入多元環或いは準フロベニウス多元環と呼んだ. 次の命題は自己移入中山多元環を特徴付けるものである.

命題 4.3.8. A をベーシックな連結多元環とする. ただし, K とは非同型とする. このとき, A が自己移入中山多元環であるための必要十分条件はクイバー Q



($n \geq 1$) と, KQ の矢イデアル R と $h \geq 2$ に対して $I = R^h$ なるイデアルを用いて $A \cong KQ/I$ となることである.

証明. A のクイバーが与えられた形であるとする, 定理 4.3.2 より A は中山多元環であり, 直既約射影加群と直既約移入加群をそれぞれ計算することで, A が自己移入多元環であることがわかる. 逆に, A が自己移入中山多元環であると仮定し, $A \not\cong K$ とする. すると A のクイバー $Q = Q_A$ は定理 4.3.2 のいずれかの形であるが,

$$\begin{array}{ccccccc} \underset{\circ}{1} & \longleftarrow & \underset{\circ}{2} & \longleftarrow & \underset{\circ}{3} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow & \underset{\circ}{n-1} \longleftarrow \underset{\circ}{n} \end{array}$$

とすると $P(1)_A$ が単純射影加群であるが移入加群でないため自己移入であることに矛盾する. 従って Q_A は与えられた形である. $n = 1$ のとき, KQ の許容イデアルはある $h \geq 2$ に対して $I = R^h$ という形をしている. 従って以下 $n > 1$ と仮定する.

各 $0 \leq i < n$ に対して, t_i を始点が i の \mathcal{I} に含まれるパスのうち, 長さが最小のパス w_{i,t_i} の長さとし, $h = \max \{t_i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ とする. \mathcal{I} が許容イデアルより, $h \geq 2$ である. 今, $\{w_{i,t_i} \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ は \mathcal{I} の生成系であるから, 各 i に対して $t_i = h$ であることを示せば十分である. そこで, $t_i < h$ なる i が存在すると仮定し, $s \in Q_0$ を終点が i である矢の始点とする. $t_s = h$ としても一般性を失わない. さて, $j \in Q_0$ を $j-1 \equiv i - t_i \pmod{n}$ なる頂点とする. 仮定から $P(i)_A$ は移入的であるから, w_{i,t_i-1} は終点が j の \mathcal{I} に含まれないパスのうち, 長さが最長のパスである. このとき, w_{s,t_i} は終点が j で w_{i,t_i-1} よりも長くなるから, $w_{s,t_i} \in \mathcal{I}$ となる. 従って t_s の定義から $h = t_s \leq t_i < h$ となり矛盾を得る. \square

5 中山多元環の大域次元

この章では, 中山多元環についてより詳細に観察することを目的とする. 具体的には, A_n 型クイバーの中山多元環と Cyc_n 型クイバーの中山多元環の大域次元について具体的な計算を基に考察する.

5.1 A_n 型の中山多元環の場合

この節では, まずクイバー

$$\overset{1}{\underset{\circ}{\circ}} \longleftarrow \overset{2}{\underset{\circ}{\circ}} \longleftarrow \overset{3}{\underset{\circ}{\circ}} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \overset{n-1}{\underset{\circ}{\circ}} \longleftarrow \overset{n}{\underset{\circ}{\circ}}$$

で与えられる中山多元環 A について考察し, そこから得られた結果を説明する. 以下に具体的に計算した結果を述べる.

(1) $n = 2$, つまり

$$\overset{1}{\underset{\circ}{\circ}} \xleftarrow{\alpha} \overset{2}{\underset{\circ}{\circ}}$$

とする. このとき AR-クイバーは

$$\begin{array}{ccc} (1) & & (2) \\ & \searrow & \nearrow \\ & \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \end{array}$$

であり, $P(1) = S(1), 0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0$ より $\text{gl. dim } A = 1$ である.

(2) $n = 3$, つまり

$$\overset{1}{\underset{\circ}{\circ}} \xleftarrow{\beta} \overset{2}{\underset{\circ}{\circ}} \xleftarrow{\alpha} \overset{3}{\underset{\circ}{\circ}}$$

とする.

- 関係を入れない場合

AR-クイバーは

$$\begin{array}{ccccc} (1) & & (2) & & (3) \\ & \searrow & & \searrow & \nearrow \\ & \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) & & & \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \\ & & & \nearrow & \\ & & \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \end{array}$$

であり,

$$S(1) = P(1)$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 1$ である;

- $\alpha\beta = 0$ の場合

AR-クイバーは

$$\begin{array}{ccccc} & & & \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) & \\ & & \nearrow & & \searrow \\ (1) & & (2) & & (3) \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) & & & \end{array}$$

であり,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である.

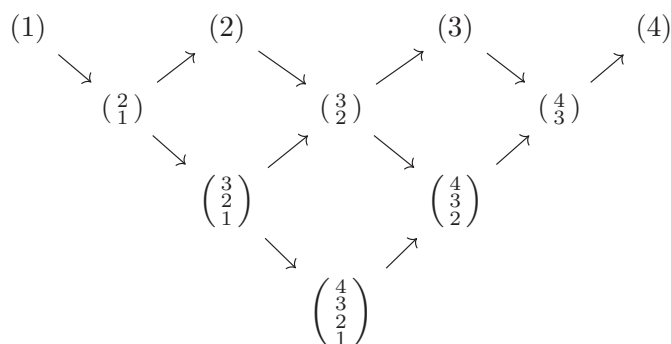
(3) $n = 4$, つまり

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \xleftarrow{\gamma} & 2 & \xleftarrow{\beta} & 3 & \xleftarrow{\alpha} & 4 \\ \circ & & \circ & & \circ & & \circ \end{array}$$

とする.

- 関係を入れない場合

AR-クイバーは



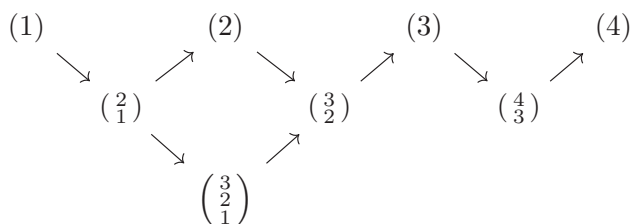
であり,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 1$ である;

- $\alpha\beta = 0$ の場合

AR-クイバーは



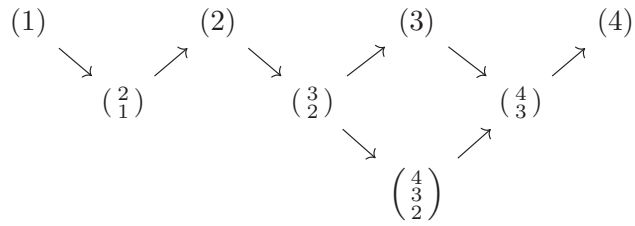
であり,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\beta\gamma = 0$ の場合

AR-クイバーは



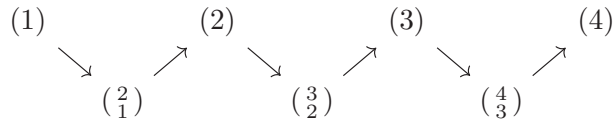
であり,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0$ の場合

AR-クイバーは



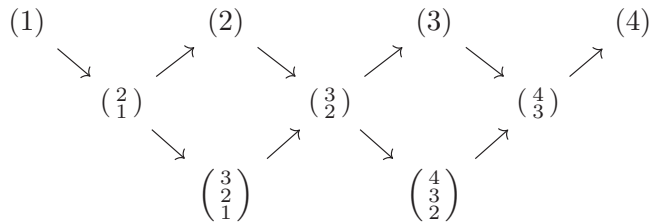
であり,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 3$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である.

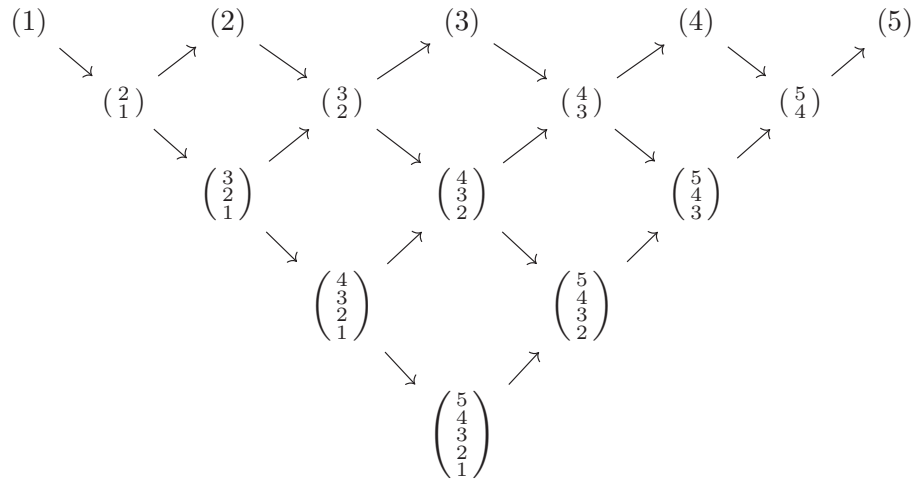
(4) $n = 5$, つまり

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & \delta & & 2 & & \gamma & & 3 & & \beta & & 4 & & \alpha & & 5 \\ \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ & \longleftarrow & & \longleftarrow & \circ \end{array}$$

とする.

- 関係を入れない場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

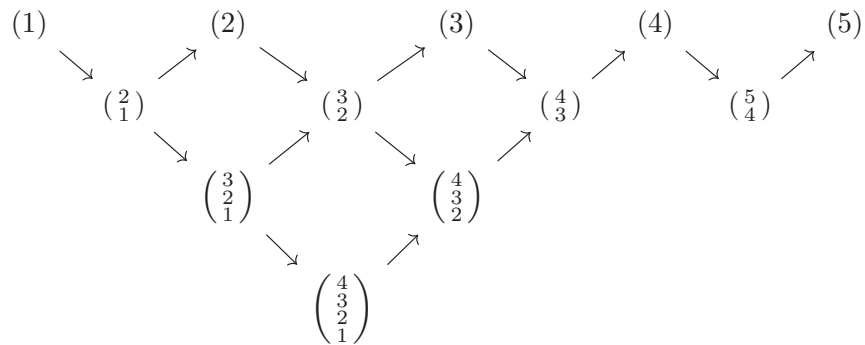
$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 1$ である;

- $\alpha\beta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

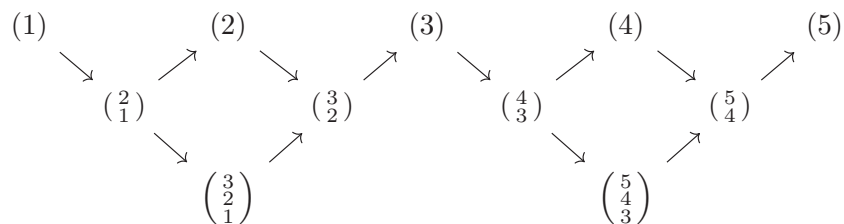
$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\beta\gamma = 0$ の場合

AR-クイバーは



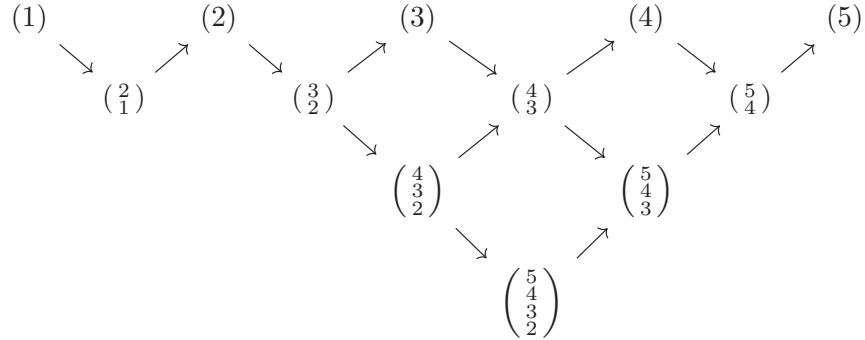
であり,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



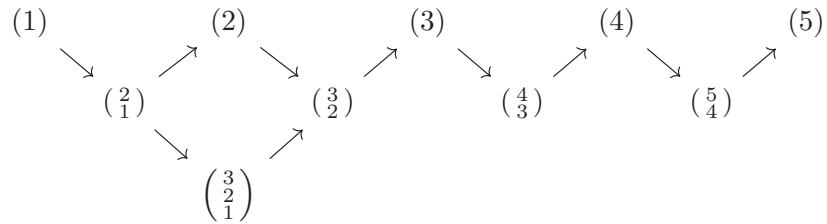
であり,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0$ の場合

AR-クイバーは



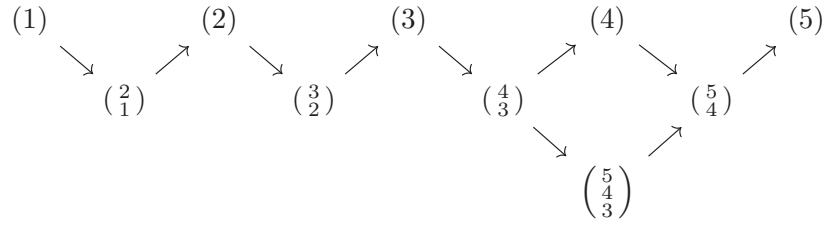
であり,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 3$ である;

- $\beta\gamma = 0, \gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

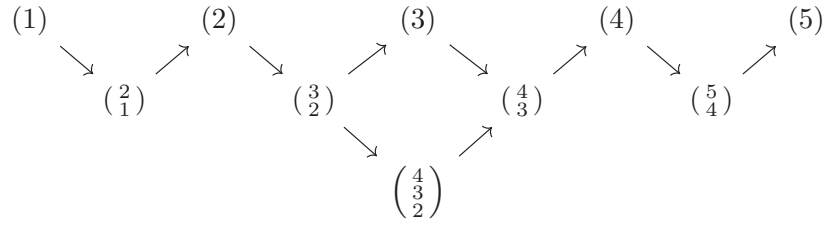
$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 3$ である;

- $\alpha\beta = 0, \gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

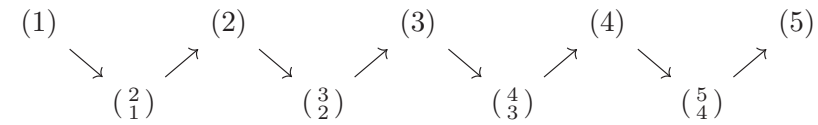
$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0, \gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

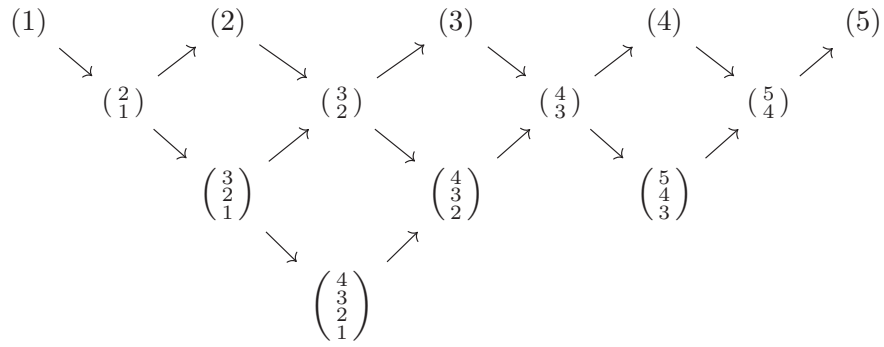
$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 4$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

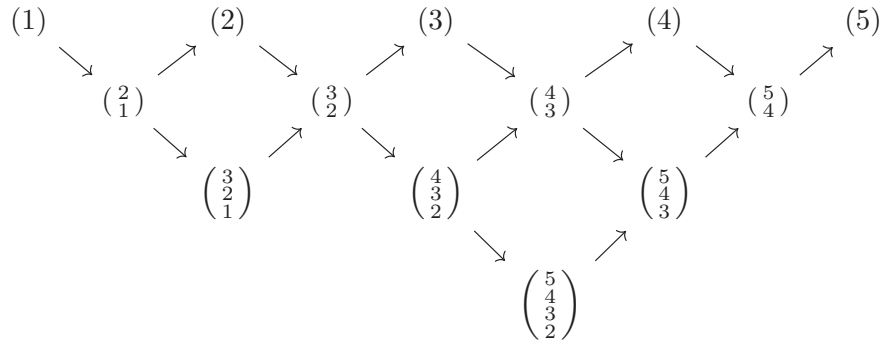
$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\beta\gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

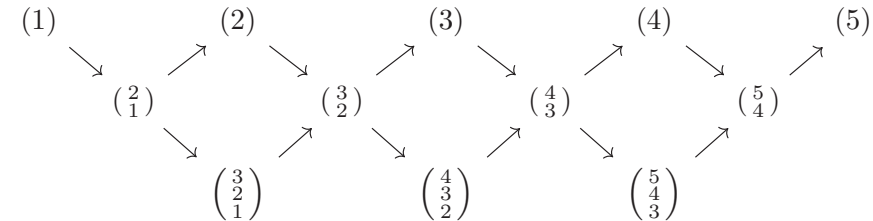
$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

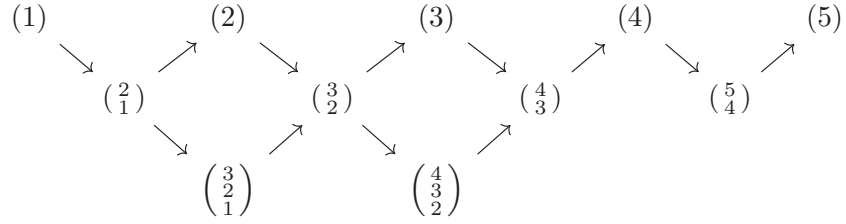
$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 3$ である;

- $\alpha\beta = 0, \beta\gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



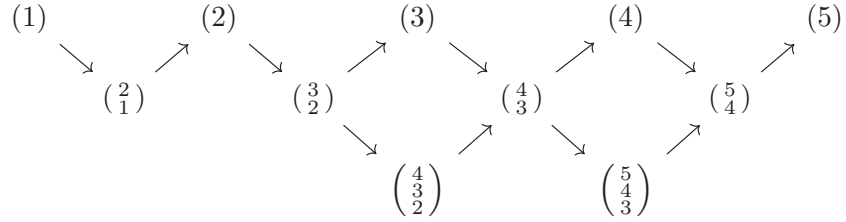
であり,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 3$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0, \gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



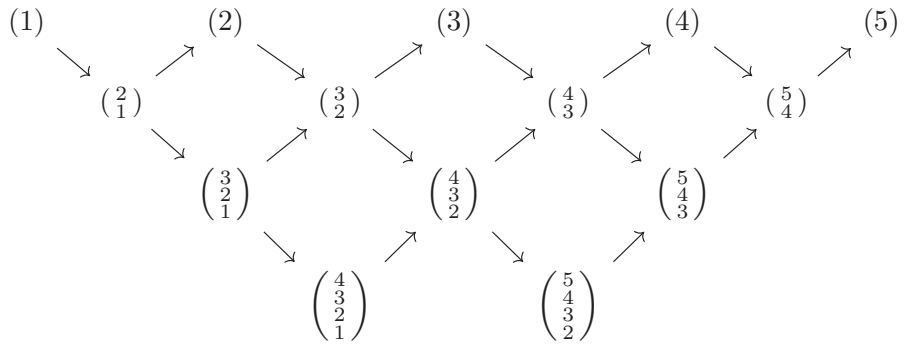
であり,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 3$ である;

- $\alpha\beta\gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(3) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow S(5) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である.

以上の計算結果を以下の表にまとめる:

クイバー Q	関係 \mathcal{I}	$\text{gl. dim } KQ/\mathcal{I}$	ページ
A_2	無し	1	106
A_3	無し	1	106
	$\alpha\beta = 0$	2	106 – 107
A_4	無し	1	107
	$\alpha\beta = 0$	2	107
	$\beta\gamma = 0$	2	107 – 108
	$\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0$	3	108
	$\alpha\beta\gamma = 0$	2	108
A_5	無し	1	108 – 109
	$\alpha\beta = 0$	2	109
	$\beta\gamma = 0$	2	109 – 110
	$\gamma\delta = 0$	2	110
	$\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0$	3	110
	$\beta\gamma = 0, \gamma\delta = 0$	3	110 – 111
	$\alpha\beta = 0, \gamma\delta = 0$	2	111
	$\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0, \gamma\delta = 0$	4	111
	$\alpha\beta\gamma = 0$	2	111 – 112
	$\beta\gamma\delta = 0$	2	112
	$\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\delta = 0$	3	112 – 113
	$\alpha\beta = 0, \beta\gamma\delta = 0$	3	113
	$\alpha\beta\gamma = 0, \gamma\delta = 0$	3	113
	$\alpha\beta\gamma\delta = 0$	2	113 – 114

以上の結果から, 「 A_n 型の中山多元環の大域次元が $n - 1$ 以下になる」という予想が得られる. 実際にこの予想が正しいことを次で証明する.

定理 5.1.1. A が A_n 型クイバー

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \xleftarrow{\alpha_1} & 2 & \xleftarrow{\alpha_2} & 3 & \xleftarrow{\dots} & \xleftarrow{\alpha_{n-2}} & n-1 & \xleftarrow{\alpha_{n-1}} & n \\ \circ & & \circ & & \circ & & \circ & \circ & & \circ \end{array}$$

で与えられる中山多元環であるとする. このとき, $\text{gl. dim } A \leq n - 1$ である.

証明. n に関する帰納法で証明しよう. $n = 2$ のときは先の計算結果から成り立っている. 次に, $n - 1$ 以下の頂点のクイバーに対して主張が成立していると仮定する. 中山多元環 A から新たに中山多元環 B を作る. A のクイバーから頂点 n を取り除き, A が α_{n-1} を含む関係を持つときはそれも取り除く. このようにして得られた頂点の数が $n - 1$ 個のクイバーとその関係から構成される中山多元環を B と定義する. すると帰納法の仮定から $\text{gl. dim } B \leq n - 2$ である. $i \neq n$ に対して, 対応

$$\text{mod } A \ni S(i) = (i) \mapsto (i) = S(i) \in \text{mod } B$$

を考えると, $\text{pd}_A S(i) = \text{pd}_B S(i) \leq n - 2$ が得られる. ここで, $\text{pd}_A S(n)$ を考える. A が α_{n-1} を含む関係を持たないとき, $\text{rad } P(n) = P(n - 1)$ より $\text{pd}_A S(n) = 1$ であり,

$$\text{gl. dim } A \leq n - 2$$

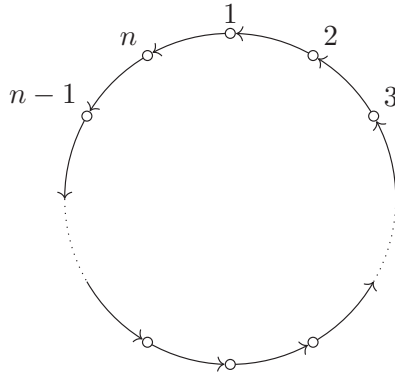
より主張は成立している. 一方で, α_{n-1} を含む関係を持つとき, その関係を $\alpha_{n-1} \cdots \alpha_{r-1} = 0$ とすると, $P(n) = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ r \end{pmatrix}$ であり, $\text{rad } P(n) = \begin{pmatrix} n-1 \\ \vdots \\ r \end{pmatrix}$ である. 従って, 上と同様に対応

$$\text{mod } A \ni \text{rad } P(n) \mapsto \text{rad } P(n) \in \text{mod } B$$

を考えると, $\text{pd}_A \text{rad } P(n) = \text{pd}_B \text{rad } P(n) \leq n - 2$ が得られる. これより $\text{pd}_A S(n) = \text{pd}_A \text{rad } P(n) + 1 \leq n - 2 + 1 = n - 1$ となり, 以上より $\text{gl. dim } A \leq n - 1$ を得る. \square

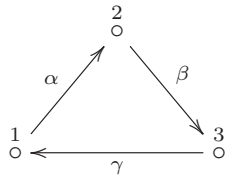
5.2 Cyc_n 型の中山多元環の場合

次に, クイバー



で与えられる中山多元環 A について考察する. 以下に具体的に計算した結果を述べる.

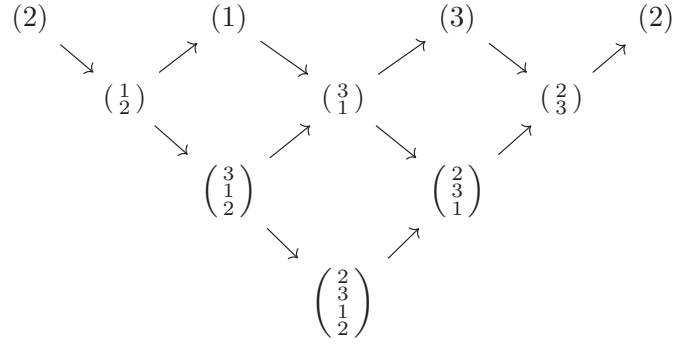
(1) $n = 3$, つまり



とする.

- $\alpha\beta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

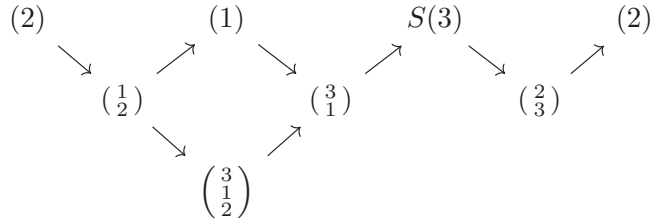
$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

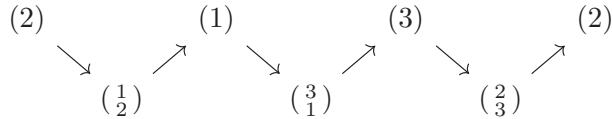
$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \xrightarrow{\quad} P(2) \xrightarrow{\quad} P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

$\begin{array}{ccccc} & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & & S(3) & & S(2) & \end{array}$

より $\text{gl. dim } A = 3$ である;

- $\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0, \gamma\alpha = 0$ の場合 (自己移入多元環)

AR-クイバーは



であり,

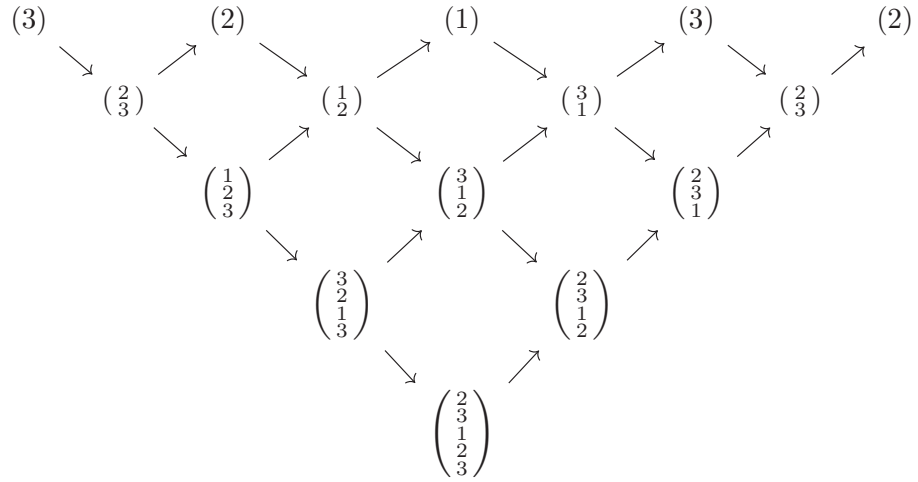
$$\cdots \rightarrow P(1) \xrightarrow{\quad} P(3) \xrightarrow{\quad} P(2) \xrightarrow{\quad} P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

$\begin{array}{ccccccc} & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & & S(1) & & S(3) & & S(2) & \end{array}$

より $\text{gl. dim } A = \infty$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

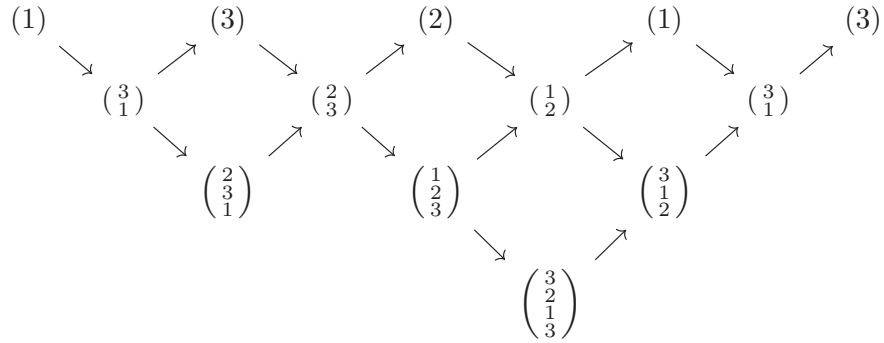
$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\alpha = 0$ の場合

AR-クイバーは



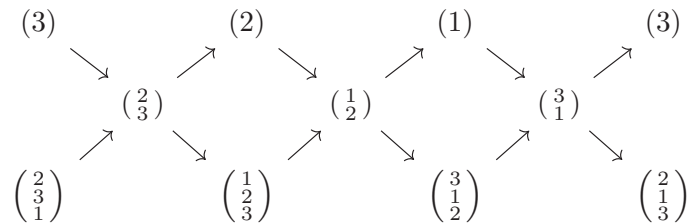
であり,

$$\cdots \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = \infty$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\alpha = 0, \gamma\alpha\beta = 0$ の場合 (自己移入多元環)

AR-クイバーは

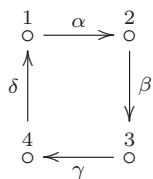


であり,

$$\cdots \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = \infty$ である.

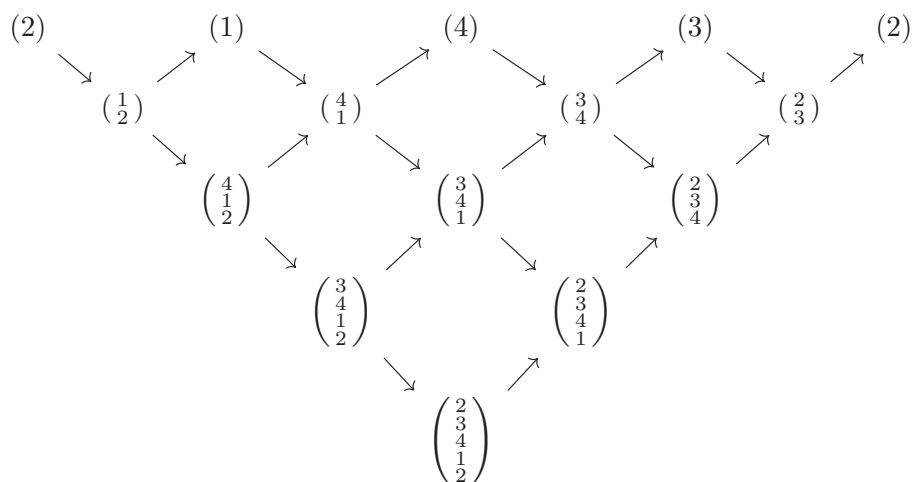
(2) $n = 4$, つまり



とする.

- $\alpha\beta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0$$

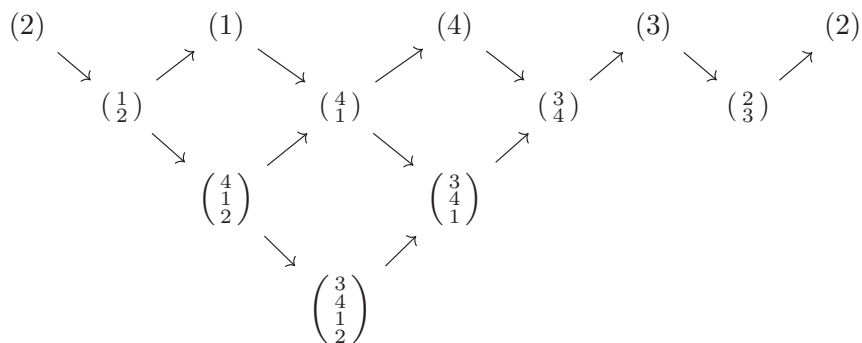
$$0 \rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0$ の場合

AR-クイバーは



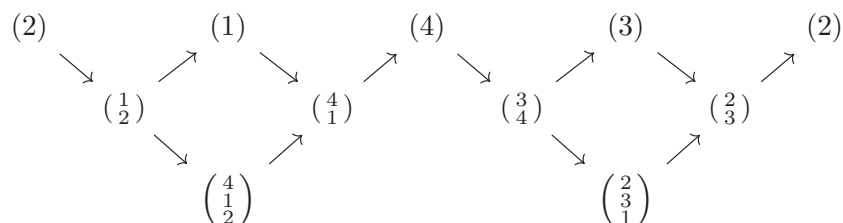
であり,

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0 \\
0 &\rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0 \\
0 &\rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\
0 &\rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 3$ である;

- $\alpha\beta = 0, \gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



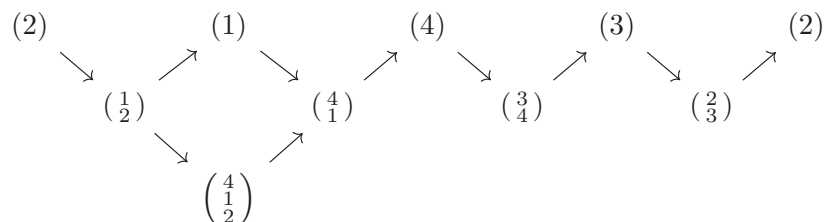
であり,

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0 \\
0 &\rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0 \\
0 &\rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0 \\
0 &\rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0, \gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

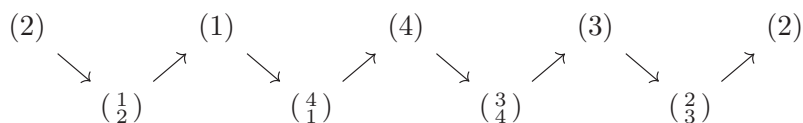
$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \xrightarrow{\quad} P(3) \xrightarrow{\quad} P(2) \xrightarrow{\quad} P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

$\begin{array}{ccccccc} & & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ & & S(4) & S(3) & S(2) & & \end{array}$

より $\text{gl. dim } A = 4$ である;

- $\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0, \gamma\delta = 0, \delta\alpha = 0$ の場合 (自己移入多元環)

AR-クイバーは



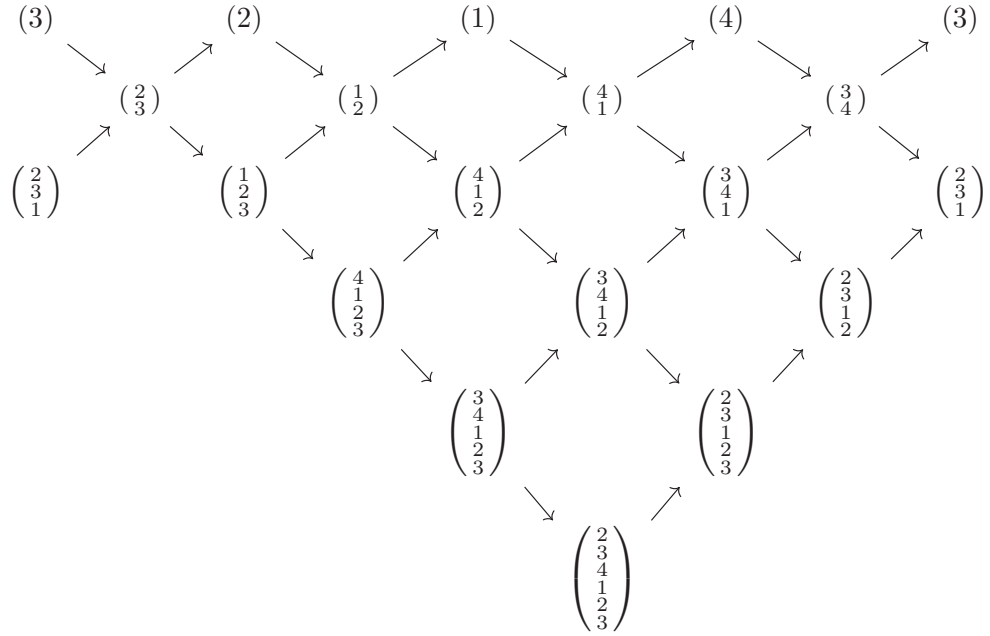
であり,

$$\cdots \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = \infty$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(4) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0$$

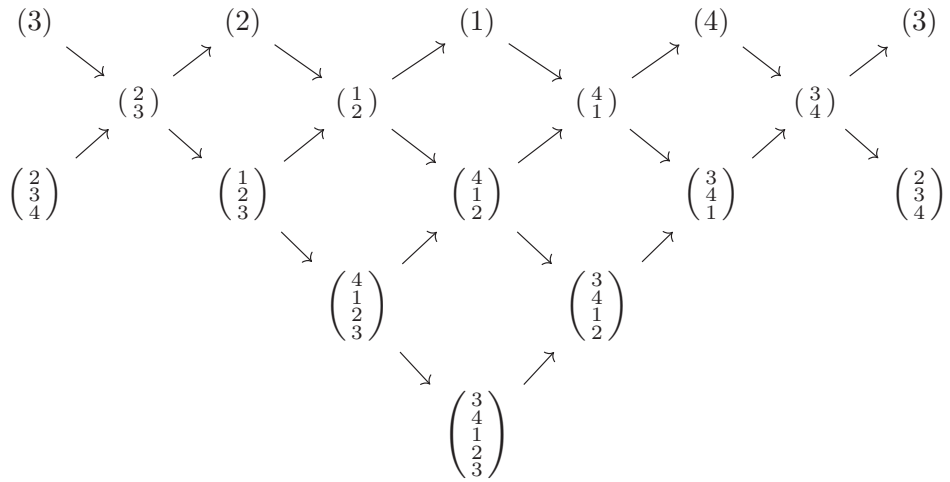
$$0 \rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0$$

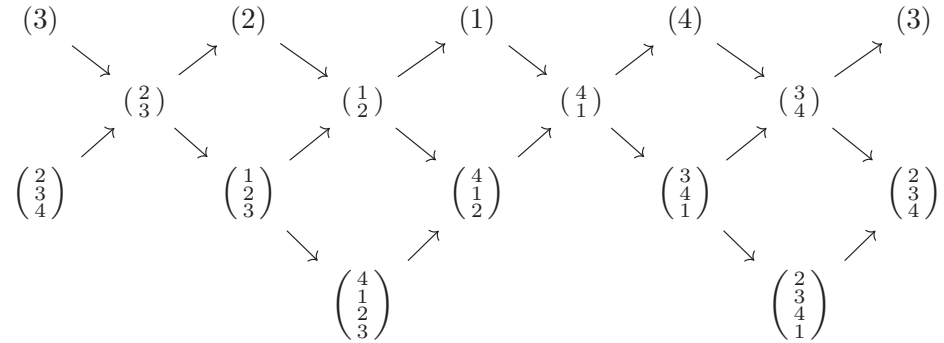
$$0 \rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 3$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0, \gamma\delta\alpha = 0$ の場合

AR-クイバーは



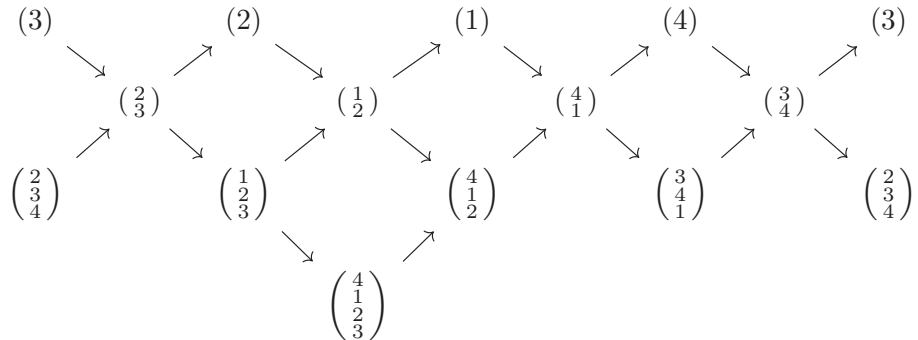
であり,

$$\cdots \rightarrow P(2) \rightarrow P(4) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = \infty$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\delta = 0, \gamma\delta\alpha = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0$$

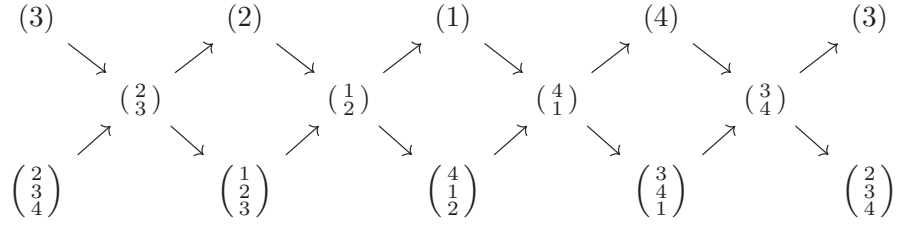
$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow P(2) \rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 5$ である;

- $\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\delta = 0, \gamma\delta\alpha = 0, \delta\alpha\beta = 0$ の場合 (自己移入多元環)

AR-クイバーは



であり,

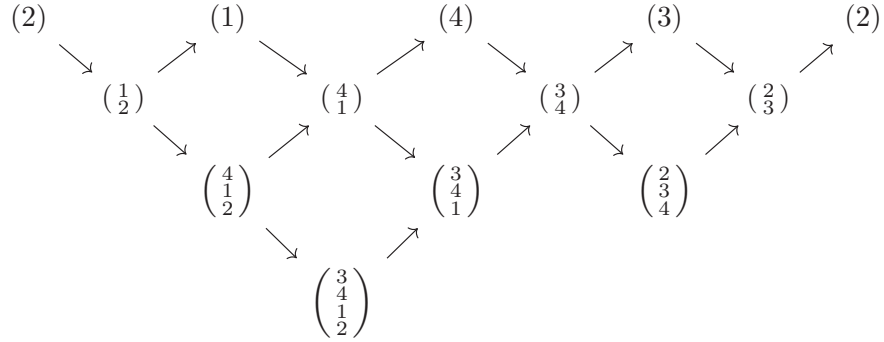
$$\cdots \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow P(4) \rightarrow$$

$$\rightarrow P(3) \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = \infty$ である;

- $\alpha\beta = 0, \beta\gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0$$

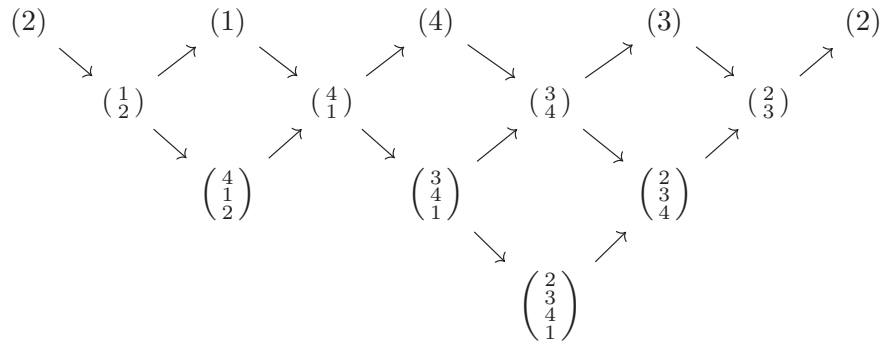
$$0 \rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 3$ である;

- $\alpha\beta = 0, \gamma\delta\alpha = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0$$

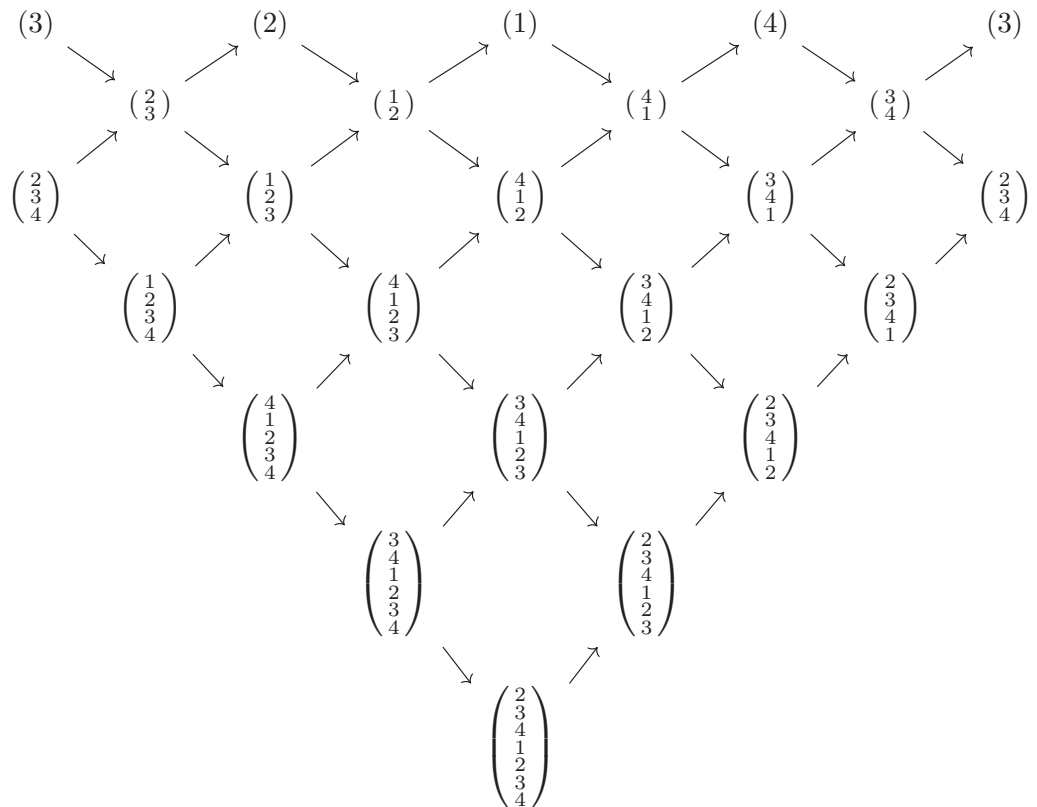
$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 3$ である;

- $\alpha\beta\gamma\delta = 0$ の場合

AR-クイバーは



であり,

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(3) \rightarrow P(2) \rightarrow S(2) \rightarrow 0$$

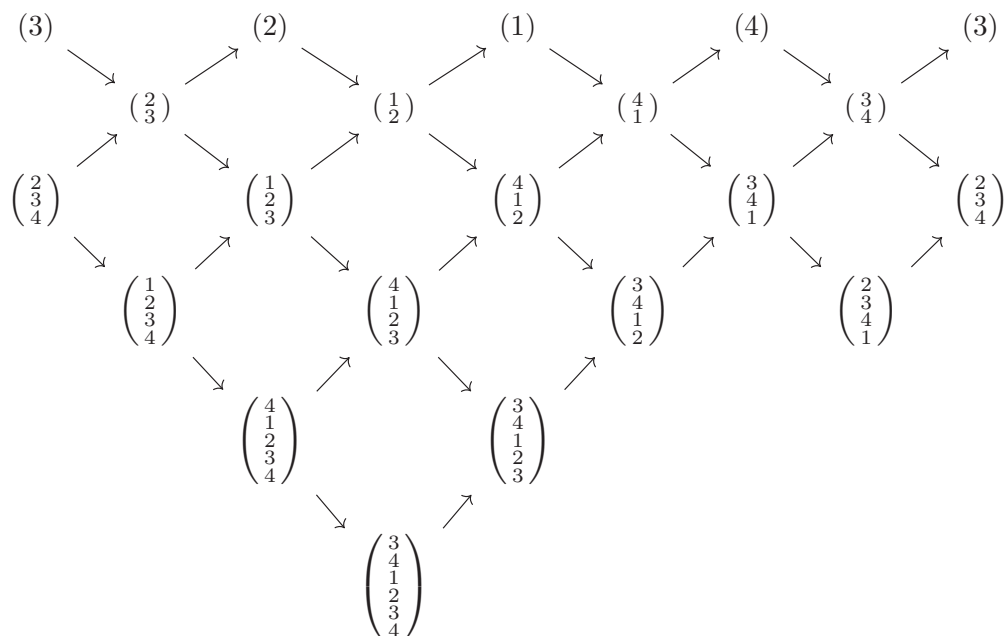
$$0 \rightarrow P(4) \rightarrow P(3) \rightarrow S(3) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P(1) \rightarrow P(4) \rightarrow S(4) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = 2$ である;

- $\alpha\beta\gamma\delta = 0, \beta\gamma\delta\alpha = 0$ の場合

AR-クイバーは



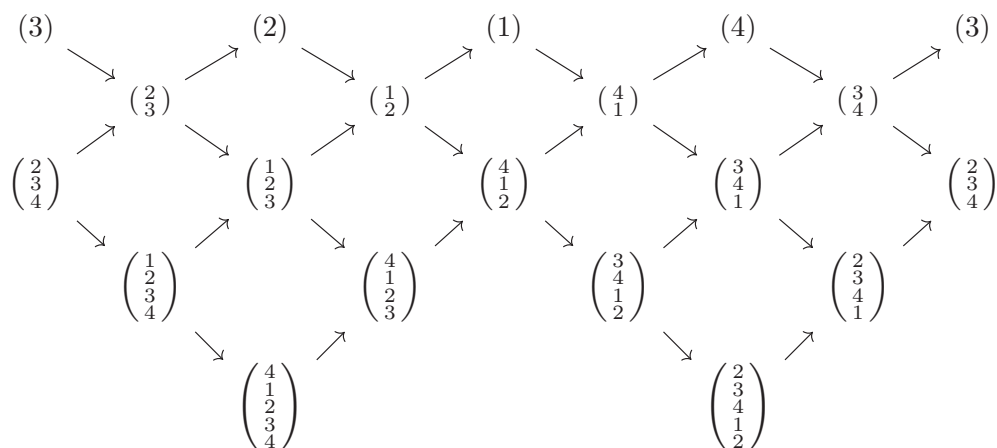
であり,

$$\cdots \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

より $\text{gl. dim } A = \infty$ である;

- $\alpha\beta\gamma\delta = 0, \gamma\delta\alpha\beta = 0$ の場合

AR-クイバーは



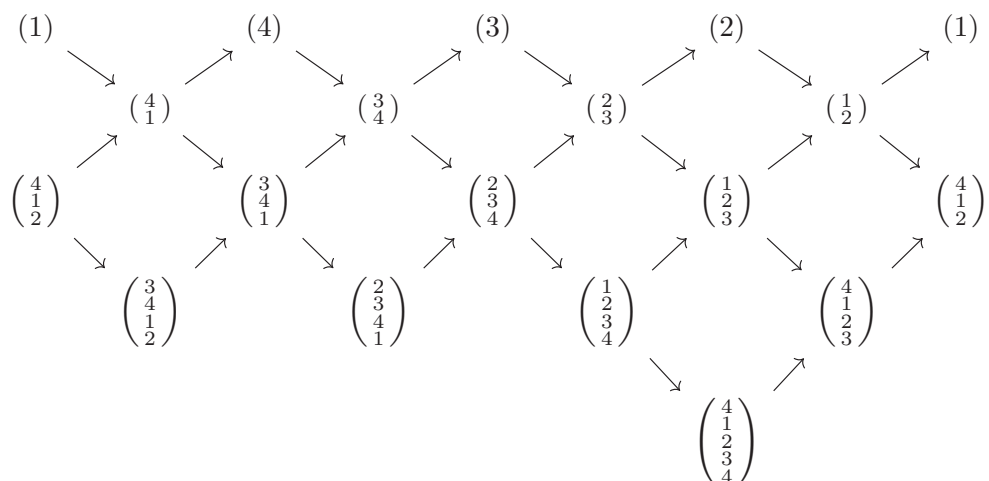
であり,

$$\cdots \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(1) \rightarrow P(3) \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

より $\text{gl.dim } A = \infty$ である;

- $\alpha\beta\gamma\delta = 0, \beta\gamma\delta\alpha = 0, \gamma\delta\alpha\beta = 0$ の場合

AR-クイバーは



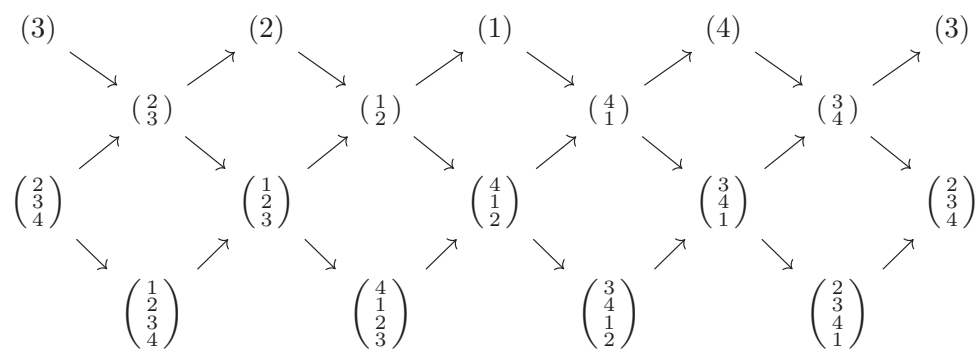
であり,

$$\cdots \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

より $\text{gl.dim } A = \infty$ である;

- $\alpha\beta\gamma\delta = 0, \beta\gamma\delta\alpha = 0, \gamma\delta\alpha\beta = 0, \delta\alpha\beta\gamma = 0$ の場合 (自己移入多元環)

AR-クイバーは



であり,

$$\cdots \rightarrow P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(1) \rightarrow S(1) \rightarrow 0$$

より $\text{gl.dim } A = \infty$ である.

以上の計算結果を以下の表にまとめる:

クイバー Q	関係 \mathcal{I}	$\text{gl. dim } KQ/\mathcal{I}$	ページ
Cyc ₃	$\alpha\beta = 0$	2	116
	$\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0$	3	116
	$\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0, \gamma\alpha = 0$	∞ (自己移入多元環)	116
	$\alpha\beta\gamma = 0$	2	117
	$\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\alpha = 0$	∞	117
	$\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\alpha = 0, \gamma\alpha\beta = 0$	∞ (自己移入多元環)	117 – 118
Cyc ₄	$\alpha\beta = 0$	2	118
	$\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0$	3	118 – 119
	$\alpha\beta = 0, \gamma\delta = 0$	2	119
	$\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0, \gamma\delta = 0$	4	119
	$\alpha\beta = 0, \beta\gamma = 0,$ $\gamma\delta = 0, \delta\alpha = 0$	∞ (自己移入多元環)	119 – 120
	$\alpha\beta\gamma = 0$	2	120
	$\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\delta = 0$	3	120 – 121
	$\alpha\beta\gamma = 0, \gamma\delta\alpha = 0$	∞	121
	$\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\delta = 0, \gamma\delta\alpha = 0$	5	121 – 122
	$\alpha\beta\gamma = 0, \beta\gamma\delta = 0,$ $\gamma\delta\alpha = 0, \delta\alpha\beta = 0$	∞ (自己移入多元環)	122
	$\alpha\beta = 0, \beta\gamma\delta = 0$	3	122
	$\alpha\beta = 0, \gamma\delta\alpha = 0$	3	122 – 123
	$\alpha\beta\gamma\delta = 0$	2	123 – 124
	$\alpha\beta\gamma\delta = 0, \beta\gamma\delta\alpha = 0$	∞	124
	$\alpha\beta\gamma\delta = 0, \gamma\delta\alpha\beta = 0$	∞	124 – 125
	$\alpha\beta\gamma\delta = 0, \beta\gamma\delta\alpha = 0, \gamma\delta\alpha\beta = 0$	∞	125
	$\alpha\beta\gamma\delta = 0, \beta\gamma\delta\alpha = 0,$ $\gamma\delta\alpha\beta = 0, \delta\alpha\beta\gamma = 0$	∞ (自己移入多元環)	125

5.3 主結果とその証明

前節の表を見ると、大域次元が無限で自己移入でない場合として、 $(\infty-1)$ から $(\infty-5)$ が確認できる。これらの場合を一般化することで、頂点の数が一般の n であるようなクイバー Cyc_n に特定の関係を入れることで大域次元が無限となるクラスを構成できるのではないか、という予想が得られる。この節では、実際にそのようなクラスが構成できたことを主定理として紹介し、その証明を述べる。そのために、一つ補題を準備しておこう。

補題 5.3.1. $1 \leq t < \ell\ell(P)$ とし、 $M \cong P/\text{rad}^t P$ を射影的でない直既約 A -加群とする。このとき、完全列

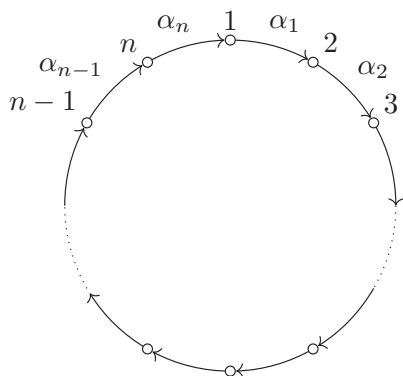
$$0 \rightarrow \text{rad } P/\text{rad}^{t+1} P \xrightarrow{\begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix}} (\text{rad } P/\text{rad}^t P) \oplus (P/\text{rad}^{t+1} P) \xrightarrow{\begin{bmatrix} -j & p \end{bmatrix}} P/\text{rad}^t P \rightarrow 0$$

は概分裂完全列となる。ここで、 i, j は包含写像、 p, q は自然な全射である。

証明. この完全列は分裂せず、両端は直既約であるから、定理 3.1.13 より $g = \begin{bmatrix} -j & p \end{bmatrix}$ が右概分裂であればよい。完全列が分裂しないことから明らかに g は引き込みでない。 V を直既約 A -加群とし、 $v : V \rightarrow M$ を非同型写像とする。まず、 v が全射でないとする。すると $\text{rad } M = \text{rad}(P/\text{rad}^t P) = \text{rad } P/\text{rad}^t P$ は M の唯一の極大部分加群より $\text{Im } v \subseteq \text{rad } M$ である。これより $\begin{bmatrix} -v \\ 0 \end{bmatrix} : V \rightarrow (\text{rad } P/\text{rad}^t P) \oplus (P/\text{rad}^{t+1} P)$ は $g \cdot \begin{bmatrix} -v \\ 0 \end{bmatrix} = v$ を満たす。一方で、 v を全射であると仮定すると、 v が非同型より $V \cong P/\text{rad}^s P$ なる $s \geq t+1$ が存在する。これより $v = pv'$ なる全射 $v' : V \rightarrow P/\text{rad}^{t+1} P$ が存在し、従って $g \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v' \end{bmatrix} = v$ を得る。 \square

さて、本稿における主定理を以下に述べる。これは、自己移入的でない有限表現型多元環の大域次元が無限となる非常に興味深いクラスである。

定理 5.3.2. A がクイバー



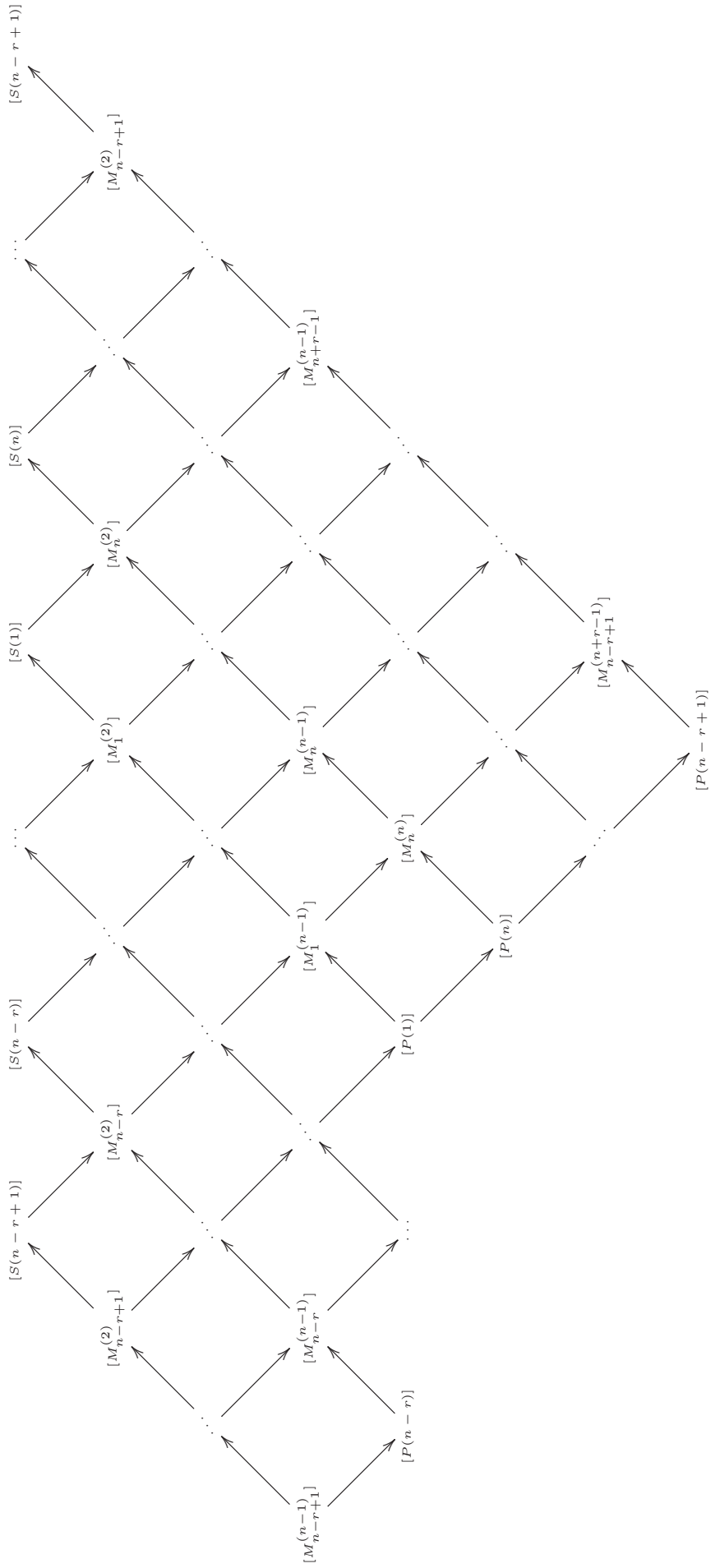
と関係

$$\begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = 0 \\ \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \alpha_{n-r+1} \cdots \alpha_{n-r-1} = 0 \end{cases}$$

$(1 \leq r \leq n-2)$ で与えられる中山多元環であるとする. このとき, A の AR-クイバーは次ページの図のようになる. ただし, 図中では $1 \leq i \leq n$ に対して

$$\begin{cases} M_i^{(n+r-1)} = P(i) / \text{rad}^{n+r-1} P(i) \\ \vdots \\ M_i^{(t)} = P(i) / \text{rad}^t P(i) \\ \vdots \\ M_i^{(2)} = P(i) / \text{rad}^2 P(i) \\ S(i) = P(i) / \text{rad} P(i) \end{cases}$$

とおいた. 特に, $\text{gl. dim } A = \infty$ である.



証明. 各 $1 \leq i \leq n$, $1 \leq t < \ell(P(i))$ に対して,

$$0 \rightarrow M_{i+1}^{(t)} \rightarrow M_{i+1}^{(t-1)} \oplus M_i^{(t+1)} \rightarrow M_i^{(t)} \rightarrow 0$$

が概分裂完全列であることを証明する. これが示されたとすると, $\ell(P(1)) = \dots = \ell(P(n-r)) = n$, $\ell(P(n-r+1)) = n+r$, \dots , $\ell(P(n-1)) = n-2$, $\ell(P(n)) = n+1$ より AR-クイバーは示したいものとわかる. $M_{i+1}^{(t)} = P(i+1)/\text{rad}^t P(i+1) = \begin{pmatrix} i+1 \\ i+2 \\ \vdots \\ i+t \end{pmatrix} \pmod{n}$ である.

一方, $\text{rad} P(i) = \begin{pmatrix} i+1 \\ i+2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ であり, $\ell(\text{rad} P(i)) = \ell(P(i)) - 1 > t-1$, つまり $\ell(\text{rad} P(i)) \geq t$

に注意すると, $\text{rad} P(i)/\text{rad}^{t+1} P(i) = \text{rad} P(i)/\text{rad}^t(\text{rad} P(i)) = \begin{pmatrix} i+1 \\ \vdots \\ i+t \end{pmatrix}$ である. 従って同型 $M_{i+1}^{(t)} \cong \text{rad} P(i)/\text{rad}^{t+1} P(i)$ を得る. 同様にして, 同型 $M_{i+1}^{(t-1)} \cong \text{rad} P(i)/\text{rad}^t P(i)$ が得られるため, 上の完全列は

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{rad} P(i)/\text{rad}^{t+1} P(i) &\rightarrow \text{rad} P(i)/\text{rad}^t P(i) \oplus P(i)/\text{rad}^{t+1} P(i) \\ &\rightarrow P(i)/\text{rad}^t P(i) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

とかくことができ, 補題 5.3.1 よりこの完全列は概分裂完全列であることがわかる. 以上により A の AR-クイバーが定理の形で与えられることの証明が完成する. 特に, 定理 4.3.5 より $P(i) \rightarrow P(i)/\text{rad}^t P(i)$ は射影被覆であるから, $S(1) = P(1)/\text{rad} P(1)$ について極小射影分解を考えれば,

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow P(1) & \xrightarrow{\quad} & P(2) & \xrightarrow{\quad} & P(1) & \xrightarrow{\quad} & S(1) \rightarrow 0 \\ & \searrow \text{dotted} & & \searrow \text{dotted} & & & \parallel \\ & \text{rad}^{n-1} P(2) & & \text{rad} P(1) & & & P(1)/\text{rad} P(1) \\ & \parallel & & \parallel & & & \\ & S(1) & & P(2)/\text{rad}^{n-1} P(2) & & & \end{array}$$

より $\text{gl. dim } A = \infty$ である. □

この定理は, 前節 (126 ページ) の表の $(\infty-1), (\infty-3), (\infty-5)$ の一般化となっている. これにより有限表現型でかつ自己移入的でない多元環であり, 大域次元が無限となるようなクラスを構成することができた. 一方で, 前節の表の $(\infty-2), (\infty-4)$ も, 自己移入的でない有限表現型多元環で, 大域次元が無限であるが, このクラスに含まれない多元環の例である. このような場合についても定理 5.3.2 のように広いクラスへと拡張できるか, という問いが今後の課題である.

参考文献

- [1] 岩永恭雄, 佐藤眞久 『環と加群のホモロジー代数的理論』 (2002, 日本評論社)
- [2] 山浦浩太 『原田多元環の表現論』 (2009, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科修士論文)
- [3] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

- [4] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics 36, Cambridge University Press, 1995.
- [5] T. Nakayama, *Note on uni-serial and generalized uni-serial rings*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 16, 285-289, 1940.
- [6] T. Nakayama, *On Frobeniusean algebras II*, Ann. of Math. 42, 1-21, 1941.