弘前大学教育学部紀要　第127号：57～66（2022年３月）
Bull. Fac. Educ. Hirosaki Univ. 127：57～66（Mar. 2022）

隣接*m*項間漸化式で定まる数列の下一桁の周期性

Periodicity of the last digits of sequences defined by *m*-term recurrence relations

山上　佳男・上山　健太＊・田中　義久＊
Yoshio YAMANOUE・Kenta UEYAMA*・Yoshihisa TANAKA*

要　旨

数列の周期性は数学的に面白く，数学教育の観点からも重要である．本研究の目的は，隣接３項間や隣接４項間の漸化式で定まる数列の下一桁の周期性に関する考察を基に，一般の隣接 m 項間漸化式で定まる数列に対して，その下一桁の周期性を明らかにすることである．主な結果として，「型の基本定理」とも言える２つの定理を示す．具体的には，

（1）漸化式で定まる数列の下一桁の周期の種類である「型」の分類

（2）「型」のうち，漸化式で定まる数列の下一桁が初項からある項までの繰り返しとなる「E 型」の特徴づけ

を与える．特に，（2）は数列の下一桁に限らず，数列の各項を自然数 n で割った余りに置き換えても類似の結果が成立する．

キーワード：漸化式，行列，下一桁，法 n，周期，型，オイラーの定理

１．研究の目的と方法

フィボナッチ数列（隣接３項間漸化式 $a_1=0, a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n (n\geqq 1)$ で定まる数列）には多くの興味深い性質が潜んでおり，様々な教材研究や実践研究がなされてきている．例えば，高校生を対象として，フィボナッチ数列の剰余の周期性に着目した実践が報告されている[1)]．また，フィボナッチ数列の初期値 a_1, a_2 を一桁の数に拡張し，その数列の下一桁が持つ周期性に着目した教材「17段目のなぞ」は，小学校教材として開発[2)]され中学校や高等学校でも実践されている[a)]．さらに，最近提案された探究課題「17段目のなぞの発展」[6)]は，一般の隣接３項間漸化式で定まる数列の下一桁の周期性について考察するものである．この探究課題は，高等学校数学の数列単元の範囲内で解決することを意図した発展教材である．

中学校や高等学校での教材という点で言えば，フィボナッチ数列や隣接３項間漸化式に注目することは自然である．しかし数学的には，一般の隣接 m 項間漸化式へと考察の対象を広げて，周期に関する性質を明確化するという探究が可能である．一般の状況を理解することで，その一部となる教材に対する視野が広げられるにもかかわらず，管見の限り，発展的な教材研究を意図し，フィボナッチ数列や隣接３項間漸化式から離れて，隣接４項間漸化式や一般の隣接 m 項間漸化式で定まる数列の下一桁の周期性を簡潔に説明している先行研究は見つけられなかった．そこで，本稿では，隣接３項間や隣接４項間の漸化式を含む隣接 m 項間漸化式を考察の対象に据え，これらで定まる数列の下一桁に共通する周期性を明らかにすることを目的とする．

このために，まず，隣接３項間漸化式で定まる数列の下一桁の周期性を，その先の考察を見据えて，行列を用いて考察する（第２章）．次に，隣接４項間漸化式で定まる数列の下一桁の周期性に関する考察を行う（第３章）．この章では，周期に関する特徴の一つである「型」の分類や，最も基本的な「型」である「E 型」の判定方法（特徴づけ）を考察するとともに，これらの結果が正しいことをコンピュータも活用し表にまとめて確認する．さらに，一般の隣接 m 項間漸化式に

＊弘前大学教育学部数学教育講座
Department of Mathematics Education, Faculty of Education, Hirosaki University

対して，下一桁の「型」の種類の分類や「E 型」の判定方法など，周期の特徴を考察する（第４章）．なお，この「E 型」の判定方法については，数列の下一桁のみならず，自然数 n を法とした余りにしても成立する．最後に，本稿の結果の意義を数学的な側面から考察する（第５章）とともに，教材研究の側面から考察する（第６章）．

以下では，数列の下一桁を考察するために，10を法とする合同式 $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ 10)$ が多用されるが，混乱のない限り $(\mathrm{mod}\ 10)$ を省略することにする．また，同じサイズの整数成分行列 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ に対して「$A\equiv B$」を，任意の i,j について $a_{ij}\equiv b_{ij}\ (\mathrm{mod}\ 10)$ を満たすときと定める．そして，数列の第 n 項の下一桁，すなわち，第 n 項を10で割ったときの余りを「n 段目の数」と呼ぶことにする．

さらに，隣接 m 項間漸化式の「型」を次のように定義する．まず，『ある自然数 d が存在して，初期値をどう決めても $(k+1)$ 段目の数以降が長さ d の数列の繰り返しになっている』が成り立つとき，$A^{\leqq k}$ を満たすという．$A^{\leqq 0}$を満たすとき，A^0型と定める．また，$k\geqq 1$に対して，$A^{\leqq k}$ を満たし，$A^{\leqq k-1}$を満たさないとき，A^k 型と定める．加えて，A^k 型であるとき，上記の二重括弧を満たす d のうち最小のものを「周期」という．以下では，A^0型を E 型，A^1型を A 型と表記する．

２．隣接３項間漸化式について

この章では，「17段目のなぞ」や「17段目のなぞの発展」で考察された隣接３項間漸化式で定まる数列の下一桁の周期性を行列の視点で捉え直す．具体的には，次の漸化式を考察する．

$$a_1=a,\ a_2=b,\ a_{n+2}=sa_{n+1}+ta_n\ \ (n\geqq 1) \qquad \cdots①$$

ただし，$a,b,s,t\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ とする．このとき，探究課題「17段目のなぞの発展」では，次の命題が証明されている（表１参照）．

> **命題2-1**　すべての場合は，E 型，A 型，A^2型のいずれかになる．特に，$t=1,3,7,9$ の場合は E 型，それ以外の t では A 型または A^2型になる．また，すべての場合で周期は120の約数である．

さてここで，$Z_{10}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ とおき，すべての成分が Z_{10}の要素からなる n 次正方行列全体の集合を $\mathrm{M}(n,Z_{10})$ とする．また $A\in\mathrm{M}(n,Z_{10})$ のうち，ある $B\in\mathrm{M}(n,Z_{10})$ が存在して $AB\equiv BA\equiv E$ となるもの全体の集合を $\mathrm{GL}(n,Z_{10})$ と定める．ただし E を n 次単位行列とする．このときの行列 B を「A の $\mathrm{M}(n,Z_{10})$ における逆行列」という．

ここで $A=\begin{pmatrix}0&t\\1&s\end{pmatrix}$ とおくと，$A\in\mathrm{M}(2,Z_{10})$ である．ケーリー・ハミルトンの定理[b] より $A^2=sA+tE$ なので，漸化式①で定まる数列は

$$a_n\equiv(a\quad b)A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \cdots②$$

を満たすことが分かる．

(②の証明)

(Ⅰ) $n=1,2$ のとき，

$$(a\quad b)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=a,\quad (a\quad b)A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(a\quad b)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=b$$

より，成り立つ．

(Ⅱ) $n\leqq k$（ただし $k\geqq 2$）で②が成立すると仮定すると，$n=k+1$ のとき

$$(a\quad b)A^k\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(a\quad b)A^{k-2}A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(a\quad b)A^{k-2}(sA+tE)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$=s(a\quad b)A^{k-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+t(a\quad b)A^{k-2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\equiv sa_k+ta_{k-1}=a_{k+1}$$

より，②は $n=k+1$ のときも成立する．

以上（Ⅰ）（Ⅱ）より，数学的帰納法によってすべての自然数 n に対して②は成立する．■

これより，数列 $\{a_n\}$ の下一桁の周期性は，行列の累乗の列 $\{A^{n-1}\}$ の周期性と密接に関係する．具体的には「E 型であること」と「$A^d\equiv E$ を満たす $d>0$が存在すること」は同値である．また，$k\geqq 1$に対し「A^k 型であること」と「$A^d\equiv A^k$ を満たす $d>k$ が存在し $A^{d'}\equiv A^{k-1}$を満たす $d'>k-1$が存在しないこと」が同値である．同様の同値性は隣接 m 項間漸化式($m\geqq 2$)でも成立する．

<u>例2-1</u>　$s=2,t=3$のとき，$A=\begin{pmatrix}0&3\\1&2\end{pmatrix}$より行列の累乗の列 $\{A^{n-1}\}$ は，$A^2\equiv 2A+3E, A^3\equiv 7A+6E, A^4\equiv E$ となり，$A^5\equiv A, A^6\equiv A^2, A^7\equiv A^3, A^8\equiv A^4\equiv E,\cdots$と続くので，周期４の E 型になる（表１参照）．

実際このとき $\{a_n\}$ は，

$$a_5\equiv(a\quad b)A^4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv(a\quad b)E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv a=a_1,$$

$$a_6\equiv(a\quad b)A^5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv(a\quad b)A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv b=a_2,$$

$$a_7\equiv a_3,\ a_8\equiv a_4,\cdots$$

となり，確かに周期４の E 型と確認できる．ここで，$B=\begin{pmatrix}6&1\\7&0\end{pmatrix}\in\mathrm{M}(2,Z_{10})$ とおくと，

$$AB=\begin{pmatrix}21&0\\20&1\end{pmatrix}\equiv E,\quad BA=\begin{pmatrix}1&20\\0&21\end{pmatrix}\equiv E$$

より $A\in\mathrm{GL}(2,Z_{10})$ である．

例2-2　$s=2, t=8$のとき，$A=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$より行列の累乗の列 $\{A^{n-1}\}$ は $A^2\equiv 2A+8E, A^3\equiv 2A+6E, A^4\equiv 6E, A^5\equiv 6A, A^6\equiv 2A+8E\equiv A^2$ となり，$A^7\equiv A^3, A^8\equiv A^4, A^9\equiv A^5, A^{10}\equiv A^6\equiv A^2,\cdots$と続くので，周期４の$A^2$型になる（表１参照）．

実際このとき $\{a_n\}$ は，

$$a_7\equiv(a\quad b)A^6\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv(a\quad b)A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv a_3,$$

$$a_8\equiv(a\quad b)A^7\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv(a\quad b)A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv a_4,$$

$$a_9\equiv a_5,\ a_{10}\equiv a_6,\ \cdots$$

となり，確かに周期４のA^2型と確認できる．ここで，$B=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in \mathrm{M}(2,Z_{10})$とおくと，

$$AB\equiv\begin{pmatrix}8z & 8y\\ x+2z & y+2w\end{pmatrix},\quad BA\equiv\begin{pmatrix}y & 2(4x+y)\\ w & 2(4z+w)\end{pmatrix}$$

だが，$z,w\in Z_{10}$より，$8z\equiv 1$ や $2(4z+w)\equiv 1$は成立しないので，$AB\equiv E$や$BA\equiv E$は成り立たない．従って，Aは$\mathrm{GL}(2,Z_{10})$ に属していないことになる．

この２つ例はともに$A^6\equiv A^2$となるが，型が異なる．さらに前者はAが$\mathrm{GL}(2,Z_{10})$ に属するのに対して，後者は属さない点に違いがある．

一方，①において$s=1, t=1$としたときは，「17段目のなぞ」に関係する，フィボナッチ数列の初期値を一桁の数に拡張した数列となる．このとき$A^{15}\equiv 7E$となることから，②より，

$$a_{16}\equiv(a\quad b)A^{15}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}a\equiv(a\quad b)7E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv 7a_1\equiv 7a,$$

$$a_{17}\equiv(a\quad b)A^{16}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}a\equiv(a\quad b)7A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv 7a_2\equiv 7b \quad\cdots③$$

となる．「17段目のなぞ」とは，この③の規則性に着目したものである．このとき，行列の累乗の列 $\{A^{n-1}\}$ は，

$$A^{30}=(A^{15})^2\equiv(7E)^2\equiv 9E,\quad A^{60}=(A^{30})^2\equiv(9E)^2\equiv E$$

となることから，周期60のE型であることが得られる．このとき確かに，

$$a_{61}\equiv(a\quad b)A^{60}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv(a\quad b)E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv a_1\equiv a$$

$$a_{62}\equiv(a\quad b)A^{61}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv(a\quad b)A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv a_2\equiv b$$

となっている．

３．隣接４項間漸化式について

この章では，次の隣接４項間漸化式を考察する．

$$a_1=a,\ a_2=b,\ a_3=c,$$

$$a_{n+3}=sa_{n+2}+ta_{n+1}+ua_n\quad(n\geqq 1)\qquad\cdots④$$

ただし，$a,b,c,s,t,u\in Z_{10}$とする．以下では，隣接４項間漸化式に対し「型の基本定理」と言える２つの命題（命題3-1，3-2）を証明する．

まず，④に対応する行列は$A=\begin{pmatrix}0&0&u\\1&0&t\\0&1&s\end{pmatrix}$ …⑤となり，ケーリー・ハミルトンの定理より，

$$A^3=sA^2+tA+uE\qquad\cdots⑥$$

が成り立つ．また，$a_n\equiv(a\quad b\quad c)A^{n-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ …⑦を満たす．

> **命題3-1**　すべての場合は，E型，A型，A^2型，A^3型のいずれかである．

（証明）成分がZ_{10}の要素からなる３次の正方行列は，最大10^9個しかないので，Aの累乗$A^\ell\,(\ell\geqq 0)$を順に並べた列 $\{A^\ell\}$ は，いずれ循環する．従って，

$$A^d\equiv A^k\quad(d>k)\qquad\cdots⑧$$

となる非負整数の組d,kが存在する．このような組d,kのうち，kが最小のものを一つ選んでおく．このとき，$k=0$ならばE型，$k=1$ならばA型，$k=2$ならばA^2型，$k=3$ならばA^3型である．そこで$k\geqq 4$と仮定すると，⑥$\times A^{d-1}$より，

$$uA^{d-1}=A^{d+2}-sA^{d+1}-tA^d.$$

また⑧より，$A^{d+2}\equiv A^{k+2}$，$A^{d+1}\equiv A^{k+1}$ …⑨となる．さらに⑧⑨や⑥$\times A^{k-1}$より，$uA^{d-1}\equiv uA^{k-1}$ …⑩である．

次に，

$$\begin{aligned}
u^2A^{d-2}&\equiv u(uA^{d-2})\\
&\equiv u(A^{d+1}-sA^d-tA^{d-1})\quad(⑥\times A^{d-2}\text{より})\\
&\equiv u(A^{d+1}-sA^d)-t(uA^{d-1})\\
&\equiv u(A^{k+1}-sA^k)-t(uA^{k-1})\quad(⑧⑨⑩\text{より})\\
&\equiv u(A^{k+1}-sA^k-tA^{k-1})\\
&\equiv u(uA^{k-2})\quad(⑥\times A^{k-2}\text{より})\\
&\equiv u^2A^{k-2}
\end{aligned}$$

より，この両辺にu^3をかけると，$u^5A^{d-2}\equiv u^5A^{k-2}$．このとき任意の$u$に対して，$u^5\equiv u\,(\mathrm{mod}10)$ より，

$$uA^{d-2}\equiv uA^{k-2}.\qquad\cdots⑪$$

同様に$uA^{d-3}\equiv uA^{k-3}, uA^{d-4}\equiv uA^{k-4}$ …⑫となる．

次に⑥$\times A^{d-2}$より，$tA^{d-1}=A^{d+1}-sA^d-uA^{d-2}$．

さらに⑧⑨⑪や⑥$\times A^{k-2}$より　$tA^{d-1}\equiv tA^{k-1}$ …⑬である．また，

$$\begin{aligned}
t^2A^{d-2}&=t(tA^{d-2})\\
&=t(A^d-sA^{d-1}-uA^{d-3})\quad(⑥\times A^{d-3}\text{より})\\
&=tA^d-s(tA^{d-1})-t(uA^{d-3})\\
&\equiv tA^k-s(tA^{k-1})-t(uA^{k-3})\quad(⑧⑫⑬\text{より})\\
&\equiv t(A^k-sA^{k-1}-uA^{k-3})\\
&\equiv t^2A^{k-2}\quad(⑥\times A^{k-3}\text{より})
\end{aligned}$$

が成り立つ．この両辺に t^3 をかけると $t^5\equiv t$ より，$tA^{d-2}\equiv tA^{k-2}$ …⑭を得る．同様に，$tA^{d-3}\equiv tA^{k-3}$ …⑮も得られる．

さらに，⑧⑫⑭や⑥× A^{d-3} より，$sA^{d-1}\equiv sA^{k-1}$ であり，上と同様の議論により，$s^2A^{d-2}\equiv s^2A^{k-2}$ が成り立つ．この両辺に s^3 をかけると $s^5\equiv s$ より，$sA^{d-2}\equiv sA^{k-2}$ …⑯を得る．

従って，仮定より $d>k\geqq 4$ なので⑥× A^{d-4} から，

$$\begin{aligned} A^{d-1} &= sA^{d-2}+tA^{d-3}+uA^{d-4} \\ &\equiv sA^{k-2}+tA^{k-3}+uA^{k-4} \quad (⑫⑮⑯より) \\ &\equiv A^{k-1} \quad (⑥\times A^{k-4}より) \end{aligned}$$

を得る．これは⑧が成立する k の最小性に矛盾する．よって，背理法により $k\geqq 4$ とはならない．以上より，すべての場合は E 型，A 型，A^2 型，A^3 型のいずれかになることが証明された．■

命題3-2　次の３つの条件は同値である．
（1）$u=1,3,7,9$　（2）$A\in \mathrm{GL}(3,Z_{10})$　（3）E 型

（証明）(i)「（1）⇒（2）」の証明：

まず $u=1,3,7,9$ より，$u^4\equiv 1$ …⑰が成り立つ．⑰より，$u\cdot u^3=u^3\cdot u\equiv 1$ と変形できるので，u^3 は u の10を法とする逆元となっている．$B=\begin{pmatrix}-tu^3 & 1 & 0\\ -su^3 & 0 & 1\\ u^3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ とおくと，⑰より，

$$AB=\begin{pmatrix}0&0&u\\1&0&t\\0&1&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-tu^3 & 1 & 0\\ -su^3 & 0 & 1\\ u^3 & 0 & 0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}u^4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\equiv E$$

$$BA=\begin{pmatrix}-tu^3 & 1 & 0\\ -su^3 & 0 & 1\\ u^3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&u\\1&0&t\\0&1&s\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0&-tu^4+t\\0&1&-su^4+s\\0&0&u^4\end{pmatrix}\equiv E$$

が成立する．ここで，$\bar{B}\equiv B$，$\bar{B}\in \mathrm{M}(3,Z_{10})$ を満たす行列 $\bar{B}$ をとると，$\bar{B}A\equiv BA=E$，$A\bar{B}\equiv AB=E$ が成り立つので，$A\in \mathrm{GL}(3,Z_{10})$ である．

(ii)「(2)⇒(3)」の証明：

命題3-1と同様の理由から，行列 A の累乗 A^{ℓ}（$\ell\geqq 0$）を順に並べた列 $\{A^{\ell}\}$ はいずれ循環する．これより，$A^d\equiv A^k(d>k)$ を満たす d,k が存在する．このとき，A の $\mathrm{M}(3,Z_{10})$ における逆行列 B を両辺に繰り返し掛けることで，$A^{d-k}\equiv E$ となるので，E 型である．

(iii)「(3)⇒(1)」の証明：

E 型であることより，$A^{\ell}\equiv E$　$(\ell>1)$ となる．ここで $A^{\ell-1}=X$ とすると　$AX\equiv E$．つまり，

$$\begin{pmatrix}0&0&u\\1&0&t\\0&1&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

となる．このとき両辺の（1,1）成分を比較すると $ux_{31}\equiv 1$ を得る．$u=0,2,4,6,8$ のとき，この式は成り立たない．よって，$u=1,3,7,9$ である．

以上より，３つの条件 (1)(2)(3) は同値であることが証明された．■

さて，証明（i）では「法10のもとで⑰が成り立つ」ことが重要であったが，オイラーの定理より「a と n を互いに素な自然数とし，$\varphi(n)$ を n と互いに素な n 以下の自然数の個数とするとき，$a^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$」が成り立つ．従って，命題3-2の「$u=1,3,7,9$」は「$u$ は10と互いに素」と考えるのが自然である．

参考結果として，コンピュータを活用して計算した隣接４項間漸化式のすべての場合の型や周期を表２として記載する．命題3-1，3-2が正しいことは表２でも確認できる．

４．隣接 *m* 項間漸化式について

この章では，$m\geqq 2$ とし，一般の隣接 m 項間漸化式について考察する．

$$a_{n+m-1}=s_{m-2}\,a_{n+m-2}+s_{m-3}\,a_{n+m-3}+\cdots+s_1\,a_{n+1}+s_0\,a_n \quad (n\geqq 1) \quad \cdots⑱$$

ただし，$a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, s_0, s_1, \cdots, s_{m-2}\in Z_{10}$ とする．この章の目的は，３章の議論を一般化し，隣接 m 項間漸化式に対して「型の基本定理」と言える２つの定理（定理4-1，4-2）を証明することである．さらに，型の必要または十分条件をいくつか与える（定理4-3，系4-4）．

ここで，漸化式⑱に対応する行列は

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&s_0\\1&0&\cdots&0&s_1\\0&1&\cdots&0&s_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&s_{m-2}\end{pmatrix} \quad \cdots⑲$$

となる．ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^{m-1}=s_{m-2}A^{m-2}+s_{m-3}A^{m-3}+\cdots+s_1A+s_0E \cdots⑳$$

が成り立つ．まず「型の基本定理」の１つ目を証明する．

定理4-1　すべての場合は，E 型，A 型，A^2 型，…，A^{m-1} 型のいずれかである．

（証明）命題3-1と同様に，成分が Z_{10} の要素からなる $(m-1)$ 次の正方行列は，最大 $10^{(m-1)^2}$ 個しかないので，A の累乗 A^{ℓ}（$\ell\geqq 0$）を順に並べた列 $\{A^{\ell}\}$ は，いずれ循環する．すなわち $A^d\equiv A^k(d>k)$　…㉑を満たす非負整数の組 d,k が存在する．このような組 d,k のうち，k が最小のものを一つ選ぶ．ここで，$k\geqq m$ と仮定し，

矛盾を導く．㉑から $A^{d+h}\equiv A^{k+h}$（$h\geqq 1$）　…㉒が成り立つことに注意すると，$d>k\geqq m$ や⑳ × A^{d-1}より

$$s_0A^{d-1}\equiv A^{d+m-2}-s_{m-2}A^{d+m-3}\cdots-s_2A^{d+1}-s_1A^d$$
$$\equiv A^{k+m-2}-s_{m-2}A^{k+m-3}\cdots-s_2A^{k+1}-s_1A^k$$
（㉑㉒より）
$$\equiv s_0A^{k-1}\qquad (⑳\times A^{k-1}\text{より})\qquad \cdots ㉓$$

となる．また，

$$s_0^2A^{d-2}\equiv s_0(s_0A^{d-2})$$
$$\equiv s_0(A^{d+m-3}-s_{m-2}A^{d+m-4}\cdots-s_2A^d-s_1A^{d-1})$$
（⑳ × A^{d-2}より）
$$\equiv s_0(A^{d+m-3}-s_{m-2}A^{d+m-4}\cdots-s_2A^d)-s_1(s_0A^{d-1})$$
$$\equiv s_0(A^{k+m-3}-s_{m-2}A^{k+m-4}\cdots-s_2A^k)-s_1(s_0A^{k-1})$$
（㉑㉒㉓より）
$$\equiv s_0(A^{k+m-3}-s_{m-2}A^{k+m-4}\cdots-s_2A^k-s_1A^{k-1})$$
$$\equiv s_0^2A^{k-2}\qquad (⑳\times A^{k-2}\text{より})\qquad \cdots ㉔$$

が成り立つ．ここで $s_0^5\equiv s_0$ より㉔の両辺に s_0^3をかけると，$s_0A^{d-2}\equiv s_0A^{k-2}$　…㉕を得る．

以下同様にして

$$s_0A^{d-3}\equiv s_0A^{k-3},\cdots,s_0A^{d-m+1}\equiv s_0A^{k-m+1}\qquad \cdots ㉖$$

が成り立つ．ここで，⑳ × A^{d-m} より

$$s_0^2A^{d-m}\equiv s_0(s_0A^{d-m})$$
$$\equiv s_0(A^{d-1}-s_{m-2}A^{d-2}\cdots-s_2A^{d-m+2}-s_1A^{d-m+1})$$
$$\equiv s_0A^{d-1}-s_{m-2}s_0A^{d-2}\cdots-s_2s_0A^{d-m+2}-s_1s_0A^{d-m+1}$$
$$\equiv s_0A^{k-1}-s_{m-2}s_0A^{k-2}\cdots-s_2s_0A^{k-m+2}-s_1s_0A^{k-m+1}$$
（㉓㉕㉖より）
$$\equiv s_0(A^{k-1}-s_{m-2}A^{k-2}\cdots-s_2A^{k-m+2}-s_1A^{k-m+1})$$
$$\equiv s_0^2A^{k-m}\qquad (⑳\times A^{k-m}\text{ より})$$

となる．この両辺に s_0^3をかけると $s_0^5\equiv s_0$ より $s_0A^{d-m}\equiv s_0A^{k-m}$　…㉗を得る．これまでと同様にすると $x=1,2,\cdots,m-2$ のとき，順次 $s_1A^{d-x}\equiv s_1A^{k-x}$ が成り立つことから，$s_1A^{d-m+1}\equiv s_1A^{k-m+1}$　…㉘となる．以下同様にして，

$$s_2A^{d-m+2}\equiv s_2A^{k-m+2},\cdots,s_{m-2}A^{d-2}\equiv s_{m-2}A^{k-2}\qquad \cdots ㉙$$

も成り立つので，⑳ × A^{d-m} より

$$A^{d-1}\equiv s_{m-2}A^{d-2}+s_{m-3}A^{d-3}+\cdots+s_1A^{d-m+1}+s_0A^{d-m}$$
$$\equiv s_{m-2}A^{k-2}+s_{m-3}A^{k-3}+\cdots+s_1A^{k-m+1}+s_0A^{k-m}$$
（㉗㉘㉙より）
$$\equiv A^{k-1}\qquad (⑳\times A^{k-m}\text{ より})$$

を得る．これは㉑が成立する k の最小性に矛盾する．よって，背理法により $k\geqq m$ とはならない．

以上より，すべての場合は E 型，A 型，A^2型，…，A^{m-1}型のいずれかになる．■

さて，ここまで下一桁に着目してきたが，「型の基本定理」の２つ目となる次の定理 4-2 では，数列の各項を，10を含め一般の自然数 n で割った余りに置き換え，一般化して考えることにする．このとき，「初期値をどう決めても，定まる数列の各項を n で割った余りが初項からある項までの部分の周期的な繰り返しになること」を改めて E 型と呼ぶことにする．また，$Z_n=\{0,1,2,3,\cdots,n-1\}$ とおき，漸化式⑱の係数を Z_{10}でなく Z_n に属することにする．$\mathrm{M}(m-1,Z_n)$ や $\mathrm{GL}(m-1,Z_n)$ も法を n に変えて同様に定義する．

定理4-2　法 n のもと，次の３つの条件は同値である．
(1) 係数 s_0と n は互いに素　(2) $A\in\mathrm{GL}(m-1,Z_n)$
(3) E 型

（証明）(i)「(1)⇒(2)」の証明：

(1) よりオイラーの定理から $s_0^{\varphi(n)}\equiv 1\pmod n$ が成り立つ．このとき

$$B=\begin{pmatrix} -s_1s_0^{\varphi(n)-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -s_2s_0^{\varphi(n)-1} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -s_3s_0^{\varphi(n)-1} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -s_{m-3}s_0^{\varphi(n)-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ s_0^{\varphi(n)-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とすると，n を法として

$$AB=\begin{pmatrix} s_0^{\varphi(n)} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\equiv E$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -s_1s_0^{\varphi(n)}+s_1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -s_2s_0^{\varphi(n)}+s_2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -s_3s_0^{\varphi(n)}+s_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -s_{m-3}s_0^{\varphi(n)}+s_{m-3}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & s_0^{\varphi(n)} \end{pmatrix}\equiv E$$

が成立する．ここで，$\bar{B}\equiv B\pmod n$，$\bar{B}\in\mathrm{M}(m-1,Z_n)$ を満たす行列 $\bar{B}$ をとると，$\bar{B}A\equiv BA\equiv E\pmod n$，$A\bar{B}\equiv AB\equiv E\pmod n$ も成り立ち，$A\in\mathrm{GL}(m-1,Z_n)$ となる．

(ii)「(2)⇒(3)」の証明：

定理 4-1 での証明と同様に，A の累乗 A^ℓ ($\ell\geqq 0$) を順に並べた列 $\{A^\ell\}$ はいずれ循環するので，$d>k$ かつ $A^d\equiv A^k\pmod n$ を満たす d,k が存在する．このとき，A の $\mathrm{M}(m-1,Z_n)$ における逆行列 B を両辺に繰り返し掛けると $A^{d-k}\equiv E\pmod n$ となる．従って E 型である．

(iii)「(3)⇒(1)」の証明：

(3) より，$\ell\geqq 1$が存在して，$A^\ell\equiv E\pmod n$ となる．このとき例えば両辺の(1,1)成分を比較すると，$A\equiv E\pmod n$とは ならないので $\ell>1$である．そこで，$A^{\ell-1}=X$ とおくと，$AX\equiv E\pmod n$ となる．これを成

分表示すると

$$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&s_0\\1&\cdots&0&s_1\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&1&s_{m-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&*&\cdots&*\\x_{21}&*&\cdots&*\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_{m-1,1}&*&\cdots&*\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

この両辺の(1,1)成分を比較すると

$$s_0x_{m-1,1}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ n).$$

よって，自然数 k_0が存在して $s_0x_{m-1,1}-1=nk_0$　…㉚
が成り立つ．ここで係数 s_0が n と互いに素でないと仮定すると２以上の自然数 d に対して

$s_0=dk_1, n=dk_2$（k_1,k_2：互いに素な自然数）　…㉛
となり，㉚㉛より $d(k_1x_{m-1,1}-k_2k_0)=1$　となる．
しかし，この式は $d\geqq 2$より成立しないので矛盾となり，背理法により係数 s_0 と n は互いに素である．

以上より，定理 4-2 は証明されたことになる．■

ところで，この定理 4-2 から「法10のもとで $s_0\in\{0,2,4,5,6,8\}$ ならば，E 型にならない」ことが分かる．これに対し，集合 $\{0,2,4,5,6,8\}$ から５を除いた集合を Ev とおくと，次の定理 4-3 が成り立つことが分かる．

> 定理4-3　法10のもとで，$Ev=\{0,2,4,6,8\}$ とおく．
> (1) $s_0,s_1\in Ev$ のとき，漸化式は A 型にならない．
> (2) $s_0,s_1,s_2\in Ev$ のとき，漸化式は A 型，A^2型のどちらにもならない．
> 以下同様に，$1\leqq \ell\leqq m-2$に対して次が成立する．
> (ℓ) $s_0,s_1,\cdots,s_\ell\in Ev$ のとき，漸化式は A 型，A^2型，$\cdots$，A^ℓ型のどれにもならない．

（証明）(1)の証明：

A 型になると仮定すると，ある $k>1$で $A^k\equiv A$ となる．

$$A^2=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&s_0&s_0s_{m-2}\\0&\cdots&0&s_1&s_0+s_1s_{m-2}\\1&\cdots&0&s_2&s_1+s_2s_{m-2}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&1&s_{m-2}&s_{m-3}+s_{m-2}^2\end{pmatrix}$$

より，例えば両辺の(2,1)成分を比較すると $A^2\equiv A$ でないと分かるので，$A^k\equiv A$ でないので $k>2$.

そこで $A^{k-1}=X$ とおくと $A^2X\equiv A$　…㉜を満たす．ここで，$X=(x_{ij})$ と表し，㉜の両辺の(2,1)成分を比較すると，

$$s_1x_{m-2,1}+(s_0+s_1s_{m-2})x_{m-1,1}\equiv 1\qquad\cdots㉝$$

となるが，$s_0,s_1\in Ev$ より

$$s_0=2s_0',\ s_1=2s_1'\,(s_0',s_1'\in Z_{10})$$

従って，㉝は$2\{s_1'x_{m-2,1}+(s_0'+s_1's_{m-2})x_{m-1,1}\}\equiv 1$となり成立しないので矛盾となり，背理法により A 型にならない．

残りの(2)～$(m-2)$は，(ℓ)として証明する．

(ℓ)の証明：

$s_0,s_1,\cdots,s_\ell\in Ev$ のとき，A^ℓ型にならないことを示せばよい．ここで，A^ℓ型になると仮定すると，ある $k>\ell$ で $A^k\equiv A^\ell$ となる．このとき，例えば両辺の($\ell+1$,1)成分の比較から $A^{\ell+1}\equiv A^\ell$とはならないので，$k>\ell+1$．よって，$A^{k-\ell-1}=X$ とおくと $A^{\ell+1}X\equiv A^\ell$　…㉞を満たす．$X=(x_{ij})$と表しておく．

一方，$s_0,s_1,\cdots,s_\ell\in Ev$ を用いることで，$A^{\ell+1}=(a_{ij})$ の(ℓ+1)行目が

$a_{\ell+1,j}=0$　$(1\leqq j\leqq m-\ell-2)$

$a_{\ell+1,j}\in Ev$　$(m-\ell-1\leqq j\leqq m-1)$

となっていることが確認できる．これより，任意の $1\leqq j\leqq m-1$で，$a_{\ell+1,j}=2a'_{\ell+1,j}$)　…㉟と表せる．㉞の両辺の($\ell$+1,1)成分を比較すると，

$$a_{\ell-1,1}x_{11}+a_{\ell-1,2}x_{21}+\cdots+a_{\ell-1,m-1}x_{m-1,1}\equiv 1$$

となるが，㉟より

$$2(a'_{\ell-1,1}x_{11}+a'_{\ell-1,2}x_{21}+\cdots+a'_{\ell-1,m-1}x_{m-1,1})\equiv 1$$

となり矛盾するので，背理法よりA^ℓ型にならない．■

> 系4-4　法10のもとで，$s_0,s_1,\cdots,s_{m-2}\in Ev=\{0,2,4,6,8\}$ のとき漸化式は A^{m-1}型である．

（証明）定理 4-2，定理 4-3 よりE 型，A 型，$\cdots$，A^{m-2}型にはならない．従って，定理 4-1よりA^{m-1}型になる．■

５．本稿の結果に関する意義

本稿では，隣接３項間や隣接４項間の漸化式で定められた数列についての考察を基に，一般の隣接 m 項間漸化式で定められた数列の下一桁について「型の基本定理」を証明し，広く成り立つ周期性を明らかにした．具体的には，定理 4-1 で「型」と呼ばれる下一桁の周期の種類を明快に分類できた．そして，定理 4-2 では，「E 型」の判定方法（特徴づけ）を得ることができた．この定理 4-2 から，「型」の中で最も基本的な「E 型」が，「$\mathrm{M}(m-1,Z_n)$における正則性」という基本的かつ重要な行列の性質に対応していることが分かった．

こうした数学的な結果を得ることができた理由の１つ目として，行列の活用が挙げられる．実際，行列を用いることで計算の煩雑さが軽減される．例として，隣接３項間漸化式①で $t=1$の場合を考える．行列を用いない場合，探究課題「17段目のなぞの発展」の命題２のように，$a_{n+1}=p_nb+q_na$ で定めた数列 $\{p_n\},\{q_n\}$ を考察する．これが連立漸化式 $p_{c+d}=sp_c\,p_d+p_c\,q_d+p_d\,q_c, q_{c+d}=tp_c\,p_d+p_d\,q_d$ を満たすことから，$p_5\equiv s^4+3s^2+1, q_5\equiv s^3+2s, p_{10}\equiv 8s^3+7s, q_{10}\equiv 6s^4+7s^2+1, p_{15}\equiv 4s^3+5s^2+1, q_{15}\equiv 8s^3+7s, p_{30}\equiv 0, q_{30}\equiv 3s^4+5s^2+1,$

$p_{60}\equiv 0, q_{60}\equiv 1$となる．これより，周期60以下の$A$型と分かる．一方，行列を使うと，ケーリー・ハミルトンの定理から得られる式$A^2=sA+tE$と指数法則を利用して，

$$A^5\equiv(s^4+3s^2+1)A+(s^3+2s)E,$$
$$A^{10}=(A^5)^2\equiv(8s^3+7s)A+(6s^4+7s^2+1)E,$$
$$A^{15}=A^5A^{10}\equiv(4s^3+5s^2+1)A+(8s^3+7s)E,$$
$$A^{30}=(A^{15})^2\equiv(3s^4+5s^2+1)E,\ A^{60}=(A^{15})^2\equiv E$$

となり，簡潔に周期60以下のA型と分かる．

また，２つ目として，コンピュータの活用が挙げられる．実際，コンピュータを用いて計算した結果である表２[c)]の「型」の様子を見て，一般的な状況を予想することで，４章の結果が得られた．加えて，表１や表２のような形で，できる限り多く「型」やその周期の具体的なデータを計算しておくことは，周期の値の法則を探究するの際の礎にもなる．

行列の視点を取り入れ，コンピュータを活用し，隣接m項間漸化式で定まる数列の下一桁の周期性，特に「型」の基本的性質を明瞭に整理できたことに本稿の意義がある．

６．本稿による教材研究の意義

生徒の成長を担うためには，教師自らも成長することが必要であり，そのためには，日々の教材研究が重要な要素の一つとなる．実際，教師がまず行動すべきことが次のように述べられている[7)]．

「「まず教師より始めよ」である．生徒に「数学を学ぶ感動」を与えるためには，教師自身が数学を愛し，数学の学問性を尊重することが前提である．同じく，生徒に「数学の有用性」を納得させるためには，教師自身が現在および近未来の学術・社会・仕事場における数学の役割について承知している必要がある．」（藤田，2007，p.3）

「17段目のなぞ」やその発展内容を実践する際，多くの生徒が行列を用いないとしても，教師としては，文字式や漸化式による解決だけを理解するのでなく，行列を用いることで数列の規則性を扱いやすくなると理解しておくことは重要である．例えば，教える数学的内容を通暁するだけでなく，その内容を超えた知識を持つべき理由が次のように示されている[8)]．

「教師は数学の水先案内人として，当該の数学的内容がこれからどう学習の中で発展して，将来につながっていくかを，数学という世界全体の中に位置付けた形で理解していなければならないからである．」（浪川，2009，p.45）

特に，平成30年告示の高等学校学習指導要領には，「事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力」（p.28）の育成が掲げられている[9)]．このために「問題解決の過程を振り返り，本質的な条件を見いだし，それ以外の条件を変えること」（p.28），「問題の考察範囲を拡げること」（p.28）などによる新たな問題の発見を促すことが示されている[9)]．新たな問題の発見を生徒に促せるようになるためには，教材の構造化が重要である．実際，教材研究の構造化の必要性が示されている[10)]．

「一つの教材はその教材を中心としてそれに近いもの遠いものとの関係を網の目のように絡ませておかねばならない．その事項をとりあげるとき，すなわち網の目の一つの結び目をもちあげると四方に絡まる他の結び目が近いものから順次にもちあがってくるような状態で構造化しておく必要がある．」（松原，1977，pp.188-189）

例えば，「17段目のなぞ」など，フィボナッチ数列の下一桁に関する教材は，フィボナッチ数列の下一桁が周期60で初項からの繰り返しになることを中心としている．本稿の一般的な考察により，初項からの繰り返しが起こることは当たり前でなく，漸化式$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$におけるa_nの係数である１と10が互いに素であることが重要だと分かる．また，初期値$a_1=0, a_2=1$を変えても初項からの繰り返しが起こることは変わらないと分かる．さらに，これらのことが，オイラーの定理や，行列$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$に対して，$AB\equiv BA\equiv E$を満たす行列$B\in \mathrm{M}(2,Z_{10})$が存在することと直結していることが分かる． このように，この教材が「互いに素」，「オイラーの定理」，「$\mathrm{M}(2,Z_{10})$における正則性」などの様々な数学的性質とつながっていることを明確化できる．

こうした構造化の結果，たとえ一つの教材であったとしても類似な教材や発展的な教材との関係，つながりが明らかとなり，これらを俯瞰的な視点で捉えられる．この捉え方ができると，結果を得てそこで終わりとするだけでなく，新たな問題発見や問題解決へと向かう数学的活動が実現され，生徒の興味・関心を喚起することができたり，今日の授業改善の視点となっている主体的・対話的で深い学びのある授業がつくれたりすることが期待できる．こうした数学的活動を通して，「数学を既成のものとみなしたり，固定的で確定的なものとみなしたりせず，新たな概念，原理や法則などを創造しようとする」（p.24）[9)] 数学観を身につけ

ることも期待できる．

なお，数列に関する指導の際，「場面に応じて，コンピュータなどの情報機器を用いるなどしてその変化の様子を調べ，一般項を予想したり，導き出した一般項の妥当性を検証したりすること」(p.104)が大切にされている[9]．本稿でも，具体的な考察を担保し，結果を予想・検証するものとして，コンピュータが活用されているように，実践でも積極的に活用すべきである．

7．まとめと今後の課題

本研究の目的は，隣接３項間や隣接４項間の漸化式で定まる数列の下一桁の周期性に関する考察を基に，隣接 m 項間の漸化式と一般化したときの数列に対して，下一桁の周期性などについて考察することであった．

この結果，「型の基本定理」とも言える２つの定理を証明することができた．具体的には，漸化式で定まる数列の下一桁の周期の種類である「型」の分類が行われ，特に，漸化式で定まる数列の下一桁が，初項からある項までの繰り返しとなる「E 型」の特徴づけがなされた．また，表２の通り，隣接４項間漸化式で定まる数列の下一桁の周期性を具体的に整理することができた．

今後の課題は，隣接３項間であれ隣接４項間であれ，周期の値の法則の理解を深めることである．例えば，隣接３項間漸化式で定まる数列の下一桁の周期は，すべての場合が120の約数であった[6]のに対して，隣接４項間漸化式の周期は，すべての場合が26040の約数となっている．この原理について検討することは興味深い．

注

a)　教材「17段目のなぞ」には，生徒なら誰でも計算したり規則性を調べたりでき，主体的に参加できるよさがある．実際，複数の実践報告[3)4)5)]がある．

b)　整数成分 n 次正方行列 A の固有多項式 $f_A(x) = \det(xE - A)$ は整数係数 n 次多項式であり，$f_A(A) = 0$が成立する．

c)　A^{n-1}は，$A^3 = sA^2 + tA + uE$ を使った次数下げの繰り返しや整式の除法の利用によって，$A^{n-1} = p_{n-1}A^2 + q_{n-1}A + r_{n-1}E$ と表すことができ，このとき p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} は一意である．係数の組$(p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1})$は $n = 1$のとき(0,0,1)，$n = 2$ のとき(0,1,0)，$n = 3$ のとき(1,0,0)，$n = 4$のとき(s,t,u)となる．また，$A^n = A^{n-1}A$ より，

$$p_n = sp_{n-1} + q_{n-1},\ q_n = tp_{n-1} + r_{n-1},\ r_n = up_{n-1}$$

が成り立つので，$n = 5$以降もこのルールに従って進んでいく．例えば，$n = 5$以降は次のように「Microsoft Excel」を用いて求められる．係数の組（p_{n-1},q_{n-1},r_{n-1}）の $n = 4$のとき，つまり s,t,u として，A1,B1,C1 のセルに０～９の数を自由にとり

A2 のセルを「=MOD(A1*A1+B1,10)」

B2 のセルを「=MOD(B1*A1+C1,10)」

C2 のセルを「=MOD(C1*A1,10)」

とする．すると，(p_5,q_5,r_5)＝(A2,B2,C2) となる．$n = 6$以降の係数の組は，縦方向にオートフィル機能を使って求めることができる．これにより行列の累乗の列 $\{A^{n-1}\}$ の規則性を調べることができるので，対応する数列 $\{a_n\}$ の規則性も分かる．このように表２を作成できる．

引用・参考文献

1）北山秀隆，松山ともこ，塩見大輔（2019）.「高等学校数学における発展的学習の考察とその背景－フィボナッチ数列の剰余の周期について－」．和歌山大学教育学部紀要 69．pp.67-74.

2）吉田正明（1991）．17段目のなぞ．坪田耕三・授業のネタ研究会編著，授業のネタ 算数5パズル編．日本書籍．pp.73-75.

3）大田誠，山下勝，服部利範，鈴木良男（1995）．17段目の謎．教育科学 数学教育6，pp.69-72.

4）玉置崇（1992）．17段目の秘密．教育科学 数学教育1，pp.78-82.

5）伊禮三之，龍田智恵美，青木慎恵（2016）．「フィボナッチ数列の周期性を題材とした RLA」．琉球大学教育学部紀要 88．pp.307-318.

6）田中義久，上山健太，山上佳男（2021）．「数列の発展的な探究課題の開発－「17段目のなぞ」の周期性に着目して－」．日本数学教育学会誌　数学教育75-1．pp.2-10.

7）藤田宏（2007）．「中等教育の数学教師に求められる素養－その理（ロゴス）と技（アルス）の背景－」．数学教育学会誌48．pp.1-13.

8）浪川幸彦（2009）．「数学教員が持つべき数学リテラシーに関する覚え書き」．椙山女学園大学教育学部紀要2．pp.41-49.

9）文部科学省（2018）．高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説 数学編 理数編.

10)　松原元一（1977）．数学的な見方考え方．国土社

（2022．１.21 受理）

表 1　$a_{n+2} \equiv sa_{n+1} + ta_n \pmod{10}$　例：「E60」は「周期 60 のE型」のこと

s: a_{n+1} の係数 \ t: a_n の係数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$A^{2}1$	E2	$A^{2}8$	E8	$A^{2}4$	$A^{2}2$	$A^{2}2$	E8	$A^{2}8$	E4
1	A1	E60	A4	E24	A6	A3	A20	E12	A24	E6
2	$A^{2}4$	E12	$A^{2}24$	E4	$A^{2}5$	A4	$A^{2}12$	E24	$A^{2}4$	E10
3	A4	E12	A24	E12	A10	A12	A12	E24	A4	E30
4	$A^{2}2$	E20	$A^{2}4$	E24	$A^{2}3$	A2	$A^{2}20$	E4	$A^{2}24$	E6
5	$A^{2}1$	E6	A8	E24	A4	$A^{2}3$	A2	E24	A8	E12
6	$A^{2}1$	E20	$A^{2}4$	E24	$A^{2}6$	A2	$A^{2}20$	E4	$A^{2}24$	E6
7	A4	E12	A24	E12	A5	A12	A12	E24	A4	E15
8	$A^{2}4$	E12	$A^{2}24$	E4	$A^{2}10$	A4	$A^{2}12$	E24	$A^{2}4$	E10
9	A2	E60	A4	E24	A3	A6	A20	E12	A24	E3

表 2　$a_{n+3} \equiv sa_{n+2} + ta_{n+1} + ua_n \pmod{10}$　例：「A^2186」は「周期 186 のA^2型」のこと

(1) $s = 0$

t: a_{n+1} の係数 \ u: a_n の係数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$A^{3}1$	E6	$A^{3}12$	E12	$A^{3}6$	$A^{3}3$	$A^{3}3$	E12	$A^{3}12$	E6
1	A2	E168	A124	E868	A24	A14	A24	E868	A124	E168
2	$A^{3}8$	E60	$A^{3}124$	E372	$A^{3}20$	A24	$A^{3}20$	E372	$A^{3}124$	E60
3	A8	E217	A20	E140	A62	A56	A62	E140	A20	E434
4	$A^{3}4$	E93	$A^{3}24$	E24	$A^{3}62$	A12	$A^{3}31$	E24	$A^{3}24$	E186
5	$A^{3}2$	E21	A12	E84	A6	$A^{3}7$	A6	E84	A12	E42
6	$A^{3}2$	E24	$A^{3}124$	E372	$A^{3}24$	A6	$A^{3}24$	E372	$A^{3}124$	E24
7	A8	E140	A124	E868	A20	A56	A20	E868	A124	E140
8	$A^{3}8$	E93	$A^{3}20$	E60	$A^{3}62$	A24	$A^{3}31$	E60	$A^{3}20$	E168
9	A4	E217	A24	E168	A62	A28	A62	E168	A24	E434

(2) $s = 1$

t: a_{n+1} の係数 \ u: a_n の係数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$A^{2}1$	E217	$A^{2}124$	E140	$A^{2}24$	$A^{2}7$	$A^{2}31$	E868	$A^{2}20$	E168
1	A60	E124	A12	E124	A30	A20	A93	E12	A372	E20
2	$A^{2}4$	E217	$A^{2}12$	E56	$A^{2}62$	A28	$A^{2}31$	E84	$A^{2}8$	E434
3	A24	E12	A24	E20	A24	A24	A12	E8	A60	E24
4	$A^{2}6$	E28	$A^{2}24$	E868	$A^{2}124$	A42	$A^{2}4$	E168	$A^{2}124$	E434
5	$A^{2}3$	E124	A372	E20	A24	$A^{2}4$	A93	E124	A60	E24
6	$A^{2}20$	E217	$A^{2}12$	E868	$A^{2}10$	A140	$A^{2}31$	E84	$A^{2}124$	E70
7	A12	E124	A12	E8	A186	A4	A93	E12	A24	E124
8	$A^{2}24$	E84	$A^{2}8$	E140	$A^{2}24$	A168	$A^{2}12$	E56	$A^{2}20$	E168
9	A6	E4	A24	E124	A186	A12	A12	E24	A372	E124

(3) $s = 2$

t: a_{n+1} の係数 \ u: a_n の係数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$A^{3}4$	E93	$A^{3}24$	E372	$A^{3}20$	$A^{2}12$	$A^{3}31$	E24	$A^{3}124$	E60
1	A12	E168	A124	E28	A62	A84	A24	E868	A4	E434
2	$A^{3}24$	E24	$A^{3}24$	E12	$A^{3}10$	A24	$A^{3}8$	E24	$A^{3}12$	E30
3	A4	E42	A124	E868	A8	A28	A6	E868	A124	E56
4	$A^{3}5$	E12	$A^{3}20$	E372	$A^{3}62$	A15	$A^{3}12$	E60	$A^{3}124$	E186
5	$A^{2}4$	E217	A24	E868	A20	$A^{2}28$	A62	E168	A124	E140
6	$A^{3}12$	E24	$A^{3}124$	E12	$A^{3}62$	A12	$A^{3}24$	E372	$A^{3}4$	E186
7	A24	E56	A24	E84	A10	A168	A8	E168	A12	E70
8	$A^{3}4$	E6	$A^{3}124$	E372	$A^{3}8$	A12	$A^{3}6$	E372	$A^{3}124$	E24
9	A10	E84	A20	E868	A62	A35	A12	E140	A124	E434

(4) $s = 3$

t: a_{n+1} の係数 \ u: a_n の係数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$A^{2}4$	E140	$A^{2}124$	E168	$A^{2}62$	$A^{2}12$	$A^{2}20$	E868	$A^{2}24$	E434
1	A12	E124	A12	E124	A24	A12	A93	E4	A372	E24
2	$A^{2}24$	E35	$A^{2}12$	E168	$A^{2}8$	A168	$A^{2}5$	E84	$A^{2}24$	E56
3	A12	E8	A372	E124	A6	A4	A24	E124	A372	E12
4	$A^{2}10$	E217	$A^{2}124$	E140	$A^{2}12$	A70	$A^{2}31$	E868	$A^{2}20$	E84
5	$A^{2}12$	E20	A372	E24	A186	$A^{2}4$	A60	E124	A24	E124
6	$A^{2}12$	E217	$A^{2}4$	E868	$A^{2}24$	A84	$A^{2}31$	E28	$A^{2}124$	E168
7	A24	E20	A12	E24	A24	A24	A15	E124	A24	E8
8	$A^{2}4$	E56	$A^{2}124$	E868	$A^{2}6$	A28	$A^{2}8$	E868	$A^{2}124$	E42
9	A30	E124	A372	E20	A12	A20	A93	E124	A60	E12

(5) $s = 4$

t: a_{n+1}の係数 ＼ u: a_nの係数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$A^3$2	E24	$A^3$20	E372	$A^3$82	$A^2$6	$A^3$24	E60	$A^3$124	E186
1	A20	E70	A124	E84	A62	A140	A10	E868	A12	E434
2	$A^3$4	E93	$A^3$8	E12	$A^3$62	A12	$A^3$31	E24	$A^3$12	E186
3	A24	E168	A20	E56	A12	A168	A24	E140	A8	E84
4	$A^3$3	E93	$A^3$124	E24	$A^3$4	A3	$A^3$31	E372	$A^3$24	E12
5	$A^2$2	E168	A20	E868	A62	$A^2$14	A24	E140	A124	E434
6	$A^3$20	E30	$A^3$124	E12	$A^3$62	A60	$A^3$20	E372	$A^3$124	E186
7	A4	E217	A8	E84	A62	A28	A62	E56	A12	E434
8	$A^3$24	E24	$A^3$20	E24	$A^3$12	A24	$A^3$24	E60	$A^3$8	E12
9	A6	E217	A124	E168	A4	A21	A62	E868	A24	E28

(6) $s = 5$

t: a_{n+1}の係数 ＼ u: a_nの係数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$A^3$1	E21	$A^2$12	E84	$A^2$6	$A^3$7	$A^2$3	E84	$A^2$12	E42
1	A6	E24	A372	E124	A24	A4	A24	E124	A372	E24
2	$A^2$8	E140	$A^2$124	E868	$A^2$20	A56	$A^2$20	E868	$A^2$124	E140
3	A24	E124	A60	E20	A186	A8	A93	E20	A60	E124
4	$A^2$4	E217	$A^2$24	E168	$A^2$62	A28	$A^2$31	E168	$A^2$24	E434
5	$A^3$3	E12	A12	E12	A6	$A^3$4	A3	E12	A12	E12
6	$A^2$2	E168	$A^2$124	E868	$A^2$24	A14	$A^2$24	E868	$A^2$124	E168
7	A24	E20	A372	E124	A60	A8	A60	E124	A372	E20
8	$A^2$8	E217	$A^2$40	E140	$A^2$62	A56	$A^2$31	E140	$A^2$20	E434
9	A12	E124	A24	E24	A186	A4	A93	E24	A24	E124

(7) $s = 6$

t: a_{n+1}の係数 ＼ u: a_nの係数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$A^3$1	E93	$A^3$124	E60	$A^3$24	$A^2$3	$A^3$31	E372	$A^3$20	E24
1	A20	E217	A12	E868	A10	A140	A62	E84	A124	E70
2	$A^3$4	E93	$A^3$12	E24	$A^3$62	A12	$A^3$31	E12	$A^3$8	E186
3	A24	E84	A8	E140	A24	A168	A12	E56	A20	E168
4	$A^3$6	E12	$A^3$24	E372	$A^3$62	A6	$A^3$4	E24	$A^3$124	E186
5	$A^2$2	E217	A124	E140	A24	$A^2$7	A62	E868	A20	E168
6	$A^3$20	E93	$A^3$12	E372	$A^3$10	A60	$A^3$31	E12	$A^3$124	E30
7	A4	E217	A12	E56	A62	A28	A62	E84	A8	E434
8	$A^3$24	E12	$A^3$8	E60	$A^3$24	A24	$A^3$12	E24	$A^3$20	E24
9	A6	E28	A24	E868	A62	A42	A4	E168	A124	E434

(8) $s = 7$

t: a_{n+1}の係数 ＼ u: a_nの係数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$A^2$4	E217	$A^2$24	E868	$A^2$20	$A^2$28	$A^2$31	E168	$A^2$124	E140
1	A12	E24	A372	E4	A186	A12	A24	E124	A12	E124
2	$A^2$24	E56	$A^2$24	E84	$A^2$10	A168	$A^2$8	E168	$A^2$12	E70
3	A12	E12	A372	E124	A24	A4	A6	E124	A372	E8
4	$A^2$5	E84	$A^2$20	E868	$A^2$62	A35	$A^2$12	E140	$A^2$124	E434
5	$A^2$12	E124	A24	E124	A60	$A^2$4	A93	E24	A372	E20
6	$A^2$12	E168	$A^2$124	E28	$A^2$62	A84	$A^2$24	E868	$A^2$4	E434
7	A24	E8	A24	E12	A30	A24	A24	E24	A12	E20
8	$A^2$4	E42	$A^2$124	E868	$A^2$8	A28	$A^2$6	E868	$A^2$124	E56
9	A15	E12	A60	E124	A186	A20	A12	E20	A372	E124

(9) $s = 8$

t: a_{n+1}の係数 ＼ u: a_nの係数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$A^3$4	E60	$A^3$124	E24	$A^3$62	$A^2$12	$A^3$20	E372	$A^3$24	E186
1	A12	E217	A4	E868	A24	A84	A62	E28	A124	E168
2	$A^3$24	E15	$A^3$12	E24	$A^3$8	A24	$A^3$5	E12	$A^3$24	E24
3	A4	E56	A124	E868	A6	A28	A8	E868	A124	E42
4	$A^3$10	E93	$A^3$124	E60	$A^3$12	A30	$A^3$31	E372	$A^3$20	E12
5	$A^2$4	E140	A124	E168	A62	$A^2$28	A20	E868	A24	E434
6	$A^3$12	E93	$A^3$4	E372	$A^3$24	A12	$A^3$31	E12	$A^3$124	E24
7	A24	E35	A12	E168	A8	A168	A10	E84	A24	E56
8	$A^3$4	E24	$A^3$124	E372	$A^3$6	A12	$A^3$8	E372	$A^3$124	E6
9	A10	E217	A124	E140	A12	A70	A62	E868	A20	E84

(10) $s = 9$

t: a_{n+1}の係数 ＼ u: a_nの係数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$A^2$2	E168	$A^2$20	E868	$A^2$62	$A^2$14	$A^2$24	E140	$A^2$124	E434
1	A60	E20	A372	E12	A186	A20	A30	E124	A12	E124
2	$A^2$4	E217	$A^2$8	E84	$A^2$62	A28	$A^2$31	E56	$A^2$12	E434
3	A24	E24	A60	E8	A12	A24	A24	E20	A24	E12
4	$A^2$3	E217	$A^2$124	E168	$A^2$4	A21	$A^2$31	E868	$A^2$24	E28
5	$A^2$6	E24	A60	E124	A186	$A^2$4	A24	E20	A372	E124
6	$A^2$20	E70	$A^2$124	E84	$A^2$62	A140	$A^2$10	E868	$A^2$12	E434
7	A12	E124	A24	E12	A186	A4	A93	E8	A12	E124
8	$A^2$24	E168	$A^2$20	E56	$A^2$12	A168	$A^2$24	E140	$A^2$8	E84
9	A3	E124	A372	E24	A12	A12	A93	E124	A24	E4